

# 二重指数関数型積分公式について

大浦拓哉

京都大学数理解析研究所

# 二重指数関数型 (DE) 公式

DE 公式とは：ある種の最適な変数変換型数値積分公式

発見者：高橋秀俊・森正武 (1974)

有限区間の DE 公式 (tanh-sinh rule):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx h \sum_{n=-N_-}^{N_+} f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh nh\right)\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh nh}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh nh\right)}$$

半無限区間の DE 公式：

$$\int_0^\infty f(x) dx \approx h \sum_{n=-N_-}^{N_+} f(\exp(2 \sinh nh)) 2 \exp(2 \sinh nh) \cosh nh$$

# DE公式発見の背景

変数変換型公式：変数変換と補間型積分公式の組み合わせ

## 背景

- ・台形則が解析的周期積分や全無限区間積分に対して最適となることの証明
- ・誤差の特性関数を用いることで任意の積分公式に関する性能を可視化
- ・最適な変数変換の導出を考察する際に物理学的観点を採用

# 誤差の特性関数

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{n=1}^N f(a_n)w_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\Phi(z)dz,$$

$$\Phi(z) = \log \frac{z-a}{z-b} - \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{z-a_n}$$

- 任意の積分公式の誤差が等式で書ける
- $|\Phi(z)|$  の複素領域での減少度で積分公式の性能がわかる

# 誤差の特性関数からわかること1

例:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$

25点シンプソン則

- $a = 1$  のとき誤差  $10^{-7}$
- $a = 4$  のとき誤差  $10^{-8}$
- etc.

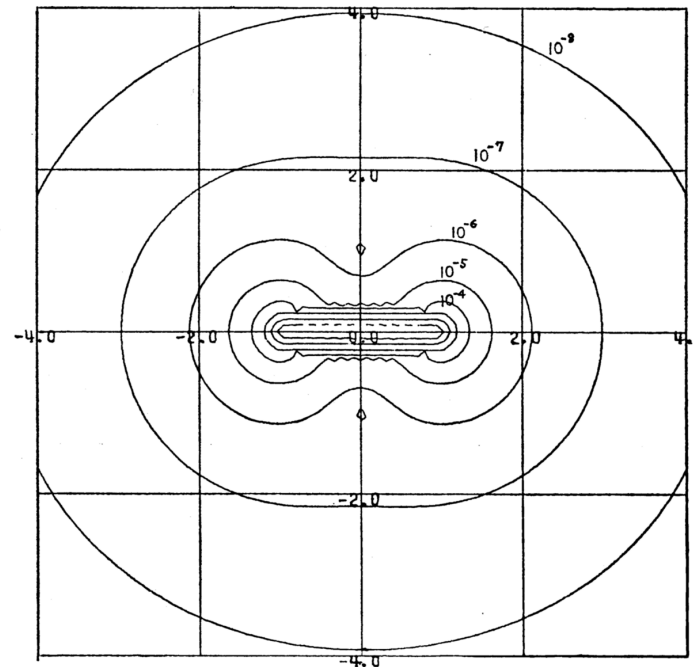


FIGURE 5  $|\Phi(z)|$  for 25-point 2-nd order Newton-Cotes formula (Simpson's rule)

# 誤差の特性関数からわかること2

誤差の減少率:

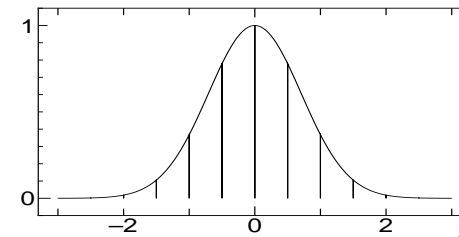
$$-\frac{\partial}{\partial y} \log |\Phi(x + iy)|$$

を解析した結果, 解析的周期積分や全無限区間積分に対する台形則が漸近的に最大の減少率を達成する.

例:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

を区間  $[-6.5, 6.5]$ ,  $N = 26$  で計算した誤差

- ・台形則:  $2.5 \times 10^{-17}$
- ・ガウス・ルジャンドル則:  $9.1 \times 10^{-7}$



変数変換型公式における理想的な補間型積分公式: 台形則

## 最適な変数変換

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\phi(nh)) \phi'(nh)$$

このとき,  $|f(\phi(nh))\phi'(nh)|$  の  $n \rightarrow \pm\infty$  での減衰に着目:

- ・ 減衰が速いほど, 少ない和で計算できる.
- ・ 減衰が速すぎると  $f(\phi(z))\phi'(z)$  の解析性が失われて誤差が大きくなる.

