# GROUPES DE MONODROMIE FINIE DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

VERSION DU 9 avril 2024

SÉVERIN PHILIP

Résumé. Les groupes de monodromie finie des variétés abéliennes sur les corps de nombres ont été introduits par Grothendieck et étudiés ultérieurement par Silverberg et Zarhin. Nous présentons une nouvelle construction de variétés abéliennes avec monodromie finie prescrite qui donne une réponse positive partielle à une question de Silverberg et Zarhin. Cette construction est réalisée par déformation et repose sur une étude approfondie des $\varphi$-modules de Fontaine provenant de variétés semi-abéliennes sur les corps finis. Une application au degré de semi-stabilité permet de calculer une borne optimale, ne dépendant que de la dimension, au degré d'une extension finie fournie par le théorème de réduction semi-stable de Grothendieck.

## Table des matières



L'auteur est soutenu par la bourse JSPS KAKENHI numéro 22F22015. L'auteur souhaite remercier C. Cornut, A. Tamagawa, G. Rémond, A. Mézard et B. Collas pour les discussions fructueuses au sujet de ce travail.

# 1. Introduction

## 1.1. Groupes de monodromie finie de variétés abéliennes

**1.1.1.** Les groupes de monodromie finie des variétés abéliennes sur corps de nombres sont introduits par Grothendieck dans [SGA7.1] Exposé IX. Leur propriété principale est qu'ils donnent l'obstruction locale à la réduction semi-stable. Silverberg et Zarhin étudient ces groupes dans [SZ98] et [SZ05]. Ils en donnent la définition suivante, à partir de la représentation $\ell$-adique issue du module de Tate d'une variété abélienne.

**Définition 1.1.** Soient $A$ une variété abélienne de dimension $g$ sur un corps de nombres ou local $K$ et $v$ une place non archimédienne de $K$. Soit $\ell$ un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle de $v$. On note $\rho_{A,\ell}\colon G_K \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbf{Q}_\ell)$ la représentation $\ell$-adique issue de $A$. Le groupe de monodromie finie de $A$ en $v$, noté $\Phi_{A,v}$ ou simplement $\Phi_A$ dans le cas local, est le groupe des composantes $G_v/G_v^\circ$ du groupe algébrique $G_v$, adhérence de Zariski de l'image par $\rho_{A,\ell}$ de l'inertie $I_v$ en $v$.

La question dont on se préoccupe ici est celle de la réalisabilité des groupes finis comme groupe de monodromie finie en dimension fixée, c'est-à-dire étant donné un groupe fini $G$ et un entier $g \geq 1$ peut-on trouver une variété abélienne $A$ de dimension $g$ sur un corps de nombres telle que $G$ est le groupe de monodromie $\Phi_{A,v}$ de $A$ pour une certaine place non archimédienne $v$ du corps de base. Cette question est étudiée par Silverberg et Zarhin dans [SZ05] où ils donnent des conditions nécessaires sur $G$ pour qu'une telle réalisation soit possible. Ces conditions les amènent à la définition de groupe $(p, t, a)$-inertiel rappelée en partie 4.1. L'une de ces conditions est que $G$ soit un groupe de ramification pour $p$ la caractéristique résiduelle de la place $v$, c'est-à-dire produit semi-direct d'un $p$-groupe et d'un groupe cyclique d'ordre premier à $p$ ou encore qu'il existe une extension galoisienne finie de corps $p$-adiques dont c'est le groupe d'inertie.

**1.1.2.** Une méthode de construction de variétés abéliennes avec monodromie finie prescrite par torsion galoisienne est donnée dans [Phi22a] suivant [SZ05]. Le théorème 1.2 de [Phi22a] montre que cette méthode ne permet néanmoins pas de réaliser certains groupes en dimension optimale. Par exemple, pour un entier $g \geq 2$, un 2-Sylow $G_g$ du produit en couronnes $Q_8 \wr \mathfrak{S}_g$ a pour cardinal $2^{r(2g,2)}$ où $r(2g, 2) = \sum_{i \geq 0} \left\lfloor \frac{2g}{2^i} \right\rfloor$ et n'est donc pas réalisable comme groupe de monodromie finie en dimension $g$ par torsion. On se propose de donner ici une nouvelle construction qui se base sur une caractérisation de la monodromie finie par descente galoisienne, donnée en théorème 3.6 et qui permet en particulier de réaliser les groupes précédents en dimension $g$.

## 1.2. Résultats et méthodes

**1.2.1.** Le résultat principal s'énonce comme suit. La notion de variété semi-abélienne polarisée sur un corps fini est motivée par celle de [FC90] pour les schémas semi-abélien et est rappelée en partie 2.1.

**Théorème 1.2.** *Soit $G$ un groupe de ramification pour $p$ tel qu'il existe une variété semi-abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ de dimension $g$ sur un corps fini $k$ de caractéristique $p$ avec une injection $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$. Alors $G$ est le groupe de monodromie finie en une place non archimédienne d'une variété abélienne $A$ de dimension $g$ sur un corps de nombres.*

Outre le fait qu'on en déduise la réalisabilité des groupes $G_g$ en dimension $g$ pour $g \geq 1$ il suit de ce théorème une réponse positive partielle à la question 1.13 de Silverberg et Zarhin dans [SZ05] sous la forme du corollaire 4.5 : tout $p$-groupe $(p, t, a)$-inertiel avec $p$ impair est réalisable comme groupe de monodromie finie d'une variété abélienne de dimension $t + a$ sur un corps de nombres. On établit ce corollaire en partie 4.1 après avoir rappelé la définition de groupe $(p, t, a)$-inertiel. Le résultat principal de cette partie est l'existence, pour un groupe $(p, t, a)$-inertiel $G$ avec $p$ impair, d'une variété semi-abélienne polarisée $A_0$ avec une injection $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$. Ce résultat se base sur une description des $\mathbf{Q}$-algèbres engendrées par ces groupes due à Bouc dans [Bou04].

**1.2.2.** L'application principale du théorème 1.2 est pour le degré de semi-stabilité des variétés abéliennes. Précisément, pour une variété abélienne $A$ sur un corps de nombres $K$ on note $d(A)$ le minimum des degrés des extensions finies $L/K$ telles que $A_L$ a réduction semi-stable. On considère alors l'entier $d_g$ défini comme minimum des entiers $d \geq 1$ vérifiant $d(A) \leq d$ pour toute variété abélienne $A$ de dimension $g$ sur un corps de nombres. Dans [Phi22a] les inégalités suivantes sont établies pour tout $g \geq 1$

$$\frac{M(2g)}{2^{g-1}} \leq d_g \leq M(2g)$$

où $M(n) = \prod_{p \text{ premier}} p^{r(n,p)}$ avec $r(n,p) = \sum_{i \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^i(p-1)} \right\rfloor$ est la borne de Minkowski. On montre, en partie 4.2, pour tout $g \geq 1$, l'égalité

$$d_g = M(2g).$$

En partie 4.3 on étudie l'analogue $d_g^{dep}$ de $d_g$ où l'on demande de plus que les tores intervenant aux places de mauvaise réduction soient déployés. On montre ici, à nouveau pour $g \geq 1$, l'égalité plus forte

$$d_g^{dep} = M(2g).$$

La démonstration du théorème 1.2 se déduit conjointement des théorèmes 2.5 et 3.7 obtenus en parties 2 et 3 que l'on va maintenant résumer.

**1.2.3.** En partie 3 on établit une construction par déformation et dégénérescence de variétés abéliennes avec monodromie finie prescrite en partant de la situation sur un corps fini donnée dans l'énoncé du théorème 1.2. Par la généralisation au cas semi-abélien du théorème de Serre-Tate sur les déformations des variétés abéliennes sur les corps finis dans [BM19] il suffit de traiter le cas du groupe $p$-divisible $A_0[p^\infty]$ de $A_0$. Pour cela on utilise les catégories introduites par Fontaine, Breuil et Kisin en théorie de Hodge $p$-adique entière. On montre que, conditionnellement à l'existence de certaines filtrations admissibles, on peut relever ce groupe $p$-divisible à isogénie près et munir le relèvement d'une donnée de descente vérifiant les conditions du théorème 3.6 caractérisant la monodromie finie. Pour produire une variété abélienne à partir du schéma semi-abélien relevé de $A_0$ on passe par une étape de dégénérescence dans le cadre de la théorie de la dégénérescence des schémas semi-abéliens de [FC90]. Le théorème 3.7 donne le résultat de cette construction.

**1.2.4.** La partie 2 traite des conditions sous lesquelles des filtrations admissibles nécessaires à l'application du théorème 3.7 existent. On commence par des rappels sur les variétés semi-abéliennes polarisées et leurs $\varphi$-modules associés. On clarifie ensuite la situation en donnant précisément les propriétés des filtrations cherchées et on pose le problème en termes de $\varphi$-modules. Les sous-parties suivantes consistent à montrer que de telles filtrations existent dans différents contextes en préparation à la démonstration du théorème 2.5 qui est donnée en fin de partie. Le théorème 2.5 établit que, quitte à étendre le corps de base, il existe toujours des filtrations admissibles avec les propriétés cherchées.

## 2. Isocristaux de variétés semi-abéliennes et filtrations admissibles

### 2.1. Monodromie finie et variétés semi-abéliennes polarisées

**2.1.1.** Soient $K$ un corps $p$-adique de corps résiduel $k$ et des variétés abéliennes $A$, $A'$ sur $K$. D'après [SGA7.1] Exposé IX, partie 4, il existe une plus petite extension $L_A$ de l'extension maximale non ramifiée $K^{\mathrm{un}}$ de $K$, qui est galoisienne de groupe $\Phi_A$, telle que $A_{L_A}$ a réduction semi-stable. Quitte à faire une extension finie non ramifiée de $K$, on peut supposer que $L_A$ descend en une extension $L$, galoisienne de groupe $\Phi_A$ et totalement ramifiée, de $K$ telle que $A_L$ a réduction semi-stable.

Soit $\varphi\colon A \to A'$ une isogénie. Alors, $\varphi$ induit un isomorphisme sur les modules de Tate $\ell$-adiques de $A$ et $A'$ pour $\ell \neq p$. On en déduit un isomorphisme $\Phi_A \simeq \Phi_B$ et le fait que $A'_L$ a réduction semi-stable. On note $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les modèles de Néron sur $\mathcal{O}_L$ des variétés abéliennes $A_L$ et $A'_L$ ainsi que $A_0$ et $A'_0$ leurs réductions (déduite des fibres spéciales de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$). L'isogénie $\varphi$ s'étend en une isogénie $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ par la propriété de Néron et, à nouveau par la propriété de Néron, pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ on a un carré commutatif de schémas sur $\mathcal{O}_L$

$$\begin{tikzcd} {}^{\sigma}\mathcal{A} \arrow[r, "{}^{\sigma}\varphi"] \arrow[d, "\sigma_{\mathcal{A}}"'] & {}^{\sigma}\mathcal{A}' \arrow[d, "\sigma_{\mathcal{A}'}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

déduit de l'action galoisienne de $\sigma$ sur les variétés abéliennes $A$, $A'$. Par passage aux fibres spéciales, du fait que l'extension $L/K$ est totalement ramifiée, on obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & A'_0 \arrow[d, "\sigma'_0"] \\ A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] & A'_0 \end{tikzcd}$$

où $\sigma_0$, $\sigma'_0$ sont des $k$-automorphismes de $A_0$, $A'_0$ et $\varphi_0$ une isogénie de variétés semi-abéliennes sur $k$. Autrement dit, il existe des tores $T_0$, $T'_0$ et des variétés abéliennes $B_0$, $B'_0$ sur $k$ tels que l'on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{T_0}"] & A_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_0"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{B_0}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_0^t \arrow[r] & A_0^t \arrow[r, "p"] & B_0^{\vee} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Du fait que la composition $p \circ \varphi_{T_0}$ est triviale l'isogénie $\varphi_0$ est déterminée par le couple $(\varphi_{T_0}, \varphi_{B_0})$ et il en va de même pour $\sigma_0$ et $\sigma'_0$ qui déterminent les couples $(\sigma_{T_0}, \sigma_{B_0})$ et $(\sigma_{T'_0}, \sigma_{B'_0})$. En particulier, on a une injection $\operatorname{Aut} A_0 \hookrightarrow \operatorname{Aut} T_0 \times \operatorname{Aut} B_0$. La compatibilité entre l'action de $\sigma$ et $\varphi$ s'exprime ici par les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{\sigma_{T_0}} & T_0 \\ {\scriptstyle\varphi_{T_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{T_0}} \\ T'_0 & \xrightarrow{\sigma_{T'_0}} & T'_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{\sigma_{B_0}} & B_0 \\ {\scriptstyle\varphi_{B_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{B_0}} \\ B'_0 & \xrightarrow{\sigma_{B'_0}} & B'_0 \end{array}$$

On en déduit une inclusion, à comparer avec le théorème 5.2 de [SZ98],

$$\iota \colon \Phi_A \hookrightarrow \operatorname{Aut}(T_0, \varphi_{T_0}) \times \operatorname{Aut}(B_0, \varphi_{B_0})$$

où $\operatorname{Aut}(T_0, \varphi_{T_0}) = \{\alpha \in \operatorname{Aut} T_0 \mid \exists \alpha' \in \operatorname{Aut} T'_0,\ \varphi_{T_0}\alpha = \alpha'\varphi_{T_0}\}$ et $\operatorname{Aut}(B_0, \varphi_{B_0})$ est défini de manière analogue. Dans le cas où $B$ est la variété duale $A^\vee$ de $A$ et $\varphi$ est une polarisation on peut vérifier que $B'_0$ est la duale $B_0^\vee$ de $B_0$ et que le morphisme $\sigma_{B'_0}$ est le dual $\sigma_{B_0}^\vee$ de $\sigma_{B_0}$. On peut alors utiliser la définition classique $\operatorname{Aut}(B_0, \varphi_{B_0}) = \{\alpha \in \operatorname{Aut} B_0 \mid \varphi_{B_0}\alpha = \alpha^\vee \varphi_{B_0}\}$.

**Définition 2.1.** On note $\operatorname{Aut}(A_0, \varphi_0)$ l'ensemble des automorphismes de $A_0$ dont l'image dans $\operatorname{Aut} T_0 \times \operatorname{Aut} B_0$ a pour première projection un élément de $\operatorname{Aut}(T_0, \varphi_{T_0})$ et pour deuxième projection un élément de $\operatorname{Aut}(B_0, \varphi_{B_0})$.

**2.1.2.** La construction par déformation que l'on met en place en partie 3 utilise le théorème d'algébrisation de Grothendieck. Un des ingrédients nécessaire pour cela est la donnée d'un faisceau ample, ou d'une polarisation dans le cas abélien. On reprend la notion de schémas semi-abéliens polarisés suivant le chapitre 2 de [FC90] et la définition 1.2 de [Mum72] qui étend la notion de polarisation aux tores.

**Définition 2.2.** Une variété semi-abélienne $A_0$ sur un corps fini $k$ est dite polarisée s'il existe une variété semi-abélienne $A_0^t$ sur $k$ et un morphisme de variétés semi-abéliennes $\lambda_0$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{p} & B_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_{T_0}} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_0} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_{B_0}} & & \\ 0 & \longrightarrow & T_0^t & \longrightarrow & A_0^t & \xrightarrow{p} & B_0^\vee & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tel que les morphismes induits $\lambda_{T_0}$ et $\lambda_{B_0}$ soient des polarisations.

Le paragraphe précédent pousse à considérer les automorphismes de $A_0$ qui ont une certaine compatibilité à $\lambda_0$, ce qui se vérifie sur la donnée du couple de morphismes de $T_0$ et $B_0$. On considérera donc dans la suite une variété semi-abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ munie d'un groupe fini $G \subset \operatorname{Aut}(A_0, \lambda_0)$ et on sera amené à considérer le sous-groupe $p_2(G) \subset \operatorname{Aut}(B_0, \lambda_{B_0})$ image de $G$ par la deuxième projection.

**Remarque 2.3.** Remarquons pour finir que, dans cette situation, le groupe $G$ s'injecte dans les automorphismes de $A_0^t$. La donnée de la variété semi-abélienne $A_0$ correspond à la donnée d'un morphisme $c \colon \underline{X}(T_0) \to B_0^\vee$ où $\underline{X}(T_0)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre des caractères de $T_0$. De la même manière, $A_0^t$ correspond à la donnée d'un morphisme $c^t \colon \underline{X}(T_0^t) \to B_0$. Un couple d'automorphismes $(\alpha_{T_0}, \alpha_{B_0}) \in \operatorname{Aut} T_0^t \times B_0^\vee$ provient d'un automorphisme $\alpha \in \operatorname{Aut} A'_0$ si et seulement si l'égalité $\alpha_{B_0^\vee} c^t = c^t \alpha_{T_0^t}$ est vérifiée. Soit $\sigma \in G$, d'après la définition de $\mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$, il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}\, T_0^t \times B_0^\vee$ tel que

$$\lambda_{B_0}\sigma_{B_0} = \beta\lambda_{B_0} \text{ et } \lambda_{T_0}\sigma_{T_0} = \alpha\lambda_{T_0}.$$

Or comme $\lambda_0$ est un morphisme de variétés semi-abéliennes on a

$$\lambda_{B_0} c = c^t \lambda_{T_0}$$

et donc

$$\begin{aligned}\beta c^t \lambda_{T_0} &= \beta\lambda_{B_0} c = \lambda_{B_0}\sigma_{B_0} c \\ &= \lambda_{B_0} c \sigma_{T_0} = c^t \lambda_{T_0}\sigma_{T_0} \\ &= c^t \alpha \lambda_{T_0}.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité conclut du fait que $\lambda_{T_0}$ est un épimorphisme. Le couple $(\alpha, \beta)$ provient donc d'un automorphisme $\sigma_0^t$ de $A_0^t$.

On termine cette partie par énoncé formellement la condition nécessaire obtenue pour que $G$ soit réalisable comme groupe de monodromie finie. Le théorème 1.2 assure que cette condition est, en fait, suffisante.

**Proposition 2.4.** *Soit $G$ un groupe fini. Si $G$ est réalisable comme groupe de monodromie finie d'une variété abélienne de dimension $g$ sur un corps de nombres alors il existe une variété semi-abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ de dimension $g$ et une injection $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$.*

## 2.2. Isocristaux, filtrations admissibles et grassmanniennes

**2.2.1.** Soient $k$ un corps fini de caractéristique $p$ et $K_0$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$. Un $\varphi$-module, ou isocristal, $D$ sur $K_0$ est un $K_0$-espace vectoriel $D$ de dimension finie muni d'un opérateur bijectif $\varphi$ semi-linéaire. Précisément, on note $\sigma$ le Frobenius sur $W(k)$, la semi-linéarité s'exprime alors, pour tout $\lambda \in K_0$ et $x \in D$, par l'égalité $\varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda)\varphi(x)$. On note $\mathrm{MF}^\varphi$ la catégorie des $\varphi$-modules. Par le théorème de Dieudonné-Manin, voir par exemple [FO22] théorème 8.25, le $\varphi$-module $D$ admet une décomposition isotypique quitte à étendre $k$,

$$D = \bigoplus_{\mu \in \mathbf{Q}} D_\mu^{n_\mu}$$

où $D_\mu$ est un $\varphi$-module simple de pente $\mu \in \mathbf{Q}$. Dans toute la suite du texte, on suppose que l'on fait une telle extension de $k$ si nécessaire. En particulier, tous les sous-$\varphi$-modules de $D$ sont défini sur $K_0$.

Pour une extension finie totalement ramifiée $K/K_0$, on considère dans ce texte des filtrations sur l'espace vectoriel $D_K$ à un seul cran : formellement de la forme $D_K \supset F \supset \{0\}$. Une telle filtration sera confondue avec le sous-espace vectoriel $F \subset D_K$. La notion de filtration admissible pour $D$, donnée en partie 8.2.5 de [FO22], est ici celle d'un sous-espace vectoriel $F \subset D_K$ qui vérifie, pour tout sous-$\varphi$-module $N \subset D$,

$$\dim N_L \cap F \leq \sum_{\mu \in \mathbf{Q}} \mu d_\mu$$

où $d_\mu$ est la dimension de la composante de pente $\mu$ de $N$ et avec égalité pour $N = D$. Dans le cas où $D$ est issu d'une variété abélienne sur $k$ les pentes $\mu$ sont comprises entre 0 et 1 et le polygone de Newton associé à $D$ est symétrique par dualité. Autrement dit, lorsqu'une pente

$\mu$ apparaît dans la décomposition, la pente $1-\mu$ apparaît aussi avec même multiplicité. Une filtration admissible est alors un sous-espace vectoriel de dimension $g = 1/2 \dim D$ de $D_K$ vérifiant la condition précédente pour tout sous-$\varphi$-module strict de $D$. On note $\mathrm{MF}_K^{\varphi}$ la catégorie des $\varphi$-modules filtrés admissibles sur $K$.

Dans cette situation, le foncteur $K \mapsto \{F \subset D_K \mid F \text{ est une filtration admissible}\}$ est représentable par un ouvert analytique $\mathcal{F}^{\mathrm{adm}}$ au sens de Berkovic de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{2g,g}$ des sous-espaces de dimension $g$ de $D$ de complémentaire un compact, voir [DOR10] Proposition 8.2.1. Cette description n'est pas utile dans ce texte.

**2.2.2.** On considère maintenant la situation qui servira de point de départ à la construction de la partie 3. Soit $A_0$ une variété semi-abélienne sur un corps fini $k$ et polarisée au sens de la définition 2.2. Quitte à étendre le corps de base, on peut supposer que les tores en jeu sont déployés et que le $\varphi$-module issu de $A_0$ admet la décomposition isotypique

$$D = \bigoplus_{\mu \in \mathbf{Q}} D_{\mu}^{n_{\mu}}.$$

Précisément, $D$ s'obtient par le changement de base $M \otimes_{W(k)} K_0$ où $M$ est le module de Dieudonné du groupe $p$-divisible $A_0[p^{\infty}]$ et $K_0$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ de $k$. Par fonctorialité, avec les notations de la partie 2.1, le $\varphi$-module $D$ s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \to D_{T_0} \to D \to D_{B_0} \to 0.$$

La polarisation de $A_0$ donne un isomorphisme $\lambda$ de $D$ sur un $\varphi$-module $D^t$ qui induit un isomorphisme de $D_{B_0}$ sur son dual $D_{B_0}^{\vee}$. De plus, on considère un groupe $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda)$ qui induit une action linéaire de $G$ sur $D$ et $D^t$ compatible à $\lambda$. On obtient $p_2(G)$ comme groupe d'automorphismes de $D_{B_0}$ compatible à $\lambda_{B_0}$. Ce dernier morphisme correspond à la donnée d'une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur $D_{B_0}$ compatible à la dualité au sens des $\varphi$-modules.

On détaille la situation. Pour que la suite exacte définissant $A_0$ ainsi que sa duale se relèvent il faut que les morphismes $D_{T_0} \to D$ et $D \to D_{B_0}$ soient des morphismes de $\varphi$-modules filtrés. L'isocristal associé à un tore déployé de dimension $t$ est donné par $D_1^t$. La condition d'admissibilité donne qu'une filtration admissible sur un corps $K/K_0$ de celui-ci est un sous-espace vectoriel $F \subset D_{1K}^t$ de dimension $t$, autrement dit la condition est triviale. Du côté abélien, on veut ici que le morphisme $\lambda_{B_0}$ se relève en polarisation. Il doit donc induire un morphisme de $\varphi$-modules filtrés où l'on munit $D_{B_0}^{\vee}$ de la filtration duale, par définition, l'orthogonale au sens de la dualité de la filtration sur $D_{B_0}$. En identifiant $D_{B_0}$ et son dual par $\lambda_{B_0}$ cela revient à chercher une filtration admissible qui est un sous-espace lagrangien pour $\lambda_{B_0}$.

**2.2.3.** Il reste à expliciter la condition de donnée de descente associée au groupe $G$, motivée par le théorème 3.6. Soit $K$ une extension finie de $K_0$, l'existence d'extensions galoisiennes $L/K$ totalement ramifiées de groupe $G$, quitte à étendre $K_0$, se déduit par exemple du lemme 3.5 de [Phi22b] qui assure que la pro-$p$-extension maximale de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{un}}$ a pour groupe de Galois un pro-$p$-groupe libre de rang dénombrable. On fixe pour la suite une telle extension galoisienne $L/K$ où $K$ est l'extension $K_0(\mu_p)$, $\mu_p$ étant le groupe des racines $p$-èmes de l'unité. L'introduction de l'extension $K/K_0$ ne sera utile que lors de la démonstration du théorème 2.5 en fin de partie 2.

Le groupe fini $G$ agit alors naturellement de deux manières sur l'espace vectoriel $D_L$. La première action est linéaire et provient de l'inclusion $G \subset \operatorname{Aut}_\varphi D$. La deuxième se déduit de l'action galoisienne sur $L$ et se fait sur le deuxième facteur de $D_L = D \otimes_{K_0} L$. On notera la première action $\cdot_{\text{lin}}$ et la deuxième $\cdot_{\text{gal}}$. Ces deux actions commutent entre elles et on pourra considérer l'action diagonale donné par $h \otimes h^{-1}$ pour $h \in G$. Si l'inclusion $G \subset \operatorname{Aut}(A_0, \lambda)$ provient du groupe de monodromie finie d'une variété abélienne $A$ sur $K_0$ telle que la réduction de $A_L$ est $A_0$ alors elle provient de la donnée de descente canonique de $A_L$ comme le montre le théorème 3.6. Autrement dit, dans ce cas, le $\varphi$-module filtré associé à la représentation $p$-adique donnée par le module de Tate $\mathrm{T}_p A_L$ est équipé d'une donnée de descente qui induit l'injection $\iota \colon G \subset \operatorname{Aut}_\varphi D$. On va donc chercher des filtrations qui vérifient cette propriété. Précisément, si $F \subset D_L$ est une filtration alors le conjugué galoisien du $\varphi$-module filtré $(D, F)$ par un élément $h \in G$ est simplement $(D, h \cdot_{\text{gal}} F)$. Une donnée de descente pour $(D, F)$ correspond donc à une collection d'isomorphismes $(f_h)_{h \in G}$ de $\varphi$-modules filtrés avec $f_h \colon (D, F) \to (D, h \cdot_{\text{gal}} F)$ vérifiant la condition de cocycle habituelle $f_{gh} = g \cdot_{\text{gal}} f_h \circ f_g$ pour $g, h \in G$. Celle-ci redonne l'inclusion $\iota \colon G \subset \operatorname{Aut}_\varphi D$ par le foncteur d'oubli de la filtration, qui correspond au passage à la fibre spéciale au niveau des groupes $p$-divisibles, si et seulement si $f_h = \iota(h)$. La condition s'écrit donc comme une condition de stabilité de $F$ pour l'action diagonale de $G$ introduite précédemment, ou encore que l'orbite de $F$ pour les actions galoisiennes et linéaires de $G$ coïncident, ce qui s'écrit pour tout $h \in G$

$$h \cdot_{\text{gal}} F = h \cdot_{\text{lin}} F.$$

La condition de cocycle se vérifie alors facilement du fait que les morphismes de $\varphi$-modules filtrés commutent à l'action galoisienne. En effet, si $f \colon (D, F) \to (D, H)$ est un tel morphisme alors $h \cdot_{\text{gal}} f$ est simplement $f$ vu comme morphisme entre les $\varphi$-modules filtrés $(D, h \cdot_{\text{gal}} F)$ et $(D, h \cdot_{\text{gal}} H)$, ce qui est bien défini du fait que $f(h \cdot_{\text{gal}} F) = h \cdot_{\text{gal}} (f(F)) \subset h \cdot_{\text{gal}} H$ par définition.

**2.2.4.** Le reste de la partie 2 est dédié à l'étude de l'existence de filtrations admissibles dont les propriétés sont données au paragraphe précédent et résumées dans l'énoncé du théorème 2.5. Les sous-parties suivantes établissent les résultats préliminaires à la démonstration du théorème 2.5 et donnent différents critères pour l'existence de filtrations admissibles avec les propriétés voulues.

**Théorème 2.5.** *Soit $D$ le $\varphi$-module d'une variété semi-abélienne polarisée sur un corps fini $k$ de caractéristique $p$ et on suppose $D$ muni d'une action d'un groupe fini $G$ de ramification. Alors, il existe, quitte à faire une extension non ramifiée de $K_0$, une extension galoisienne totalement ramifiée $L/K$ de groupe $G$ avec $K$ une extension finie totalement ramifiée de $K_0$, telle que l'on peut trouver une filtration $F \subset D_L$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

*(1) $F/(F \cap D_{T_0})$ est lagrangien pour $\lambda_{B_0}$,*

*(2) $F$, $F \cap D_{T_0}$ et $F/F \cap D_{T_0}$ sont des filtrations admissibles,*

*(3) $F$ est stable sous l'action diagonale de $G$, autrement dit l'orbite de $F$ sous l'action linéaire de $G$ coïncide avec son orbite sous l'action galoisienne, ce qui s'écrit*

$$\forall h \in G,\ h \cdot_{\text{lin}} F = h \cdot_{\text{gal}} F.$$

Rappelons que l'on s'est fixé une extension finie $K$ de $K_0$ et une extension galoisienne de groupe $G$ au paragraphe 2.2.3 pour tout le reste de la partie 2 sauf quand une autre situation est précisée. Montrons tout d'abord que pour prouver le théorème il suffit de le faire pour dans le cas où $D$ est issue d'une variété abélienne.

**Proposition 2.6.** *Soit $D$ le $\varphi$-module d'une variété semi-abélienne polarisée sur un corps fini $k$ et muni d'une action d'un groupe fini $G$ de ramification. Soit $L/K$ une extension galoisienne totalement ramifiée. Alors il existe une filtration admissible sur $D$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3) si et seulement s'il existe une filtration admissible sur $D_{B_0}$ muni de l'action de la projection $p_2(G)$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).*

*Démonstration.* Pour le sens direct, soient $L/K_0$ une extension et $F \subset D_L$ une filtration vérifiant toutes les propriétés. Alors il suffit de considérer $F/D_{T_0}$ qui vérifie les mêmes propriétés pour $B_0$ et l'extension de $K_0$ de groupe $p_2(G)$.