最適な変数変換が存在するはず.

# 最適な変数変換の検索

$$\phi(t) = \tanh t^m, m = 1, 3, 5, \dots$$

のとき，積分公式の誤差項は  $\exp(-\frac{c}{m}N^{\frac{m}{m+1}})$ ,  $c > 0$ ,  $N$ :分点数

$$\phi(t) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)$$

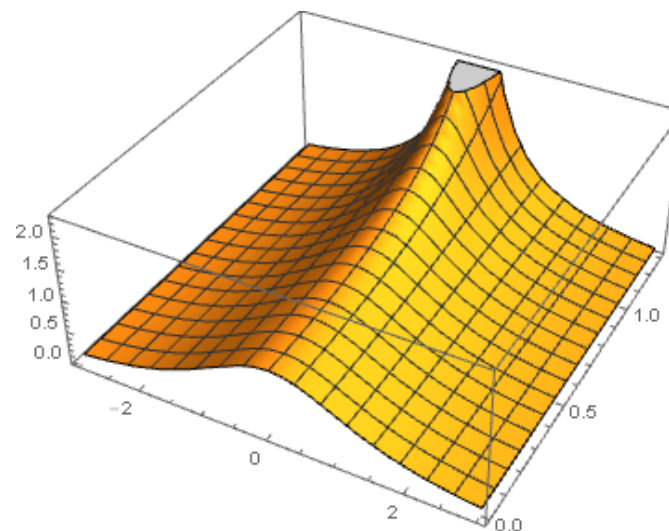
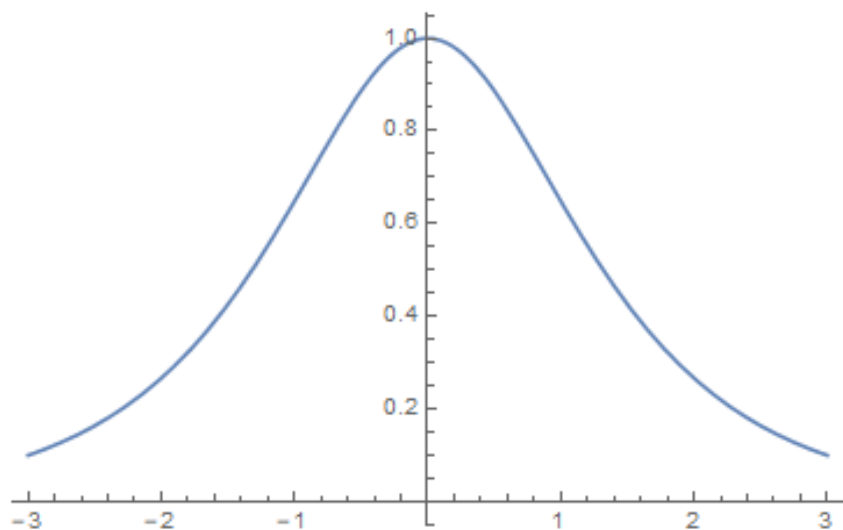
のとき，積分公式の誤差項は  $\exp(-\frac{c'N}{\log N})$ ,  $c' > 0$