Pour le sens réciproque, on remarque d'abord que si $L'/K_0$ est une extension galoisienne de groupe $p_2(G)$ alors quitte à faire une extension non ramifiée de $K_0$ on peut trouver $L/K_0$ de groupe $G$ telle que $L' \subset L$. Soit $F'$ une filtration de $D_{B_0} = D/D_{T_0}$ avec les propriétés (1), (2) et (3) pour l'action de $p_2(G)$. Il suffit de vérifier que le relevé $F = D_{T_0} \oplus F'$ convient. La propriété (1) pour $F$ portant sur $F'$ elle est vérifiée par hypothèse. Il en va de même pour la propriété d'admissibilité dans le quotient. La propriété (2) demande l'admissibilité de $F \cap D_{T_0}$ ce qui se traduit par l'inclusion $D_{T_0} \subset F$ et du fait que $D_{T_0}$ est isotypique de pente 1 la question de l'admissibilité de $F$ pour $D$ se fait par un calcul direct. Il ne reste donc qu'à vérifier la propriété (3). Cela se fait sans encombre du fait que $D_{T_0}$ est stabilisé par les actions linéaires et galoisiennes de $G$. Soit $h \in G$, l'égalité $h \cdot_{\text{lin}} F' = h \cdot_{\text{gal}} F'$ assure que

$$\begin{aligned} h \cdot_{\text{lin}} F &= h \cdot_{\text{lin}} (D_{T_0} \oplus F') \\ &= D_{T_0} \oplus h \cdot_{\text{lin}} F' \\ &= D_{T_0} \oplus h \cdot_{\text{gal}} F' \\ &= h \cdot_{\text{gal}} (D_{T_0} \oplus F') = h \cdot_{\text{gal}} F. \end{aligned}$$

□

Suivant ce résultat on va se restreindre dans toute la suite de cette partie au cas où $A_0$ est une variété abélienne munie d'une polarisation $\lambda_0$. La grassmannienne lagrangienne pour $\lambda_0$ est alors le fermé de $\mathrm{Gr}_{2g,g}$ dont les $K$-points sont les sous-espaces lagrangiens de $(D_K, \lambda_0)$.

**Remarque 2.7.** Dans le cas maximalement dégénéré, qui correspond à celui où $A_0$ est un tore déployé sur $k$, la condition d'admissibilité est triviale comme on l'a vu. Il est notable que la construction par déformation de la partie 3 se fasse ici directement et sans difficulté. Le groupe algébrique $A_0$ est un tore déployé sur $k$, donc $A_0 \simeq \mathbf{G}_m^n$, le relèvement du groupe $G$ en $K$-automorphismes d'une variété semi-abélienne en caractéristique 0 se fait simplement en considérant $\mathbf{G}_m^n$ comme schéma en groupes sur $\mathcal{O}_K$ avec l'inclusion $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) = \mathrm{Aut}\, \mathbf{G}_m^n$ qui relève l'inclusion donnée sur la fibre spéciale. La donnée de descente voulue est alors celle donnée par l'inclusion $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq G \subset \mathrm{Aut}_L \mathbf{G}_m^n$ qui est en particulier un cocycle.

**2.2.5.** On termine par l'étude des filtrations qui vérifient les propriétés (1) et (3). On aura besoin pour cela d'un lemme classique d'existence de bases invariantes par une action galoisienne semi-linéaire sur des espaces vectoriels, à comparer avec le lemme II.5.8.1 de [Sil09].

**Lemme 2.8.** *Soit $E$ un $L$-espace vectoriel muni d'une action linéaire d'un groupe fini $G$. Soit $L/K$ une sous-extension galoisienne de groupe $G$. On dispose d'une action galoisienne de $G$ sur les scalaires de $E$ qui commute à l'action linéaire de $G$. Alors l'espace $E^G$ des éléments de $E$ fixés* *par l'action semi-linéaire de $G$ sur $E$ déduite des deux précédentes est un $K$-espace vectoriel et il vérifie $E_L^G \otimes_K L = E_L$. En particulier, c'est un $K$-espace vectoriel de même dimension que $E$.*

*Démonstration.* Soient $(\alpha_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une base de $L/K$ et $v \in E$. On montre que $v$ s'obtient comme combinaisons linéaires à coefficients dans $L$ de vecteurs de $E^G$. On note $v_i$, pour $1 \leq i \leq n$ le vecteur ligne de la matrice produit $[g(\alpha_i)]_{i,g\in G\times\{1,\dots,n\}}[g \cdot v]^{\mathrm{T}}{}_{g\in G}$. Par définition le vecteur

$$v_i = \sum_{g\in G} g(\alpha_i) g \cdot v$$

est invariant par $g$ pour tout $i$. La famille $(v_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est dans $E_L^G$ et, du fait que la matrice $[g(\alpha_i)]_{i,g\in G\times\{1,\dots,n\}}$ est inversible, elle engendre les vecteurs $g \cdot v$ sur $L$. □

**Proposition 2.9.** *Une filtration $F \subset D_L$ induit une donnée de descente si et seulement si $F = F^G \otimes_K L$ avec $F^G \subset D_L^G$ sous-$K$-espace vectoriel de dimension $g$. En particulier, les telles filtrations de $D_L$ sont données par les points $K$-rationnels de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_g(D_L^G)$.*
*De plus, la correspondance analogue pour les filtrations lagrangiennes pour $\lambda_0$ a lieu.*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.8, une filtration $F \subset D_L$ qui induit une donnée de descente, c'est-à-dire qui est stabilisé par l'action diagonale de $G$, admet une base de vecteurs invariants par $G$ ce qui donne l'équivalence annoncée.
Toujours d'après le lemme 2.8 $D_L^G$ est un $K$-espace vectoriel de dimension $2g$. Les sous-espaces vectoriels de dimension $g$ de ce dernier sont donc donnés par les $K$-points de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{2g,g}$.
Pour en déduire l'assertion sur les filtrations lagrangiennes il suffit de vérifier que $\lambda_{0|D_L^G}$ définit une forme bilinéaire alternée non dégénérée et que $\lambda_0 = \lambda_{0|D_L^G} \otimes_K L$. La première assertion vient de ce que $\lambda_0$ est défini sur $K_0$ et que l'action linéaire de $G$ se fait par automorphismes symplectiques pour $\lambda_0$. La deuxième en suit directement. □

On va donner ici un critère pour qu'un sous-espace de la grassmannienne lagrangienne LGr contienne des filtrations vérifiant la propriété 3. Celui-ci sera utile pour certains cas particuliers où l'on vérifie la validité du théorème 2.5 dans les parties suivantes.

**Proposition 2.10.** *Tout ouvert de Zariski de* $\mathrm{LGr}_{2g,g}$ *contient une filtration vérifiant la propriété (3) de stabilité par l'action diagonale.*

*Démonstration.* L'isomorphisme $D_L^G \otimes_{K_0} L \simeq D_L$ donne un isomorphisme de variétés algébrique $\alpha\colon \mathrm{Gr}_{2g,g\,L} \simeq \mathrm{Gr}_g(D_L^G)_L$. Soit alors $U \subset \mathrm{Gr}_{2g,g}$ un ouvert de Zariski. D'après la proposition 2.9 un point $x \in U(L)$ vérifie la propriété (3) si et seulement s'il est l'image d'un point $K_0$-rationnel de $\mathrm{Gr}_g(D_L^G)$ par l'isomorphisme $\alpha$. Comme la grassmannienne lagrangienne admet un recouvrement affine par des ouverts isomorphes à $\mathbf{A}_{K_0}^{\frac{g(g+1)}{2}}$ les points $K_0$-rationnels sont algébriquement denses. En particulier un tel point existe. □

On déduit de ces considérations un premier critère, qui ne sera pas toujours satisfait, d'existence de filtrations vérifiant les trois propriétés.

**Corollaire 2.11.** *S'il existe un ouvert de Zariski $U$ de* $\mathrm{LGr}_{\lambda_0}$ *tel que $U(L) \subset \mathcal{F}^{\mathrm{adm}}(L)$ pour une extension $L/K$ totalement ramifiée de groupe $G$ alors il existe une filtration vérifiant les propriétés (1), (2) et (3) avec l'extension $L/K$.*

### 2.3. Vérification de l'existence de filtrations admissibles avec les propriétés (1), (2) et (3) dans le cas supersingulier

**2.3.1.** On reprend la situation décrite en partie 2.2. On suppose de plus que $A_0$ est une variété abélienne supersingulière au sens suivant.

**Définition 2.12.** On dit qu'une variété abélienne sur un corps fini $k$ de caractéristique $p$ est supersingulière si son isocristal associé $D$ est isotypique de pente $1/2$. De la même façon, on dit qu'un $\varphi$-module $D$ est supersingulier s'il est isotypique de pente $1/2$.

La condition d'admissibilité sur $D$, l'isocristal issu de $A_0$, s'exprime ici de façon simple du fait que $D$ est isotypique de pente $1/2$. Pour un sous-$\varphi$-module $N \subset D$ la condition s'écrit $\dim F \cap N_L \leq 1/2 \dim N$. On montre dans un premier temps que l'espace analytique $\mathcal{F}^{\mathrm{adm}} \subset \mathrm{Gr}_{2g,g}$ contient beaucoup de points fermés ce qui ne sera néanmoins pas utilisé en vue de l'étude de la validité de la conclusion du théorème 2.5.

**Lemme 2.13.** *Soit $L/K_0$ une extension finie totalement ramifiée telle que $L/\mathbf{Q}_p$ est galoisienne. Soient $\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}_p)$ un relèvement de $\sigma$ à $L$ et $\varphi_\tau \colon D_L^g \to D_L^g$ l'extension $\tau$-semi-linéaire de $\varphi$ à $D_L^g$. Un sous-espace $F \subset D_L^g$ de dimension $g$ tel que $F \cap \varphi_\tau(F) = \{0\}$ définit une filtration admissible. De plus, l'ensemble des tels sous-espaces est déterminé par les $L$-points d'un ouvert de Zariski de la restriction de Weil de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{2g,g}$.*

*Démonstration.* Soit $N \subset D^g$ un sous-$\varphi$-module. Comme $N_L$ est stable par $\varphi_\tau$ qui est inversible, on a $\varphi_\tau(F) \cap N_L = \varphi_\tau(F) \cap \varphi_\tau(N_L) = \varphi_\tau(F \cap N_L) \subset N_L$. Il suit $\dim \varphi_\tau(F \cap N_L) = \dim F \cap N_L$ et on obtient

$$\dim F \cap N_L \leq \frac{1}{2} \dim N_L$$

du fait que $F \cap N_L$ et $\varphi_\tau(F) \cap N_L$ sont en somme directe et de même dimension dans $N_L$.

Pour la deuxième assertion, on remarque que la condition $F \cap \varphi_\tau(F) = \{0\}$ s'écrit sur les ouverts affines de $\mathrm{Gr}_{2g,g}$ comme la non-annulation d'un déterminant non nul et, par restriction de Weil, les équations obtenues sont algébriques. □

**Corollaire 2.14.** *Soit $L/K_0$ une extension finie totalement ramifiée. Le sous-espace de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{2g,g}(L)$ des $L$-filtrations admissibles contient les $L$-points d'un ouvert dense.*

*Démonstration.* La restriction de Weil induit un isomorphisme entre les espaces topologiques $\mathrm{Gr}_{2g,g}(L)$ et $\mathrm{Res}_{L/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Gr}_{2g,g})(\mathbf{Q}_p)$. D'après le lemme 2.13 il existe un ouvert de Zariski $U \subset \mathrm{Res}_{L/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Gr}_{2g,g})$ dont les $\mathbf{Q}_p$-points, qui forment un ouvert dense, correspondent à des filtrations admissibles. □

Du fait que $\varphi$ est, à sa semi-linéarité près, orthogonal pour $\lambda_0$ le résultat vaut encore pour la grassmannienne lagrangienne. Celui-ci ne permet toutefois pas de montrer l'existence de filtrations vérifiant les trois propriétés voulues et ne sera pas utile dans la suite.

**2.3.2.** On considère à nouveau la donnée d'un groupe fini $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$ ainsi que d'une extension galoisienne $L/K_0$ totalement ramifiée de groupe $G$.

**Théorème 2.15.** *Soit $D$ un $\varphi$-module supersingulier muni d'une forme bilinéaire alternée $(\lambda_0)$ sur une extension finie $K_0/\mathbf{Q}_p$ non ramifiée. Soit $G$ un groupe fini qui agit sur le $K_0$-espace vectoriel $D$. S'il existe un élément $h \in G$ tel que la condition $\dim h(F) \cap F \leq 1$ définit un ouvert de Zariski non vide de la grassmannienne lagrangienne alors il existe une filtration sur $D$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).*

*Démonstration.* La condition d'admissibilité pour une filtration $F \subset D_L$ s'écrit comme avant $\dim F \cap N_L \leq \frac{1}{2} \dim N_L$ pour tout sous-$\varphi$-module $N \subset D$.

Soit $h \in G$ tel que la condition $\dim F \cap h(F) \leq 1$ détermine un ouvert de Zariski non vide $U$ de la grassmannienne lagrangienne $\mathrm{LGr}_{\lambda_0}$ (un tel $h$ existe par hypothèse). Par le corollaire 2.11 il existe une filtration $F \in U(L)$ telle que les orbites induites par les actions galoisiennes et linéaires de $G$ sur $F$ coïncident. On a en particulier l'égalité

$$h \cdot_{\mathrm{lin}} F = h \cdot_{\mathrm{gal}} F.$$

Montrons que $F$ est admissible. Soit $N \subset D$ un sous-$\varphi$-module. Comme $N$ est défini sur $K_0$ il est stable par l'action galoisienne de $h$. On en déduit $h \cdot_{\mathrm{gal}} (F \cap N_L) \subset N_L$ et par hypothèse $\dim h \cdot_{\mathrm{gal}} (F \cap N_L)) \cap (F \cap N_L) \leq 1$. Comme on a de plus $\dim h \cdot_{\mathrm{gal}} (F \cap N_L)) = \dim(F \cap N_L)$, on obtient

$$2 \dim F \cap N_L - \dim h \cdot_{\mathrm{gal}} (F \cap N_L)) \cap (F \cap N_L) \leq \dim N$$

et par parité de la dimension de $N$, $\dim F \cap N_L \leq \frac{1}{2} \dim N$.

□

**Exemple 2.16.** On donne ici une famille d'exemples où la condition du théorème 2.15 est vérifiée. On considère $A_0 = E^g$ où $E\colon y^2 = x^3 - x$ est une courbe elliptique supersingulière sur $\mathbf{F}_4$ et $g$ un entier naturel non nul. On a

$$\mathrm{End}\, E \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{H}$$

où $\mathbf{H}$ est l'algèbre des quaternions classique, de base $(i, j, k)$ avec $i^2 = j^2 = -1$ et $ij = -ji = k$. L'algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}\, A_0 \otimes \mathbf{Q}$ est alors $\mathrm{M}_g(\mathbf{H})$ l'algèbre des matrices $g \times g$ à coefficient dans $\mathbf{H}$. En considérant le sous-groupe de $\mathrm{M}_g(\mathbf{H})$ des matrices de permutation à coefficients dans le groupe $Q_8 \subset \mathbf{H}$ on obtient une réalisation matricielle du produit en couronne $Q_8 \wr \mathfrak{S}_g$ dans l'algèbre des endomorphismes de $A_0$. La 2-partie du cardinal de ce groupe est donnée par $r(2g, 2)$.

On note $G_g$ un 2-Sylow de ce groupe et on montre que l'hypothèse du théorème 2.15 est vérifiée. Il faut d'abord voir que $G_g$ est compatible à la polarisation produit issue de $E$, cela se fait sans encombre. On note par ailleurs que cette polarisation est principale, ce qui sera utile plus tard. On vérifie ensuite l'existence d'un élément $h \in G$ vérifiant la condition du théorème 2.15. Pour ce dernier point, on considère l'élément $h$ donné par la matrice diagonale ayant l'élément $k \in Q_8$ sur ses coefficients diagonaux. Pour $g = 1$ cela revient à prendre $h = k \in Q_8$. La condition du théorème 2.15 se vérifie en considérant $h$ comme un élément de $\mathrm{M}_{2g}(\mathbf{Q}_4)$ avec son action linéaire sur $\mathbf{Q}_4^{2g}$. On peut par ailleurs passer à $\overline{\mathbf{Q}_4}$ pour vérifier que la condition donne un ouvert non vide pour la topologie de Zariski. Pour $g = 1$, la matrice $2 \times 2$ de $h$ est diagonalisable avec 2 valeurs propres distinctes, notons les $\alpha$ et $\beta$. Sur un ouvert affine de la grassmannienne, la condition s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} x & \alpha x \\ y & \beta y \end{vmatrix} \neq 0$$

qui donne bien un ouvert non vide $U$. Pour passer à la grassmannienne lagrangienne on utilise le lemme 2.17 ci-après en remarquant que $U$ s'obtient comme l'intersection des ouverts déterminés par $F \cap M = \{0\}$ pour $M$ chacune des droites propres de $h$. On vérifie de la même façon que l'ouvert correspondant est non vide pour $g \geq 1$ en utilisant le fait que la polarisation considérée et la polarisation produit.

On termine par des lemmes qui donnent des critères pour vérifier l'hypothèse du théorème 2.15.

**Lemme 2.17.** *Soit $(V, \lambda)$ un espace symplectique. Alors si $M \subset V$ est un sous-espace de dimension plus petite que $1/2 \dim V$ alors il existe un sous-espace $F \subset V$ lagrangien pour $\lambda$ et vérifiant $F \cap M = \{0\}$.*

*Démonstration.* Quitte à faire un choix de base adaptée on peut supposer que la matrice de $\lambda$ est celle de la forme symplectique standard. Alors, le résultat se déduit facilement de la description affine des grassmanniennes. □

Bien que le critère précédent est utile dans différents cas, comme l'exemple 2.16 ou le cas de pentes différentes de 1/2 de la partie suivante, on a besoin d'un autre critère pour vérifier la condition du théorème 2.15 en général.

**Lemme 2.18.** *Soit $(V, \lambda)$ un espace symplectique sur $K$ de dimension $2g$ et $h \in \mathrm{Sp}(\lambda)$ un automorphisme symplectique diagonalisable dont tous les sous-espaces propres sont de dimensions au plus $1/2g$. Alors il existe un lagrangien $F$ tel que $\dim F \cap h(F) \leq 1$.*

*Démonstration.* Tout d'abord, du fait que la grassmannienne lagrangienne est rationnelle, il suffit de démontrer l'existence d'un tel $F$ dans $V_{\overline{K}}$.

Il existe une base symplectique $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq g}$ de $V_{\overline{K}}$ telle que $h$ est diagonalisable et qui donne une décomposition de l'espace en somme orthogonale stable par $h$

$$V_{\overline{K}} = \bigoplus_{i=1}^{g} V(x_i, y_i)$$

où $V(x_i, y_i)$ est un espace symplectique de dimension 2 standard, c'est-à-dire qui vérifie $\lambda(x_i, x_i) = 0$, $\lambda(x_i, y_i) = 1$ et $\lambda(y_i, y_i) = 0$. On va construire $F$ comme somme directe orthogonale de lagrangiens de sous-espaces symplectiques stables par $h$ de la forme $V(x_i, y_i)$ ou $V(x_i, y_i) \oplus V(x_j, y_j)$ avec $i \neq j$.

Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres de $h$ classées par multiplicité décroissante. On montre d'abord que, si $g \geq 4$ alors il existe un sous-espace symplectique $E \subset V_{\overline{K}}$ de la forme annoncé ainsi qu'un lagrangien $F \subset E$ qui vérifie $h(F) \cap F = \{0\}$ de manière à ce que $E^{\perp}$ et $h_{|E^{\perp}}$ vérifient encore les hypothèses de l'énoncé.

Tout d'abord, comme les $x_i$ et $y_i$ sont des vecteurs propres de $h$ on peut noter $V(x_i, y_i) = V(\mu_k, \mu_l)$ pour deux valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\mu_k$ et $\mu_l$ de $h$ pour signifier que $h(x_i) = \mu_k x_i$ et $h(y_i) = \mu_k y_i$. On va maintenant montrer que l'on peut toujours choisir le couple $(E, F)$ de l'une des deux formes suivantes

— $E = V(\mu_1, \mu_l)$ avec $\mu_1 \neq \mu_l$ et $F$ est donné par le lemme 2.17 ;

— $E = V(\mu_1, \mu_1) \oplus V(\mu_l, \mu_m) = V(x_i, y_i) \oplus V(x_j, y_j)$ avec $\mu_1 \neq \mu_l$ et $\mu_1 \neq \mu_m$ et $F$ est le lagrangien engendré par $x_i + x_j$ et $y_i - y_j$. Dans ce cas, il est clair que $F$ est lagrangien et il faut vérifier que $h(F) \cap F = \{0\}$. Un élément de cette intersection vérifie l'égalité

$$ax_i + ax_j + by_i - by_j = c\mu_1 x_i + c\mu_l x_j + d\mu_1 y_i - d\mu_m y_j$$

pour $a, b, c, d \in \overline{K}$. On en déduit directement $a = b = c = d = 0$ du fait que $\mu_1 \neq \mu_l$ et $\mu_1 \neq \mu_m$.

On procède par cas, suivant la multiplicité des valeurs propres de $h$. Si $h$ n'admet que 2 valeurs propres (toutes deux de multiplicité $g$) ou si toutes les multiplicités des valeurs propres de $h$, sauf au plus une, sont plus petites que $g - 2$ alors tout choix de $E$ d'une des deux formes convient et nécessairement au moins l'une des deux existe. Il faut donc traiter les cas où $h$ a une unique valeur propre de multiplicité $g$, une de multiplicité $g-1$ et une de multiplicité 1 et où $h$ admet au moins deux valeurs propres de multiplicité $g-1$.

Dans le premier cas, la valeur propre de multiplicité 1, $\mu_3$ apparaît dans un $V(x_i, y_i)$ de la forme $V(\mu_k, \mu_3)$. Si $k=1$ alors ce choix pour $E$ convient. Si $k=2$ alors il existe nécessairement un $V(x_i, y_i)$ de la forme $V(\mu_1, \mu_1)$ et $E = V(\mu_1, \mu_1) \oplus V(\mu_2, \mu_3)$ convient. Dans le deuxième cas, comme il n'y a pas de valeurs propres de multiplicité $g$, s'il existe sous-espace de la première forme il convient. S'il n'en existe pas, on peut considérer $E$ de la forme $V(\mu_1, \mu_1) \oplus V(\mu_2, \mu_2)$. Si celui-ci ne convient pas, c'est que la valeur propre $\mu_3$ est de multiplicité $g-1$, donc que $g$ vérifie l'inégalité $2g \geq 3(g-1)$ et par suite $g=3$.

Par une récurrence immédiate on est donc ramené à traiter les cas $g \leq 3$. Si $g=1$ ou $g=2$ en utilisant à nouveau la construction précédente on voit qu'il existe $F$ lagrangien qui vérifie $F \cap h(F) = \{0\}$. Si $g=3$, le seul cas restant est celui où $h$ admet trois valeurs propres de multiplicité 2. Dans ce cas, on obtient $F$ comme somme orthogonale de $F_1$ sur $V(\mu_1, \mu_1) \oplus V(\mu_2, \mu_2)$ construit comme précédemment et de n'importe quel lagrangien $F_2$ de $V(\mu_3, \mu_3)$. La somme orthogonale $F_1 \oplus F_2$ est lagrangienne et vérifie $\dim F \cap h(F) \leq 1$ par construction.

Dans tous les cas, on a construit $F$ qui vérifie les hypothèses de l'énoncé.

□

### 2.4. Les propriétés (1), (2) et (3) pour les isocristaux de variétés abéliennes de pentes différentes de 1/2

**2.4.1.** On conserve à nouveau les notations de la partie 2.2 en supposant ici que $D$ n'admet pas de composante isotypique de pente 1/2. On va étudier les lagrangiens issues de la décomposition en composantes isotypiques. Comme précédemment on a l'écriture

$$D = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}} D_\mu^{n_\mu}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pentes de $D$. Par hypothèse, 1/2 n'est pas une pente de $D$ et on peut donc coupler les pentes de $\mathcal{P}$ par paire $(\mu, 1-\mu)$. On considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ adapté à cette décomposition de $D$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale associée sur $D^\vee \simeq D$. Par la dualité pour les $\varphi$-modules, si $(e_j, \ldots, e_k)$ est une base de la composante $D_\mu^{n_\mu}$ alors $(e_j^*, \ldots, e_k^*)$ est une base de $D_{1-\mu}^{n_{1-\mu}}$ comme sous-espace de $D^\vee$. Par ailleurs, l'isomorphisme $\lambda_0 \colon D \to D^\vee$ induit des isomorphismes composante par composante, *i.e.* $\lambda_0(D_\mu^{n_\mu}) = D_\mu^{n_\mu} \subset D^\vee$ et en particulier $\lambda_0(D_\mu^{n_\mu}) \subset D_\mu^{n_\mu \perp}$. On va considérer les parties $I \subset \mathcal{P}$ de cardinal $1/2 \operatorname{Card} \mathcal{P}$ contenant, pour chaque paire de pentes échangées par la dualité $(\mu, 1-\mu)$, l'une des deux mais pas l'autre et les sous-modules $D_I = \bigoplus_{\mu \in I} D_\mu^{n_\mu}$. On note $\mathcal{P}_{1/2}$ l'ensemble des parties $I \subset \mathcal{P}$ ayant cette propriété. D'après ce qui précède les sous-$\varphi$-modules $D_I$ ainsi obtenus sont lagrangiens pour $\lambda_0$.

On va montrer que dans cette situation l'espace des filtrations admissibles contient un ouvert de Zariski. Une version à 2 pentes, qui suffit pour la démonstration du théorème 2.5, est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 2.19.** *Si $\mathcal{P} = \{\mu, 1-\mu\}$ avec $\mu \neq 1/2$ alors une filtration $F \subset D_L$ qui vérifie $F \cap D_\mu^{n_\mu} = \{0\}$ et $F \cap D_{1-\mu}^{n_{1-\mu}} = \{0\}$ est admissible. En particulier, l'espace des filtrations admissibles contient un ouvert de Zariski d'intersection non vide avec la grassmannienne lagrangienne.*

*Démonstration.* Dans ce cas, tout sous-$\varphi$-module $N$ de $D$ admet une décomposition $N_\mu \oplus N_{1-\mu}$ avec $N_\mu \subset D_\mu$ et $N_{1-\mu} \subset D_{1-\mu}$. La condition d'admissibilité pour une filtration $F \subset D_L$ s'écrit ici

$$\dim F \cap N_\mu \leq \mu \dim N_\mu + (1-\mu) \dim N_{1-\mu}.$$

Soit $N \subset D$ un sous-$\varphi$-module. Alors, l'hypothèse sur $F$ assure que l'on a

$$\dim F \cap N \leq \min(\dim N_\mu, \dim N_{1-\mu})$$

et donc l'admissibilité de $F$.

On utilise alors le lemme 2.17 pour conclure. L'ensemble des filtrations considérées est donné par l'intersection de deux ouverts de Zariski non vide de la grassmannienne lagrangienne. □

**Théorème 2.20.** *La conclusion du théorème 2.5 est vérifiée pour un $\varphi$-module $D$ qui admet une décomposition isotypique sans composante de pente* $1/2$. *En particulier, elle est vérifiée lorsque $A_0$ est une variété abélienne ordinaire.*

*Démonstration.* On considère les sous-$\varphi$-modules $D_I$ pour $I \in \mathcal{P}_{1/2}$ ainsi que les ouverts non vide $U_I \subset \mathrm{LGr}(\lambda_0)$ des lagrangiens $F$ tels que $F \cap D_I = \{0\}$, qui existent d'après le lemme 2.17. L'intersection $U$ des $U_I$ est donc un ouvert non vide de la grassmannienne lagrangienne du fait de son irréductibilité. On montre que les filtrations de $U$ sont admissibles. Soient $K/K_0$ une extension finie et $F \in U(K)$. Alors, par définition $F$ est un sous-espace lagrangien qui vérifie $F \cap D_I = \{0\}$ pour tout $I \in \mathcal{P}_{1/2}$. Soit $N \subset D$ un sous-$\varphi$-module. On note $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{P}$ les pentes de $N$ et $d_1, \ldots, d_n$ les dimensions des composantes isotypiques de $N$ correspondantes. Quitte à renuméroter on peut supposer que $\mu_1, \ldots, \mu_j$ sont les pentes de $N$ telles que $1-\mu_i$ n'est pas une pente de $N$ pour $1 \leq i \leq j$, de plus, on peut alors écrire $n = j + 2r$ et supposer que $\mu_{j+r} = 1 - \mu_{j+k+r}$ pour $1 \leq k \leq r$. On choisit alors $I \in \mathcal{P}_{1/2}$ tel que $\mu_i \in I$ pour $1 \leq i \leq j$ et tel que pour chaque couple $(\mu_{j+k}, \mu_{j+k+r})$ avec $1 \leq k \leq r$ on ait dans $I$ la pente dont la composante isotypique de $N$ correspondante est de dimension maximale parmi les deux. On en déduit l'inégalité

$$\dim F \cap N_K \leq \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{j} d_i - \sum_{k=1}^{r} \max(d_{j+k}, d_{j+k+r}) = \sum_{k=1}^{r} \min(d_{j+k}, d_{j+k+r}).$$

Il en découle que $F$ vérifie la condition d'admissibilité pour $N$ d'après l'inégalité

$$\min(d_{j+k}, d_{j+k+r}) \leq \mu_{j+k} d_{j+k} + \mu_{j+k+r} d_{j+k+r}.$$

Maintenant, quitte à grossir $K_0$ il existe une extension galoisienne $L/K_0$ totalement ramifiée de groupe $G$, par exemple d'après le paragraphe 2.2.3. On peut donc appliquer le corollaire 2.11. □

### 2.5. Le cas des surfaces semi-abéliennes

**2.5.1.** Avant de passer à la démonstration du théorème 2.5 on s'intéresse au cas particulier des surfaces. L'existence de filtrations vérifiant les trois propriétés se déduit de façon élémentaire dans ce cadre et permet de généraliser les constructions connues pour les surfaces abéliennes. Soit $A_0$ une surface semi-abélienne sur un corps fini $k$. On reprend à nouveau les notations du paragraphe 2.2 et on note $t$ et $a$ les rangs toriques et abéliens de $A_0$.