$$\phi(t) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t^m\right)$$

のとき， $m$  を 1 より大きくすると積分公式の誤差は悪くなる。

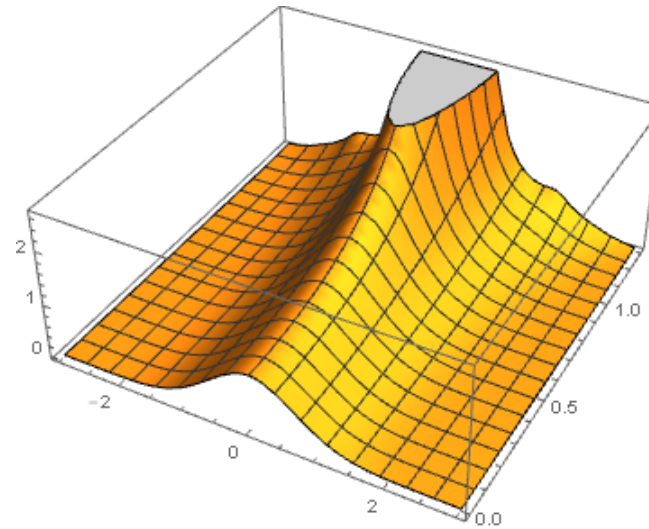
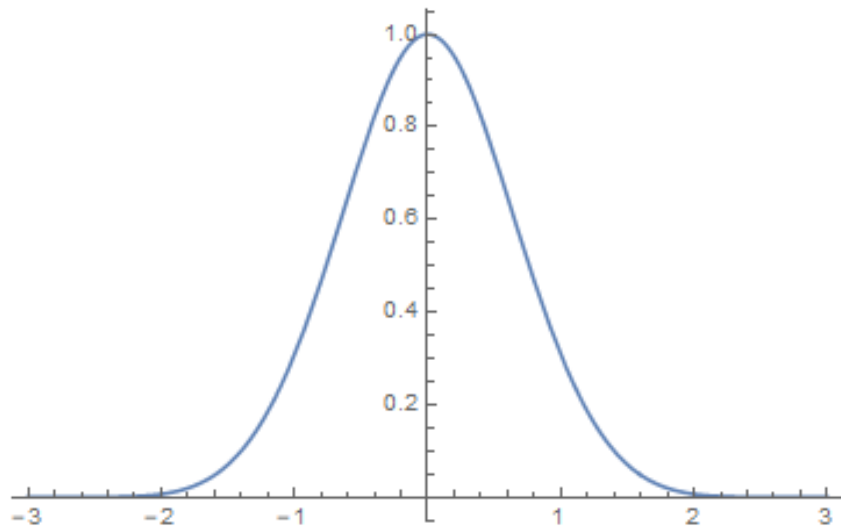


# 一重指数関数の振る舞い



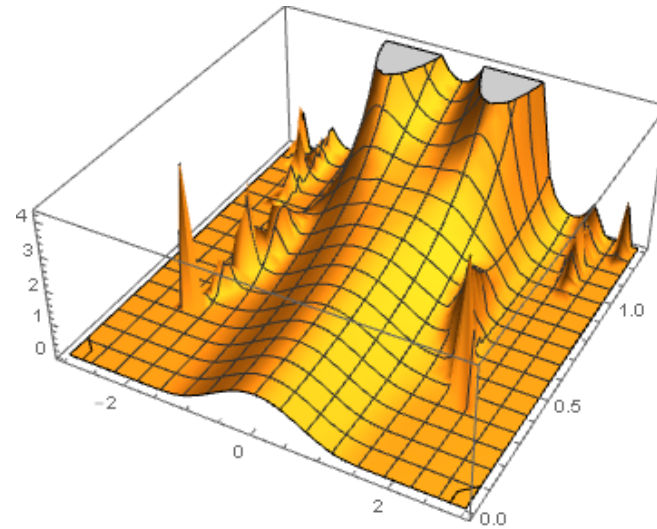
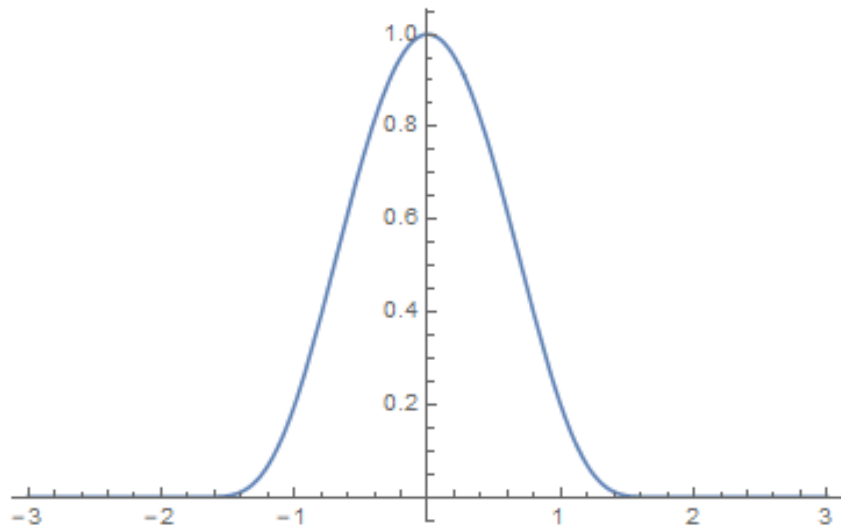
$\frac{1}{\cosh t}$  の図

# 二重指数関数の振る舞い



$$\frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} \text{の図}$$

# 三重指数関数の振る舞い



$$\frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(\sinh t)\right)} \text{の図}$$

# 振動積分とDE公式



– 無限区間のDE公式 p.376 より引用 –

ただし，以上の変換で対応できない重要な例もある．その典型は，たとえば

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \sin x dx$$

のような代数関数×三角関数の型の積分である．このような積分を精度良く数値積分することは一般にかなりむずかしく，特別の工夫が必要である．

# 振動積分の計算が困難な理由

代数学の基本定理:  $n$  次多項式は高々  $n$  個のゼロ点しか持たない .

振動積分: 無限個のゼロ点がある .

ゆえに , 振動積分を多項式で補間することは不可能

# 振動積分を計算可能にする原理

例:sinc関数の積分を台形則で近似する場合,留数定理または標本化定理より  
等式

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{h}{2} + h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh}$$

が成り立つ。ただし  $0 < h < 2\pi$ 。

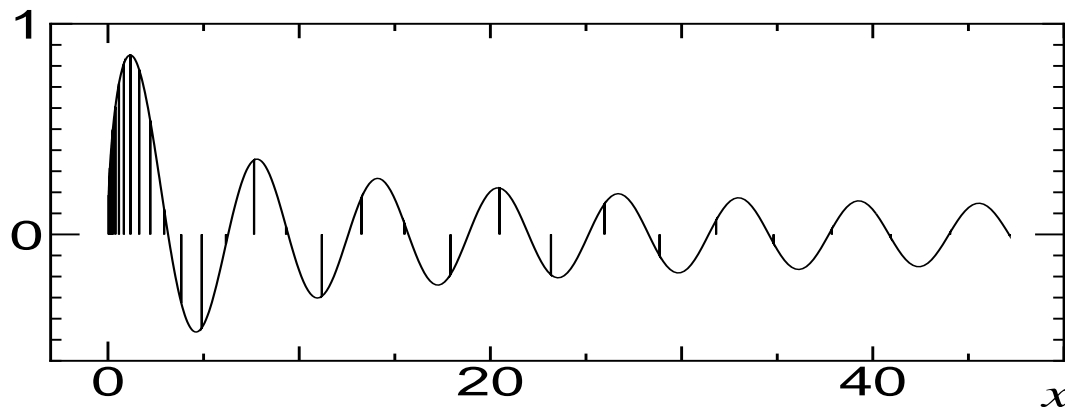
ここで  $h = \pi$  と選ぶと1点だけの計算で真値が得られる。

このことは, sinc関数以外にも同様のフーリエ変換の特性を持つ関数にいえる。

# 振動積分に対するDE公式(大浦・森)

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin x dx \approx \pi \sum_{n=-N_-}^{N_+} f\left(\frac{\pi}{h}\phi(nh)\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}\phi(nh)\right) \phi'(nh),$$

$$\phi(t) = \frac{t}{1 - \exp(-2t - \alpha(1 - e^{-t}) - \beta(e^t - 1))}, \quad \alpha, \beta > 0$$



$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x dx$  の被積分関数と標本点の図

# DE 公式の利用例

DE 公式は Mathematica の数値積分ルーチンに利用されている .  
NIntegrate 参考文献—Wolfram 言語ドキュメントより

...

[ Mori74 ] Mori, M. " On the Superiority of...

[ MoriOoura93 ] Ooura, T. and M. Mori. " Double ...

[ MurIri82 ] Murota, K. and M. Iri. " Parameter Tuning...

[ OouraMori91 ] Ooura, T. and M. Mori. " A Double ...

[ OouraMori99 ] Ooura, T. and M. Mori. " A Robust ...

...



# 変数変換型公式の拡張

補間型積分公式

積分

関数の補間

補間データから  
積分値を計算

積分値

変数変換型公式

積分

変数変換で  
関数の形を変える

台形則

積分値  
DE公式が最適

変数変換型公式の拡張

積分

積分値を近似的に  
保った状態で  
関数の形を変える

台形則

積分値  
最適なものは？