**Théorème 2.21.** *La conclusion du théorème 2.5 est vérifiée lorsque $A_0$ est une surface semi-abélienne.*

*Démonstration.* On établit le théorème par une disjonction de cas sur la structure possible de $D$. On considère tout d'abord la situation où $A_0$ est une surface abélienne, c'est-à-dire $a = 2$. Il y a alors trois possibilités pour $D$.

(1) La variété $A_0$ est supersingulière, dans ce cas $D = D^2_{\frac{1}{2}}$. Un calcul direct donne que $\mathcal{F}^{\mathrm{adm}}(\overline{\mathbf{Q}_p})$ contient le complémentaire des $\mathbf{Q}_p^2$-points. Il suit que l'on peut en fait appliquer ici le corollaire 2.11 directement pour tout $L$ convenable.

(2) La variété $A_0$ est ordinaire, dans ce cas $D \simeq D_0^2 \oplus D_1^2$ et la conclusion se déduit du théorème 2.20.

(3) Le $\varphi$-module $D$ admet comme décomposition $D = D_0 \oplus D_{1/2} \oplus D_1$. On remarque que $D$ n'admet qu'un nombre fini de sous-$\varphi$ modules ce qui assure que $\mathcal{F}^{\mathrm{adm}}$ est un ouvert de Zariski comme intersection finie des ouverts donnés par la condition d'admissibilité pour chaque sous-$\varphi$-module. Le corollaire 2.11 conclut à nouveau.

Les cas où $t \geq 1$ découlent directement de la proposition 2.6 et du cas (3) qui s'applique directement aux $\varphi$-modules de courbes elliptiques.

□

**Remarque 2.22.** On peut remarquer que l'argument donné dans le cas où $D$ se décompose en somme directe de modules simples est valable en toutes dimensions.

### 2.6. L'existence de filtrations vérifiant les propriétés (1), (2) et (3) en toute généralité

**2.6.1.** Le but de cette partie est de montrer que, quitte à faire des extensions finies bien choisies, il existe toujours des filtrations vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). D'après la proposition 2.6 il suffit de traiter le cas où $A_0$ est une variété abélienne. On commence par quelques lemmes préliminaires qui permettent de montrer d'une part que l'hypothèse du théorème 2.15 est toujours vérifiée lorsque l'action de $G$ admet une décomposition en composantes isotypiques qui sont toutes conjuguées par l'action galoisienne de $\sigma$ et d'autre part que l'on peut réduire le problème suivant une décomposition orthogonale pour $\lambda_0$, $G$-stable et $\varphi$-stable.

**Lemme 2.23.** *Soient $K$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $G$ un groupe fini, $(V, \rho)$ une $K$-représentation irréductible de $G$ de dimension $d \geq 2$. Alors il existe $h \in G$ tel que les sous-espaces propre $\rho(h)$ sont de dimension plus petite que $d/2$.*

*Démonstration.* On peut supposer $K = \mathbf{C}$. Soit $\chi$ le caractère de $\rho$, par irréductibilité on a
$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \operatorname{Card} G.$$
Comme $\chi(e) = \dim V \geq 2$, il existe $g \in G$ avec $|\chi(g)| < 1$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\rho(g)$ et $E_{\lambda_1}, \ldots E_{\lambda_n}$ les sous-espaces propres associées. Du fait que $\rho(g)$ est diagonalisable on a
$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} \lambda_i.$$
Comme les $(\lambda_i)_{i \in \{1, \ldots n\}}$ sont des racines de l'unité, par inégalité triangulaire on a
$$\dim E_{\lambda_i} \leq |\chi(g)| + \sum_{j \neq i} \dim E_{\lambda_j}.$$
On en déduit l'inégalité voulue du fait que $\sum_{j \neq i} \dim E_{\lambda_j} = \dim V - \dim E_{\lambda_i}$. □

**Définition 2.24.** Soit $L/K$ une extension galoisienne de corps. Deux représentations $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ sur $L$ sont dites conjuguées sur $K$ s'il existe des bases de $V$ et $W$ et un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{GL}(V) \arrow[r] & \mathrm{GL}_n(L) \arrow[dd, "\sigma"] \\
G \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & & \\
& \mathrm{GL}(W) \arrow[r] & \mathrm{GL}_n(L)
\end{tikzcd}$$

Si $(V,\rho)$ est une représentation de $G$ sur $L$ on note ${}^{\sigma}V$ la représentation $(V, {}^{\sigma}\rho)$ où ${}^{\sigma}\rho$ est déduit de $\rho$ par choix d'une base et l'application de $\sigma$ sur les coefficients matriciels. On a les deux propriétés suivantes.

(1) La classe d'isomorphisme de ${}^{\sigma}V$ ne dépend pas du choix de la base.

(2) Si $W$ est une représentation de $G$ sur $L$ conjuguée à $V$ alors il existe un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tel que $W \simeq {}^{\sigma}V$.

On commence par deux lemmes qui traitent de la compatibilité des actions du groupe fini $G$ et de $\varphi$ pour les $\varphi$-modules données en partie 2.2.

**Lemme 2.25.** *Soient $D$ un $\varphi$-module muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée $\lambda_0$ et d'une action d'un groupe fini $G$ et $V \subset D$ un sous-espace vectoriel. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

*(1) Si $V$ est $\varphi$-stable (respectivement $G$-stable) alors $V^{\perp}$ est $\varphi$-stable (respectivement $G$-stable).*

*(2) Si $V$ est $G$-stable alors $\varphi(V)$ est $G$-stable et est conjugué à $V$ par $\sigma$. De plus, $\varphi(V)$ est isomorphe à ${}^{\sigma}V$.*

*(3) Si $V = V_1^n$ est une composante isotypique de $D$ pour l'action de $G$ associé à la représentation $V_1$ alors $A = \bigoplus_{i=1}^{r-1} {}^{\sigma^i}V_1{}^n$ est le plus petit sous-$\varphi$-module de $D$ contenant $V$, avec $r$ le plus petit entier $d$ tel que ${}^{\sigma^d}V_1 \simeq V_1$.*

*Démonstration.* Les assertions sur la stabilité s'obtiennent par un calcul direct. Pour (2), notons d'abord que par choix d'une base $\mathcal{B}$ de $D$ formée de vecteurs invariants par $\sigma$ l'action de $\sigma$ sur les endomorphismes ainsi que sur les sous-espaces vectoriels de $D$ se calcule matriciellement, par son action sur les coefficients. Dans une telle base un vecteur $x \in D$, représenté par $X$, a son image $\varphi(x)$ représenté par $M_\varphi \sigma(X)$ où $M_\varphi$ est une matrice carrée inversible donnée par l'action de $\varphi$ sur $\mathcal{B}$. De la même façon, on note $M_g$ la matrice de l'action d'un élément $g \in G$ dans cette base. On dispose par ailleurs d'un action naturelle de $G$ sur $\sigma(V)$, déduite de l'action sur $V$, donnée matriciellement par $\sigma(M_g)X$ pour un $x \in \sigma(V)$.

On vérifie alors que $\sigma(V)$ munie de cette action est conjuguée à $V$. On considère une base $(x_1, \dots, x_n)$ de $V$. Alors la matrice de $\rho_{|V}(g)$ dans cette base est donnée par les égalités

$$M_g X_i = \sum_{i=1}^{n} g_{ji} X_j.$$

La famille $(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))$ est une base de $\sigma(V)$ dans laquelle la matrice de $\rho_{\sigma(V)}(g)$ est donnée par les égalités

$$\sigma(M_g)\sigma(X_i)=\sigma(M_gX_i)=\sum_{i=1}^{n}\sigma(g_{ji}X_j)=\sum_{i=1}^{n}\sigma(g_{ji})\sigma(X_j)$$

ce qui assure que $\sigma(V)$ est conjugué à $V$ par $\sigma$. Maintenant, pour $x\in V$ la compatibilité entre les actions de $G$ et $\varphi$ s'écrit pour $g\in G$ par

$$M_\varphi\sigma(M_g)\sigma(X)=M_gM_\varphi\sigma(X).$$

Il suit que $M_\varphi$ est un isomorphisme entre les représentations associés à $\varphi(V)$ avec l'action induite par celle de $\rho$ et l'action $\rho_{\sigma(V)}$ sur $\sigma(V)$, ce qui conclut pour (2).

Le dernier point se déduit du deuxième. Par (2), $\varphi$ induit une permutation sur les composantes isotypiques associées aux représentations irréductibles $V_1, {}^{\sigma}V_1,\dots {}^{\sigma^{r-1}}V_1$. Il suit que $A$ est le plus petit sous-$\varphi$-module contenant $V$. $\square$

**Remarque 2.26.** On peut éviter de passer par un choix de base en considérant la linéarisation de $\varphi$. Il faut alors remarquer que $\varphi\colon {}^{\sigma}D=D\otimes_{K_0^\sigma}K_0\to D$ est un isomorphisme entre les représentations de $G$ conjuguées ${}^{\sigma}D$ et $D$.

**Lemme 2.27.** *Soient $K_0/\mathbf{Q}_p$ une extension non ramifiée avec un générateur $\sigma$ de son groupe de Galois, $G$ un groupe fini et $(V,\rho)$ une $K_0$-représentation de dimension $d$ dont la décomposition isotypique s'écrit*

$$V=\bigoplus_{i=0}^{r-1}{}^{\sigma^i}V_0{}^n$$

*ou*

$$V=\bigoplus_{i=0}^{r-1}{}^{\sigma^i}V_0{}^n\oplus\bigoplus_{i=0}^{r-1}{}^{\sigma^i}V_0^{\vee n}$$

*pour une représentation irréductible $V_0$ dans $V$. Alors $G$ agit par homothéties ou il existe $h\in G$ tel que les sous-espaces propres de $\rho(h)$ sont de dimension plus petite que $d/2$.*

*Démonstration.* On note $r=\dim_{\mathbf{Q}_p}K_0$ et on suppose dans un premier temps que $V=\bigoplus_{i=0}^{r-1}{}^{\sigma^i}V_0{}^n$. On traite d'abord le cas où $V_0$ est de dimension 1. Si $V_0$ est de dimension 1 et vérifie ${}^{\sigma}V_0=V_0$ alors $G$ agit par homothéties (autrement dit $r=1$). Sinon, il existe un élément $h\in G$ tel que $\rho_0(h)=\lambda$ avec $\sigma(\lambda)\neq\lambda$. En particulier, la matrice de $\rho(h)$ dans une base adaptée à la décomposition précédente est diagonale avec coefficients pour coefficients les $\sigma^i(\lambda)$ pour $1\le i\le r$ qui apparaissent en nombres égaux. En particulier $h$ vérifie la condition voulue.

On suppose désormais que $V_0$ est de dimension $d_0\ge 2$ et on considère la représentation $V_0\otimes_{K_0}\overline{\mathbf{Q}_p}$. Celle-ci se décompose en représentation irréductibles $(V_k,\rho_k)$ sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$ pour $k\in\{1,\dots,n\}$ qui sont conjuguées sur $L$. En particulier, elles sont toutes de même dimension $d$. Si $d=1$ on obtient à nouveau $V$ comme somme directe de représentations conjuguées sur $K_0$ de dimension 1 et on conclut comme avant. Si $d\ge 2$ alors par le lemme 2.23 il existe un élément $h\in G$ dont les sous-espaces propres de $\rho_1(h)$ sont tous de dimension plus petite que $d/2$. Soient $\tau_1,\dots,\tau_n\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/L)$ les éléments tels que $V_k={}^{\tau_k}V_1$ pour $1\le k\le n$. Alors les valeurs propres de $\rho_k(h)$ sont les conjuguées de celles de $\rho_1(h)$ par $\tau_k$ et leurs sous-espaces propres associées sont de dimension plus petite que $d/2$. Le même raisonnement s'applique aux conjugués par les puissances de $\sigma$ de $V_0$ ce qui assure que $h$ convient.

Dans le cas de la présence des représentations duales il suffit de constater que la matrice d'un élément $h \in G$ pour la représentation duale $\rho^\vee$ d'une représentation $\rho$ de $G$ est donnée par $\rho^\vee(h) = {}^t\rho(h)^{-1}$. □

On montre finalement le lemme de stabilité par décomposition en se plaçant toujours dans le cadre de la partie 2.2.

**Lemme 2.28.** *Soient $D$ le $\varphi$-module d'une variété abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ sur un corps fini $k$ et $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$ un groupe fini de ramification tel qu'il existe une extension $L/K_0$ totalement ramifiée de groupe de Galois $G$. On suppose que $D$ admet une décomposition $D = D_1 \oplus D_2$ qui soit orthogonale pour $\lambda$, stable par $G$ et par $\varphi$ et qu'il existe des filtrations $F_1$ et $F_2$ sur $D_1$ et $D_2$ qui vérifient les propriétés (1), (2) et (3), la dernière propriété étant pour l'action induite de $G$ sur $D_1$ ou $D_2$ et le sous-corps de $L$ correspondant. Alors la filtration $F = F_1 \oplus F_2$ sur $D$ vérifie les propriétés (1), (2) et (3).*

*Démonstration.* La stabilité de la propriété (1) par somme orthogonale est triviale. On vérifie les deux autres. Pour la propriété (3), il faut montrer que pour tout $h \in G$ on a l'égalité

$$h \cdot_{gal} (F) = h \cdot_{lin} (F).$$

Soit $h \in G$. Comme les sous-$\varphi$-modules de $D$ sont définis sur $K_0$, l'action galoisienne de $h$ respecte la décomposition $D_1 \oplus D_2$ et on a

$$\begin{aligned} h \cdot_{gal} (F) &= h \cdot_{gal} (F_1) \oplus h \cdot_{gal} (F_2) \\ &= h \cdot_{lin} (F_1) \oplus h \cdot_{lin} (F_2). \end{aligned}$$

La deuxième égalité est donnée par l'hypothèse sur $F_1$ et $F_2$. Finalement, par linéarité on a $h \cdot_{lin} (F_1) \oplus h \cdot_{lin} (F_2) = h \cdot_{lin} (F)$.

Il reste à vérifier la propriété d'admissibilité. Soit $N \subset D$ un sous-$\varphi$-module. La seconde projection $p_2 \colon D \to D_2$ donne une suite exacte de $\varphi$-modules

$$0 \longrightarrow N \cap D_1 \longrightarrow N \longrightarrow p_2(N) \longrightarrow 0$$

qui se casse suivant les composantes isotypiques de $D$, pour tout $\mu \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$ on a

$$0 \longrightarrow (N \cap D_1)_\mu \longrightarrow N_\mu \longrightarrow p_2(N)_\mu \longrightarrow 0.$$

D'un autre côté, on dispose d'une suite exacte de $L$-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow N_L \cap F_1 \longrightarrow N_L \cap F \longrightarrow p_2(N)_L \cap F_2$$

d'où une inégalité

$$\dim F \cap N_L \leq \dim N_L \cap F_1 + \dim p_2(N)_L \cap F_2.$$

L'admissibilité de $F_1$ et $F_2$ assure alors que

$$\dim F \cap N_L \leq \sum_\mu \mu \dim (N \cap D_1)_\mu + \sum_\mu \mu \dim p_2(N)_\mu = \sum_\mu \mu \dim N_\mu$$

ce qui est la condition d'admissibilité de $F$ pour $N$. □

**2.6.2.** On montre maintenant l'existence d'une décomposition qui permettra d'appliquer les lemmes précédents pour démontrer le théorème 2.5.

**Proposition 2.29.** *Soient $D$ le $\varphi$-module d'une variété abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ sur un corps fini $k$ et $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$ un groupe fini.*
*Alors il existe une décomposition*

$$D = \bigoplus_{i=1}^{r} D_i$$

*telle que la somme est orthogonale pour $\lambda_0$, les $D_i$ sont des sous-$\varphi$-modules de $D$ dont l'ensemble des pentes est $\{\mu_r, 1-\mu_r\}$ pour $1 \leq i \leq r$, les $D_i$ sont stables par $G$ pour $1 \leq i \leq r$ et $D_i$ est une somme directe de représentations irréductibles de $G$ qui sont conjuguées sur $\mathbf{Q}_p$ ou de leurs duales.*

*Démonstration.* On note $\mathcal{P} = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ l'ensemble des pentes de $D$ rangées par ordre croissant. On a une décomposition en composantes isotypiques

$$D = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}} D_\mu.$$

On pose $D_i = D_{\mu_i} + D_{1-\mu_i}$ pour $1 \leq i \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil$. Alors l'écriture $D = \bigoplus_{i=1}^{r} D_i$ est une somme orthogonale de $\varphi$-modules $G$-stable qui vérifient la condition que les pentes de chaque composante sont données par un couple $\{\mu, 1-\mu\}$. On peut donc supposer dans la suite que $\mathcal{P} = \{\mu, 1-\mu\}$ pour un $\mu \in \mathbf{Q}$.

On procède alors par récurrence suivant la dimension de $D$. Si $D$ est nul, il n'y a rien à faire. Sinon, on considère la décomposition

$$D = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{n_i}$$

de $D$ en composantes isotypiques pour l'action de $G$ où $(V_i, \rho_i)$ est une représentation irréductible de $G$ sur $K_0$. On note $A$ la somme des composantes isotypiques $V_i^{n_i}$ de $D$ qui sont conjuguées par $\sigma$, le Frobenius sur $K_0$. On note $B$ le supplémentaire $G$-stable de $A$, qui est unique par construction. Les deux sous-espaces $A$ et $B$ de $D$ sont en particulier $\varphi$-stables d'après le lemme 2.25. On distingue alors trois cas.

(*i*) Le cas $A^\perp \cap A = \{0\}$. Ici $A^\perp$ est un supplémentaire $G$-stable de $A$ et alors $A^\perp = B$. L'hypothèse de récurrence s'applique avec $B$ ce qui conclut.

(*ii*) Le cas $A^\perp = A$. Dans ce cas, il découle directement que $B^\perp = B$. Dans une base adaptée à cette décomposition de $D$ en sous-espace lagrangiens, les matrices des éléments de $G$ sont diagonales par blocs

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

et comme l'action est par automorphismes symplectiques elles vérifient de plus $X = {}^tY^{-1}$. Autrement dit, les représentations irréductibles qui apparaissent dans $B$ sont duales de celles vues dans $A$. Le $\varphi$-module $D$ est donc de la forme souhaitée.

(*iii*) Le cas $\{0\} \subsetneq A^\perp \cap A \subsetneq A$. Vérifions que l'on a des décompositions $G$-stables et $\varphi$-stables

$$A = A^\perp \cap A \oplus B^\perp \cap A \text{ et } B = B^\perp \cap B \oplus A^\perp \cap B.$$

Comme $B^\perp$ est stable par $G$ il admet une décomposition

$$B^\perp = B^\perp \cap A \oplus B^\perp \cap B$$

en sous-espaces stables par $G$ et $\varphi$ et on a une décomposition analogue pour $A^\perp$. Du fait que $A^\perp \cap B^\perp = 0$ on obtient de plus que $B^\perp \cap A$ est en somme directe avec $A^\perp \cap A$ dans $A$ et il en va de même pour $B$. On a donc

$$\dim A = \dim B^\perp = \dim B^\perp \cap A + \dim B^\perp \cap B$$

et

$$\dim A \geq \dim B^\perp \cap A + A^\perp \cap A.$$

Il suit directement $\dim B^\perp \cap B \geq \dim A^\perp \cap A$. Par symétrie, grâce aux équations analogues pour $\dim B$, on obtient $\dim B^\perp \cap B \leq \dim A^\perp \cap A$ et donc égalité. On en déduit les décompositions annoncées. On considère maintenant le sous-espace $W = A^\perp \cap A \oplus B^\perp \cap B$. On a

$$A^\perp \cap B \bigoplus B^\perp \cap A \subset W^\perp$$

et par égalité des dimensions l'égalité. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la décomposition orthogonale $D = W \oplus W^\perp$.

□

On peut désormais démontrer le théorème 2.5.

*Démonstration.* On considère la décomposition

$$D = \bigoplus_{i=1}^{n} D_i$$

donnée par la proposition 2.29. D'après le lemme 2.28, il suffit de démontrer l'existence de filtrations $F_1, \ldots, F_n$ sur chacun des $\varphi$-modules $D_1, \ldots, D_n$ qui vérifient les propriétés (1), (2) et (3). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que l'ensemble des pentes de $D_i$ est $\{\mu, 1-\mu\}$ pour un $\mu \neq 1/2$, l'existence d'une telle filtration $F_i$ s'obtient du lemme 2.19. Pour les indices restants où $G$ n'agit pas sur $D_i$ par homothétie on obtient $F_i$ du théorème 2.15 qui s'applique d'après les lemmes 2.27 et 2.18. Il ne reste donc que ce dernier cas à traiter, où $D$ est isotypique de pente $1/2$ et $G$ agit par homothéties, donc trivialement sur les sous-espaces vectoriels. Dans ce cas, par le choix de $K$ fait au paragraphe 2.2.3 on peut considérer l'action linéaire de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ diagonale sur l'espace vectoriel $D$ donnée dans une base symplectique par

$$\overline{1} \longmapsto \begin{pmatrix} \zeta_p & & & & \\ & \zeta_p^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \zeta_p & \\ & & & & \zeta_p^{-1} \end{pmatrix} \text{ si } p \text{ est impair et } \overline{1} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } p \text{ est pair.}$$

À nouveau par le lemme 2.18, on peut appliquer le théorème 2.15 pour cette action et obtenir une filtration admissible $F$ sur $D_{K'}$ avec $K'$ une extension de degré $p$ de $K$ linéairement disjointe de $L$ (il en existe quitte à étendre à nouveau $k$ et $K_0$ d'après le paragraphe 2.2.3) vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). Finalement, quitte à considérer le compositum $LK'/K'$ et les filtrations $F_i$ déduites par changement de base on obtient le résultat. □

# 3. Réalisation de groupes finis comme groupes de monodromie finie par déformation

Le but de cette partie est de donner une méthode de construction conditionnelle de variétés abéliennes avec monodromie finie prescrite, dont le résultat formel est l'énoncé 3.7. Plus précisément, on montre que pour une donnée $(A_0, \lambda_0, G)$ où $A_0$ est une variété semi-abélienne sur un corps fini $k$ de caractéristique $p$, $\lambda_0$ une polarisation de $A_0$ et $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$ un groupe fini produit semi-direct d'un $p$-groupe et d'un groupe cyclique d'ordre premier à $p$, i.e. $G$ peut se réaliser comme groupe de ramification d'une extension galoisienne de corps $p$-adiques, il existe une variété abélienne $B$ relèvement à isogénie près de $A_0$ sur un corps $p$-adique $K$ telle que le groupe de monodromie finie de $B$ soit $G$.

## 3.1. Quelques rappels de théorie de Hodge $p$-adique entière

Le but de cette partie est de décrire les différentes catégories semi-linéaires et foncteurs qui interviennent dans la construction.

**3.1.1.** Pour un corps fini $k$ et $K_0 = \mathrm{Frac}(W(k))$ on a introduit en partie 2 les catégories de Fontaine des $\varphi$-modules $\mathrm{MF}^{\varphi}$ et celle des $\varphi$-modules filtrés sur $K$ et admissibles $\mathrm{MF}_K^{\varphi}$ pour une extension finie totalement ramifiée $K/K_0$.

D'après le théorème A p. 140 de [FO22] on dispose d'une équivalence de catégorie entre $\mathrm{MF}_K^{\varphi,N}$ et la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{st}(G_K)$ des représentations $p$-adiques de $G_K$ qui sont semi-stables. Cette équivalence est donnée par deux foncteurs, défini sur les objets comme suit

$$D_{st}\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{st}(G_K) & \longrightarrow & \mathrm{MF}_K^{\varphi,N} \\ V & \longmapsto & (V \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{st})^{G_K} \end{array} \quad \text{et} \quad V_{st}\colon \begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K) \\ D & \longmapsto & D \otimes_{K_0} B_{st} \end{array}$$

où $B_{st}$ est un anneau de périodes défini en partie 6.1 de [FO22]. Par cette équivalence les représentation cristallines, dont on note la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{cris}}(G_K)$, sont équivalentes à la sous-catégorie pleine des $\varphi$-modules, c'est-à-dire les objets qui vérifient $N = 0$. De plus, les poids de Hodge-Tate d'une telle représentation $V_{st}(D)$ pour un $\varphi, N$-module $D$ sont données par les entiers $i \in \mathbf{Z}$ tels que $F_{i+1} \neq F_i$ au niveau de la filtration $F = \{F_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ de $D_K$. Les $\varphi$-modules étudiés en partie 2 correspondent à des représentations cristallines à poids de Hodge-Tate $0, 1$ par construction.

**3.1.2.** On note $\mathfrak{S}$ l'anneau des séries formelles $W(k)[[u]]$ et $E(u)$ un polynôme d'Eisenstein pour l'extension $K/K_0$. Il est naturellement équipé d'un morphisme de Frobenius $\varphi\colon \sum_{n\geq 0} a_n u^n \mapsto \sum_{n\geq 0} \sigma(a_n) u^{pn}$ où $\sigma$ est le morphisme de Frobenius canonique sur $W(k)$ obtenu de l'élévation à la puissance $p$ sur les coordonnées. La catégorie des modules de Breuil-Kisin, introduite dans [Kis06], est une sous-catégorie notée $\mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ de la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ des $\mathfrak{S}$-modules libres de rang fini équipés d'un morphisme injectif $f$ semi-linéaire par rapport à $\varphi$ qui a son conoyau tué par une puissance de $E(u)$. La sous-catégorie $\mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ des modules de Breuil-Kisin est celle dont les objets ont leur Frobenius $f$ de conoyau tué par $E(u)$.

Kisin montre que la catégorie d'isogénie $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \otimes \mathbf{Q}_p$ des modules de Kisin est équivalente à la catégorie $\mathrm{MF}_K^{\varphi,N}$ des $\varphi, N$-modules filtrés sur $K$ de Fontaine. Cette équivalence passe par l'extension des scalaires des modules de Kisin à l'anneau des fonctions holomorphes $\mathcal{O}$ sur le disque unité dans la théorie rigide-analytique de Tate. L'anneau $\mathcal{O}$ se décrit comme le sous-anneau des séries formelles à coefficient dans $K_0$ qui convergent en les $\overline{K}$-points du disque unité. Il construit ensuite deux foncteurs, comparables aux foncteurs $D_{st}$ et $V_{st}$ de Fontaine,

$$D_{\mathfrak{S}}\colon \operatorname{Rep}_{\mathbf{Z}_p}^{\text{cris } 0,1}(G_K) \to \mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi},\ V_{\mathfrak{S}}\colon \mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \to \operatorname{Rep}_{\mathbf{Z}_p}^{\text{cris } 0,1}(G_K)$$

où la catégorie $\operatorname{Rep}_{\mathbf{Z}_p}^{\text{cris } 0,1}(G_K)$ est celle des réseaux dans les représentations cristallines à poids de Hodge-Tate $0,1$. Ceux-ci sont compatibles aux foncteurs de Fontaine au sens où ils referment et font commuter le diagramme suivant par la ligne en pointillés

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Rep}_{\mathbf{Q}_p}^{\text{cris } 0,1}(G_K) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{MF}_K^{\varphi} \\
\operatorname{Rep}_{\mathbf{Z}_p}^{\text{cris } 0,1}(G_K) \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & \mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

**3.1.3.** On rappelle finalement la construction d'un foncteur fidèle $\mathcal{D}$ de la catégorie $\mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ dans celle des réseaux dans les $\varphi$-modules filtrés de Fontaine notée $\mathrm{MF}_{K,W}^{\varphi}$. Une telle construction est par exemple donnée dans la preuve du théorème 2.3 de [Liu12]. Précisément, la catégorie $\mathrm{MF}_{K,W}^{\varphi}$ est celle des $\varphi$-modules $D$ filtrés sur $K$ munis d'un $W(k)$-réseau $W$ tel que $W \otimes_{W(k)} K_0 = D$. On note les objets de cette catégorie par un couple $(D, W)$. Rappelons tout d'abord que Kisin construit un foncteur $D\colon \mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \to \mathrm{MF}_K^{\varphi}$ qui induit une équivalence au niveau des catégories d'isogénies, voir [Kis06].
On définit alors le foncteur $\mathcal{D}\colon \mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \to \mathrm{MF}_{K,W}^{\varphi}$ de la manière suivante. Sur les objets, à un module de Kisin $\mathfrak{M}$ on associe le couple $(\mathrm{D}(\mathfrak{M}), W)$ où $W = \mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap u\mathrm{M}$ avec $M = \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}$ - l'anneau $\mathcal{O}$ est l'algèbre de Tate des séries formelles convergentes sur le disque rigide analytique $D[0,1)$. Il faut vérifier l'égalité $W \otimes K_0 = \mathrm{D}(\mathfrak{M})$ et que ce dernier est stable par $\varphi$. La stabilité de $\mathfrak{M}$ par $\varphi$ induit celle de $W$. Pour l'autre condition on considère le morphisme surjectif $\psi\colon \mathfrak{M}/u\mathfrak{M} \to W$ et son noyau $\operatorname{Ker}\psi$. Comme $\operatorname{Ker}\psi$ est un sous-$W(k)$-module du module libre de rang fini $\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$ il est libre de rang fini et on dispose d'une base adaptée $(\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_n})$. Alors, si $\operatorname{Ker}\psi \neq 0$, la famille $p^{n_i}w_{i1 \leq i \leq r}$ est une base de $\operatorname{Ker}\psi$ avec $r \geq 1$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{M}$ alors les $e_i \mod u$ donnent une base $\{\overline{e_i}\}$ de $\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$. Soit une telle base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{M}$. On a une matrice $\overline{P}$ de changement de base de la base $\{\overline{e_i}\}$ à la base $\{\overline{w_i}\}$. Un relevé de $P$ comme matrice à coefficients dans $\mathfrak{S}$ vérifie $\det P \mod u = \det \overline{P} \in W(k)^{\times}$ et donc $P$ est inversible. Il suit que $P$ induit un changement de base de la base $\{e_i\}$ à une base $\{w_i\}$ de $\mathfrak{M}$ avec $w_i \mod u = \overline{w}_i$. Alors $p^{n_1}w_1 \in u\mathrm{M} \cap \mathfrak{M}$ donc il existe $y \in \mathrm{M}$ tel que $p^{n_1}w_1 = uy$. Par ailleurs $y \in \mathfrak{M} \otimes \mathcal{O} = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathcal{O},\ x \in \mathfrak{M}\} = \mathrm{M}$ ce qui assure que les $\{w_i\}$ forment une base de M. On en déduit $y = \frac{p^{n_1}}{u}w_1$ ce qui est absurde. Le morphisme $\psi$ est donc un isomorphisme et $W$ vérifie $W \otimes_{W(k)} K_0 = D$.

Pour les morphismes, à $f\colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ on associe $\overline{f} = f \mod u$, le morphisme donné par le foncteur D de Kisin. On vérifie sans difficulté $\overline{f}(\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_1 \cap u\mathrm{M}_1) \subset \mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_2 \cap u\mathrm{M}_2$. Il suit directement que comme D est fidèle, $\mathcal{D}$ l'est aussi.

### 3.2. Déformation de groupes $p$-divisibles issues de variétés semi-abéliennes

**3.2.1.** Dans cette partie, on démontre un théorème de relèvement en caractéristique 0 de la donnée $(A_0, \lambda_0, G)$.

**Théorème 3.1.** *Soit $(A_0, \lambda_0)$ une variété semi-abélienne polarisée sur $k$. Soit $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$ un groupe fini. Il existe une extension de corps $p$-adique totalement ramifiée $L/K$ galoisienne de groupe $G$ et de corps résiduel $k$ ainsi qu'un schéma semi-abélien $B$ polarisé sur $\mathcal{O}_L$ muni d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma \in G}$ qui induit une injection $\iota \colon G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\, B_k \subset \mathrm{End}\, B_k \otimes \mathbf{Q}$ par passage à la fibre spéciale où la variété semi-abélienne $B_k$ est isogène à $A_0$ et l'injection $\iota$ correspond à la composée $G \subset \mathrm{Aut}\, A_0 \subset \mathrm{End}\, A_0 \otimes \mathbf{Q} = \mathrm{End}\, B_k \otimes \mathbf{Q}$. De plus, si $\lambda_0$ est de degré $m$ le schéma semi-abélien $B$ est muni d'une polarisation dont la polarisation induite sur la partie abélienne est de degré $mp^n$ pour un $n \geq 0$.*

On démontre ce théorème par déformation. Le théorème de Serre-Tate généralisé dans [BM19] au cas des variétés semi-abéliennes assure que la théorie de la déformation de telles variétés est donnée par celle de leur groupe $p$-divisible. La théorie de Hodge $p$-adique entière, rappelée en partie 3.1, permet alors de traiter des groupes $p$-divisibles sur l'anneau des entiers d'un corps $p$-adique. Plus précisément, d'après Breuil, Kisin et Kim dans [Kis06] et [Kim12] la catégorie $p-\mathrm{div}/\mathcal{O}_L$ des groupes $p$-divisibles sur $\mathcal{O}_L$ est équivalente à celle des modules de Breuil-Kisin $\mathrm{BT}^{\varphi}_{\mathfrak{S}}$.

La situation est décrite par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}}_{\mathbf{Q}_p} \arrow[r] & \mathrm{MF}^{\varphi}_{L} \simeq \mathrm{BT}^{\varphi}_{\mathfrak{S}} \otimes \mathbf{Q} & \\
\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris},0,1}_{\mathbf{Z}_p} \arrow[u] \arrow[r] & p - \mathrm{div}/\mathcal{O}_L \simeq \mathrm{BT}^{\varphi}_{\mathfrak{S}} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{MF}^{\varphi}_{L,W} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Tout ceci est de plus compatible avec les passages aux fibres spéciales. En particulier, si $\Gamma$ est un groupe $p$-divisible sur $\mathcal{O}_L$ alors le $\varphi$-module induit par le module de Dieudonné de sa fibre spéciale est déterminé par la représentation $p$-adique issue de son module de Tate.

**3.2.2.** On considère maintenant $D$ un $\varphi$-module filtré sur $L$ muni d'une donnée de descente pour l'extension $L/K$, c'est-à-dire d'une collection d'isomorphismes $(f_\sigma)_{\sigma \in G}$ qui vérifie la condition de cocycle $f_{gh} = f_g \circ g(f_h)$. Comme $D$ est défini sur $K_0$, cela revient à dire que la filtration $F \subset D_L$ vérifie $f_g(F) = g(F)$ ou encore que $D_L$ est muni d'une action semi-linéaire de $G$ et que $F$ provient d'un sous-espace de dimension $g$ du $K$-espace vectoriel $D_L^G$ des invariants sous cette action.

D'après le théorème 8.57 de [FO22], $D$ muni de sa donnée de descente correspond à une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $G_K$, que l'on note $(V, \rho)$. Cette équivalence de catégories est compatible aux suites exacte et à la dualité, donc si l'on suppose $D$ muni d'un isomorphisme $\lambda_0$ sur son dual semi-abélien $D^t$ compatible à la donnée de descente alors $V$ est aussi équipé d'un tel isomorphisme que l'on note à nouveau $\lambda_0$. Par un choix de relèvement à $G_K$ des éléments $g \in G$, que l'on note encore $g$, la donnée de descente $(f_g)_{g \in G}$ correspond aux isomorphismes des $\mathbf{Q}_p$-représentations de $G_L$ donnés par $\rho(g) \colon V \to V^g$ où $V_g$ est la représentation $(V, \rho(g \cdot g^{-1}))$. On montre en remarque 3.2 que la construction est indépendante du choix de relèvement des éléments de $G$ effectué ici.
Par choix d'une base convenable $\mathcal{B}$ on peut supposer que la matrice de $\lambda_0$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}_p^\times$. Soit alors $T_{\mathcal{B}}$ le réseau engendré par $\mathcal{B}$. Le morphisme $\lambda_0$ induit un isomorphisme de $T_{\mathcal{B}}$ sur son dual $T_{\mathcal{B}}^\vee$ par choix. Par continuité de l'action de $G_K$, on obtient un réseau stable $T$

défini par la somme $\sum_{g\in G_K} gT_{\mathcal{B}}$. Quitte à réduire ce réseau par multiplication par une puissance de $p$ convenable on peut supposer de plus que $\lambda_0(T) \subset T^\vee$, i.e. $\lambda_0$ définit un morphisme de la $\mathbf{Z}_p$-représentation $T$ dans sa duale.

Le réseau $T$ muni de sa structure de représentation cristalline de $G_L$, de la même manière que $V$, est équipé d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ compatible à $\lambda_0$. L'image $\mathfrak{m}$ de $T$ par le foncteur $D_{\mathfrak{S}}$ dans la catégorie des modules de Breuil-Kisin fournit un groupe $p$-divisible $\Gamma$ sur $\mathcal{O}_L$ avec une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ et une polarisation $\lambda_0$. Par commutativité du diagramme au paragraphe 3.2.1 et compatibilité au passage aux fibres spéciales on déduit que le module de Dieudonné $M$ de $\Gamma_k$, qui est le sous-réseau de $D$ obtenue par le foncteur $\mathcal{D}$, vérifie $D = M \otimes K_0$ comme $\varphi$-module. Le module de Dieudonné $M$ s'identifie donc à un sous-réseau stable pour $G$ de $D$ et la donnée de descente sur $\Gamma$ induit l'injection $G \hookrightarrow \operatorname{End} M \subset \operatorname{End}_\varphi D$.

**Remarque 3.2.** Deux choix de relèvements d'un élément $g \in G_K$ diffèrent par un élément $h \in G_L$ et on a un triangle commutatif de morphismes de représentations

$$\begin{tikzcd} & V^{gh} \\ V \arrow[ur, "\rho(gh)"] \arrow[r, "\rho(g)"'] & V^g \arrow[u, "\rho(ghg^{-1})"'] \end{tikzcd}$$

Or par définition du foncteur de Fontaine $\operatorname{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_L) \to \mathrm{MF}^\varphi$ les morphismes $\{\rho(h)\}_{h\in G_L}$ ont pour image l'identité dans la catégorie des $\varphi$-modules. Comme cette catégorie est, à isogénie près, celle des fibres spéciales des groupes $p$-divisibles on en déduit que le morphisme induit par $\rho(ghg^{-1})$ sur $\Gamma_k$ est l'identité. La fidélité du passage à la fibre spéciale assure alors que l'image du morphisme $\rho(ghg^{-1})$ dans la catégorie des groupes $p$-divisibles sur $\mathcal{O}_L$ est encore l'identité.

**Remarque 3.3.** On peut obtenir $\mathfrak{m}$ comme image par la composition de deux foncteurs. Le premier est l'inverse du foncteur $\widehat{T}_{L/K}$, donnant une équivalence de catégories d'après le théorème 3.5 [**Oze17**], entre la catégorie $\operatorname{Rep}_{\mathbf{Z}_p}^{pst,L,[0,r]}(G_K)$ des réseaux dans les représentations $p$-adiques de $G_K$ potentiellement semi-stable sur $L$ à poids de Hodge-Tate dans $[0,r]$ et la catégorie $\operatorname{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi,r,\widehat{G_L},K}$ des $(\varphi,\widehat{G_K},K)$-modules dont les objets sont des triplets $(\mathfrak{m},\varphi,\widehat{G_L})$ où $\mathfrak{m}$ est un module de Kisin de hauteur plus petite que $r$, voir la définition 3.4 du même article pour les détails. Le deuxième est le foncteur d'oublie $\operatorname{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi,r,\widehat{G_L},K} \to \mathrm{BT}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$, la construction de Liu et Ozeki étant compatible aux foncteurs de Kisin.

La construction faite à ce paragraphe est résumée par l'énoncé suivant.

**Proposition 3.4.** *Soit $L/K$ une extension de corps $p$-adiques totalement ramifiée et galoisienne de groupe $G$. Soit $D$ un $\varphi$-module filtré admissible sur $L$ muni d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ pour l'extension $L/K$. Alors, il existe un groupe $p$-divisible $\Gamma$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ de $L$ tel que le module de Dieudonné $M$ de sa fibre spéciale vérifie $M\otimes_{W(k)} K_0 = D$ et $\Gamma$ est muni d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ pour l'extension $L/K$ qui induit l'injection $G \hookrightarrow \operatorname{End}_\varphi D$.*

**3.2.3.** On peut finalement démontrer le théorème 3.1.

*Démonstration.* Soit $D$ le $\varphi$-module issu de $A_0$. D'après le théorème 2.5, il existe une extension de corps $p$-adiques $L/K$ totalement ramifiée de groupe de Galois $G$ et une filtration admissible $F$ sur $D_L$ telle que l'action de $G$ sur le $\varphi$-module filtré $(D,F)$ soit une donnée de descente pour

$L/K$. On peut donc appliquer la proposition 3.4 pour obtenir un groupe $p$-divisible quasi-polarisé $(\Gamma, \lambda)$ sur $\mathcal{O}_L$ dont la fibre spéciale $\Gamma_k$ est isogène à $A_0[p^\infty]$. De plus, $\Gamma$ est muni d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ qui induit une injection $G \hookrightarrow \operatorname{Aut}\Gamma_k \subset \operatorname{Aut}_\varphi D$. Le quotient de $A_0$ par le noyau de l'isogénie $A_0[p^\infty] \to \Gamma_k$ est une variété semi-abélienne $C_0$ dont le groupe $p$-divisible est $\Gamma_k$ par construction. Il suit, d'après le théorème 3.2.1 de [BM19], que $C_0$ se relève en un schéma semi-abélien formel $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{O}_L$ muni d'une polarisation $\lambda$ et d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ compatible à $\lambda$ qui induit l'injection $G \subset \operatorname{Aut} F_0$ sur la fibre spéciale. Par le théorème d'algébrisation de Grothendieck ([EGAIII.1], Théorème 5.4.5) le schéma formel $\mathcal{C}$ est algébrisable en un schéma $C$ sur $\mathcal{O}_L$ muni de la même structure.

L'assertion sur le degré de la polarisation s'obtient en remarquant que la polarisation sur $C$ est déduite de $\lambda_0$ par l'isogénie obtenue de l'inclusion des réseaux stables en jeu dans le $\varphi$-module issu de $A_0$. □

### 3.3. Dégénérescence et monodromie finie

On se replace désormais dans la situation de départ. On dispose d'un groupe fini de ramification $G$ avec une injection $\iota\colon G \hookrightarrow \operatorname{Aut}(A_0, \lambda_0)$ pour une variété semi-abélienne $A_0$ de dimension $g$ sur un corps fini $k$ de caractéristique $p$. On dispose d'après le théorème 3.1 d'une extension galoisienne de corps $p$-adiques $L/K$ de groupe $G$, totalement ramifiée, de corps résiduel $k$ et d'une variété semi-abélienne $A$ sur $L$ munie d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ qui induit l'injection $\iota$ par passage à la fibre spéciale ainsi que d'une polarisation principale $\lambda_0$ compatible aux $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$. On se ramène à une variété abélienne $A$ sur $L$ munie d'une donnée de descente par la théorie de Faltings et Chai.

**Proposition 3.5.** *Soit $C$ un schéma semi-abélien de fibre spéciale $A_0$, dont la partie torique est déployée, sur $\mathcal{O}_L$ muni d'une polarisation $\lambda$ et d'une donnée de descente compatible $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ qui induit une injection $\iota\colon G \to \operatorname{Aut}(C_k, \lambda_k)$. Alors, il existe une variété abélienne $A$ dont la réduction $A_k$ est isomorphe à $C_k$ sur $L$ muni d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ qui induit l'injection $\iota$.*

*Démonstration.* Le schéma semi-abélien $C$ correspond à une donnée de dégénérescence polarisée, c'est-à-dire un objet de la catégorie $\mathrm{DD}_{\mathrm{pol}}$ définie p.57–58 de [FC90], à l'exception du morphisme $\underline{Y} \to C(L)$ du point $(vi)$. Montrons l'existence d'un tel morphisme, avec les notations de Faltings et Chai. Du fait que la partie torique est déployée, les faisceaux $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ s'identifient à des $\mathbf{Z}$-modules libres de rang $t$. Au choix d'une base $(e_i)_{i\in\{1,\dots,t\}}$ de $\underline{X}$ correspond une famille de faisceaux inversibles $(\mathcal{F}_i)_{i\in\{1,\dots,t\}}$ sur $B$ et à chaque élément $x = \sum_{i=1}^{t} x_i e_i \in \underline{X}$ correspond le faisceau inversible $\bigotimes_{i=1}^t \mathcal{F}_i^{x_i}$. Le morphisme cherché $\underline{Y} \to C(L)$ correspond alors à une matrice de trivialisations des faisceaux $\mathcal{F}_i$ aux points $c^t(b_i)$ avec $(b_i)_{i\in\{1,\dots,t\}}$ le choix d'une base de $\underline{Y}$ vérifiant des conditions de compatibilité, symétrie et positivité. De façon plus précise, pour chaque point $c^t(b_i) \in A(K)$ la fibre de la projection $C(K) \to A(K)$ en ce point est isomorphe à $T(K) \simeq (K^\times)^t$. Un relevé de $c^t$ à valeur dans $C(K)$ correspond donc à un choix de vecteurs de $(K^\times)^t$. Par ailleurs comme $c^t(b_i)^*\mathcal{F}_i$ est un $\mathcal{O}_L$-module libre de rang 1 l'espace des choix de trivialisations de sa fibre générique s'identifie naturellement à $K^\times$. Par les identifications en jeu, le choix d'un relevé de $c^t$ correspond donc à la donnée d'une matrice $M$ de $\mathrm{M}_n(K^\times)$. La condition de symétrie s'exprime alors comme suit. L'image par le morphisme $\Phi\colon \underline{Y} \to \underline{X}$ issu de $\lambda$, qui est donné par une matrice $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ inversible sur $\mathbf{Q}$, d'un élément $y \in \underline{Y}$ correspond à un faisceau inversible $\mathcal{F}_y$ obtenu par linéarité à partir des faisceaux $(\mathcal{F}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Soient $y_1, y_2 \in \underline{Y}$ alors la structure de biextension issue de $\lambda$ donne un isomorphisme canonique

$$c^t(y_1)^*\mathcal{F}_{y_2} \simeq c^t(y_2)^*\mathcal{F}_{y_1}$$

avec lequel la matrice $M$ doit être compatible. Matriciellement, pour $Y_1$ et $Y_2$ les vecteurs colonnes de $y_1$ et $y_2$ respectivement, cela donne une égalité

$$Y_1MNY_2^T = Y_2M(NY)_1^T.$$

Dans le cas où $N$ est l'identité on retrouve la condition de symétrie usuelle $M = M^T$. De la même façon la condition de positivité s'exprime par l'égalité matricielle

$$YM(NY)^T \in \mathfrak{m}\mathcal{O}_L.$$

Si $N$ est l'identité on obtient que la condition se traduit par le fait que $M$ est définie positive. L'ensemble des choix du morphisme $\iota$ se trouve donc en bijection avec l'ensemble des matrices symétriques définies positives qui est non vide. On fixe un tel choix de $\iota$. Les isomorphismes $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ de la donnée de descente sont compatibles avec le reste de la donnée de dégénérescence par hypothèse. Par transport de structure on équipe ainsi les $(C^g)_{g\in G}$ d'une structure d'objet de $\mathrm{DD}_{\mathrm{pol}}$ compatible aux morphismes $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$. Par l'équivalence de catégories on obtient un schéma en groupe commutatif $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{O}_L$ de fibre générique une variété abélienne $A$ de dimension $g$ et muni d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$. L'extension de Raynaud de $\mathcal{B}$ est $C$ et la fibre spéciale de $\mathcal{B}$ est la variété semi-abélienne $A_0$. De plus, par restriction à la fibre spéciale la famille $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ induit l'injection $\iota$.

Soit alors $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de $A$ sur $\mathcal{O}_L$. Alors $\mathcal{A}^\sigma$ est le modèle de Néron de $A^\sigma$. Par la propriété de Néron les morphismes $f_\sigma$ s'étendent à ces modèles. Par ailleurs par la proposition 3.3 de l'exposé IX de [SGA7.1] on a des immersions ouvertes $\mathcal{B}^\sigma \hookrightarrow \mathcal{A}^\sigma$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. En particulier, ces immersions induisent des automorphismes sur les composantes connexes des neutres des fibres génériques et spéciales. On a donc $F_s = \mathcal{B}_s = \mathcal{A}_s^\circ = \mathcal{A}_s^{\sigma\circ}$. De plus, l'unicité de l'extension d'un morphisme de $A^\sigma$ à $\mathcal{A}^\sigma$ assure que les morphismes $f_\sigma$ entre les modèles de Néron des variétés abéliennes $A^\sigma$ induisent l'injection $\iota\colon G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}_s^\circ = \mathrm{Aut}\,A_0$ par restriction aux fibres spéciales. ☐

On peut finalement conclure que $G$ est le groupe de monodromie finie de la variété abélienne $B$ déduite de $A$ par la donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$, dans le cas des courbes elliptiques avec bonne réduction ce résultat est dû à M. Volkov, voir [Vol01] Théorème 4.5.

**Théorème 3.6.** *Soit $A$ une variété abélienne principalement polarisée sur $L$ munie d'une donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ relative à l'extension $L/K$. On suppose que*

*(i) $A_L$ a réduction semi-stable.*

*(ii) On a une injection $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Aut}\,A_k$ induite par la donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$.*

*Alors $A$ descend en une variété abélienne $B$ principalement polarisée sur $K$ et $G$ est le groupe de monodromie finie de $B$.*

*Démonstration.* La donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$ est effective et $A$ descend à une variété abélienne principalement polarisée $B$ sur $K$. Comme $A$ a réduction semi-stable on a $G_L \subset I_B$ et une surjection $\mathrm{Gal}(L/K) \to \Phi_B$. Il suit d'après [SZ98] Proposition 4.3 (ii) les égalités $(\mathrm{T}_\ell\, B)^{I_B} = (\mathrm{T}_\ell\, B)^{G_L} = \mathrm{T}_\ell\, A_k$ pour $\ell$ premier différent de $p$. Par ailleurs, l'action naturelle de $G_L$ sur $(\mathrm{T}_\ell\, B)^{G_L}$

se factorise par le quotient $\mathrm{Gal}(L/K)$. Or l'action de ce dernier est déduite de la donnée de descente $(f_\sigma)_{\sigma\in G}$. D'après $(ii)$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_K \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_\ell\, B)^{I_B} \\
& \mathrm{Aut}\, A_k \arrow[ur, hook] & \\
\mathrm{Gal}(L/K) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & \Phi_B \arrow[u, hook] \arrow[uur, hook] &
\end{tikzcd}$$

et la surjection $\mathrm{Gal}(L/K) \to \Phi_B$ est un isomorphisme ou encore $I_B = G_L$.

$\square$

On termine par le résultat principal de cette partie, aboutissement de la construction présentée aux parties 3.2 et 3.3.

**Théorème 3.7.** *Soit $G$ un groupe fini de ramification tel qu'il existe une variété semi-abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ sur un corps fini $k$ avec une inclusion $G \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$. Alors il existe une variété abélienne $B$ de dimension $\dim A_0$ sur un corps de nombres $K$ et une place non archimédienne $v$ de $K$ de corps résiduel $k$ telle que le groupe de monodromie finie de $B$ en $v$ soit $G$. De plus, si $\lambda_0$ est de degré $m$ alors $B$ est munie d'une polarisation de degré $mp^n$ pour un $n \geq 0$.*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.1 on obtient un schéma semi-abélien $C$ de fibre spéciale $A_0$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 3.5 où l'injection $\iota\colon G \to \mathrm{Aut}(F_k, \lambda_k)$ induit l'inclusion $G \subset \mathrm{End}\, A_0 \otimes \mathbf{Q}$ donnée dans l'énoncé. Il suit l'existence d'une variété abélienne polarisée $A$ sur $L$ muni d'une donnée de descente pour l'extension $L/K$ de telle sorte que les morphismes de la donnée de descente induisent une injection $\iota\colon \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Aut}\, A_k$ où $A_k$ est la réduction de $A$. L'injection $\iota$ correspond à nouveau à l'inclusion de l'énoncé vue dans $\mathrm{End}\, A_0 \otimes \mathbf{Q} = \mathrm{End}\, A_k \otimes \mathbf{Q}$ avec les isomorphismes $G \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$ et $A_k \simeq F_k$. On est alors en position d'appliquer le théorème 3.6 ce qui fournit une variété abélienne $B$ de dimension $\dim A_0$ sur un corps $p$-adique $K$ avec $G$ pour groupe de monodromie finie.

Le passage à un corps de nombres s'effectue par une adaptation du théorème 4.3 de [Phi22a] où l'on considère une composante irréductible de $H_{g,d}$ de l'espace des variétés abéliennes ayant une polarisation de degré $d$ et linéairement rigidifiées contenant $B$, où $d$ est le degré d'une polarisation sur $B$. $\square$

**Exemple 3.8.** On reprend l'exemple 2.16. D'après ce que l'on a vu, on peut appliquer le théorème 3.7 avec comme donnée de départ l'inclusion $G_g \subset \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$ pour $g \geq 1$ ce qui fournit une variété abélienne $A$ sur un corps de nombres avec un groupe de monodromie finie d'ordre $2^{r(2g,2)}$ muni d'une polarisation de degré $2^n$ pour un $n \geq 1$ du fait que $\lambda_0$ est principale.

## 4. Applications aux groupes $(p,t,a)$-inertiels et au degré de semi-stabilité

### 4.1. La réalisation des groupes $(p,t,a)$-inertiels comme groupe de monodromie finie

**4.1.1.** Dans [SZ05] Silverberg et Zarhin introduisent la notion de groupe $(p,t,a)$-inertiel dans le but d'établir la liste des groupes finis réalisables comme groupe de monodromie finie en dimension $g$.

**Définition 4.1** ([SZ05])**.** Soient $G$ un groupe fini, $p$ un nombre premier, $t$ et $a$ des entiers naturels non nuls. On dit que $G$ est $(p,t,a)$-inertiel s'il vérifie les deux propriétés suivantes

(1) $G$ est un groupe de ramification pour $p$, c'est-à-dire que $G$ s'écrit comme produit semi-direct $\Gamma_p \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $\Gamma_p$ un $p$-groupe et $n$ est premier à $p$ ;

(2) pour tous les nombres premiers $\ell \neq p$ il existe une injection
$$G \hookrightarrow \mathrm{GL}_t(\mathbf{Z}) \times \mathrm{Sp}_{2a}(\mathbf{Q}_\ell)$$
dont la première projection est indépendante de $\ell$ et les polynômes caractéristiques des deuxièmes projections de chaque élément sont à coefficients entiers indépendants de $\ell$.

Comme dit précédemment cette notion a pour but de caractériser les groupes finis qui sont groupes de monodromie finie de variétés abéliennes, voir la question 1.13 de [SZ05] pour un énoncé plus précis. Ils démontrent en particulier dans cet article que tout groupe $(p,t,a)$-inertiel pour $a+t \leq 2$ est réalisable comme groupe de monodromie finie d'une variété abélienne sur un corps local d'équicaractéristique $p$. La liste est en fait réalisable en caractéristique mixte, le dernier groupe à réaliser étant obtenu par P. Chrétien et M. Matignon dans [CM13] à l'aide d'une courbe hyperelliptique.

**4.1.2.** Dans cette partie on montre que l'on peut réaliser tout $p$-groupe $(p,t,a)$-inertiel comme sous-groupe des automorphismes d'une variété abélienne polarisée sur un corps fini. Pour cela on aura besoin de la description suivante des $\mathbf{Q}$-algèbres engendrées des représentations de $p$-groupes finis.

**Lemme 4.2.** *Soient $G$ un $p$-groupe et $V$ une représentation rationnelle de $G$. Soit $A$ la $\mathbf{Q}$-algèbre semi-simple donnée par $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}[G]} V$. Si $p$ est impair alors les facteurs simples de $A$ sont de la forme $\mathrm{M}_n(\mathbf{Q}(\mu_{p^r}))$ pour $n, r \in \mathbf{N}$.*

*Démonstration.* Cela se déduit directement de la partie 3 de [Bou04].

□

**Théorème 4.3.** *Soit $G$ un $p$-groupe $(p,t,a)$-inertiel avec $p$ impair. Alors il existe une variété semi-abélienne $A_0$ de dimension $t+a$ munie d'une polarisation $\lambda_0$ telle qu'on a une injection $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A_0, \lambda_0)$. De plus, on peut choisir $A_0$ telle que son $\varphi$-module $D$ n'admet pas de composante isotypique de pente $1/2$.*

*Démonstration.* Par définition, on dispose d'une injection $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_t(\mathbf{Z}) \times \mathrm{Sp}_{2a}(\mathbf{Q}_\ell)$ pour $\ell$ nombre premier différent de $p$ fixé. Montrons tout d'abord que l'on peut disposer du premier facteur. Soit $p_2$ la projection sur le deuxième facteur. Supposons que l'on ait une variété abélienne $B_0$ sur un corps fini $k$ telle que $p_2(G)$ s'injecte dans $\mathrm{Aut}(B_0, \lambda_0)$ pour une polarisation principale $\lambda_0$ de $B_0$. Alors, on obtient $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{G}_m^t \times B_0)$.

On suppose donc que $t = 0$ ou encore $G \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2a}(\mathbf{Q}_\ell)$. Soit $A_G$ la $\mathbf{Q}$-algèbre engendrée par $G$. L'algèbre semi-simple $A_G$ est un quotient de l'algèbre de groupe $\mathbf{Q}[G]$ donc ses facteurs simples sont décrits par le lemme 4.2. Cela résulte de l'isomorphisme canonique $\mathbf{Q}[G] \simeq \mathrm{End}_{\mathbf{Q}[G]} \mathbf{Q}[G]$ induit par la multiplication à droite. Ils sont de la forme $\mathrm{M}_n(\mathbf{Q}(\mu_{p^r}))$ et on à l'écriture
$$A_G = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{n_i}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{r_i}})).$$

Par ailleurs, l'entier algébrique $p\zeta_{p^r}$ est un $p^{2r}$-entier de Weil, qui, par la théorie de Honda-Tate, définit une variété abélienne simple $A_r$ de dimension $p^{r-1}(p-1)/2$ qui vérifie $\operatorname{End} A_r^n \otimes \mathbf{Q} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbf{Q}(\mu_{p^r}))$. Comme l'algèbre des endomorphismes est un invariant de la classe d'isomorphisme du $\varphi$-module $D_r$ associé à $A_r$ on en déduit de plus que $A_r$ n'est pas supersingulière.

Il suit que la variété semi-abélienne $A_0 = \mathbf{G}_m^t \times \prod_{i=1}^{n} A_{r_i}$ répond au problème.

$\square$

**Remarque 4.4.** L'indépendance en $\ell$ dans la définition de groupe $(p, t, a)$-inertiel assure que la $\mathbf{Q}$-algèbre obtenue dans la preuve précédente est, en fait, indépendante du choix de $\ell$.

**Corollaire 4.5.** *Soit $G$ un $p$-groupe fini qui est $(p, t, a)$-inertiel avec $p$ impair. Le groupe $G$ est le groupe de monodromie finie d'une variété abélienne de dimension $g = t + a$ sur un corps de nombres.*

*Démonstration.* D'après le théorème 2.20 on peut appliquer le théorème 3.7 avec $G$ et une variété semi-abélienne polarisée $A_0$ de dimension $g = t + a$ fournie par le théorème 4.3. $\square$

**4.1.3.** D'après [SZ05] on sait que tous les groupes $(p, t, a)$-inertiel avec $t + a = 2$ sont réalisables comme groupe de monodromie finie de variétés abéliennes en caractéristique positive. En particulier, tous ces groupes sont réalisables comme sous-groupes d'automorphismes de surfaces abéliennes polarisées sur corps fini. D'après les théorèmes 3.7 et 2.21 ils sont donc réalisables comme groupe de monodromie de surfaces abéliennes sur des corps de nombres, ce qui englobe le résultat évoqué en début de partie.

**Théorème 4.6.** *Soit $G$ un groupe $(p, t, a)$-inertiel avec $t + a = 2$. Alors il existe une variété abélienne $A$ de dimension 2 sur un corps local de caractéristique nulle $K$ telle que $G$ est le groupe de monodromie finie de $A$.*

Plus généralement, la construction établie ici donne le résultat conditionnel suivant.

**Proposition 4.7.** *Soit $G$ un groupe $(p, t, a)$-inertiel. Alors s'il existe une variété semi-abélienne polarisée $(A_0, \lambda_0)$ de dimension $g = t + a$ sur un corps fini $k$ de caractéristique $p$ avec une injection $G \hookrightarrow \operatorname{Aut}(A_0, \lambda_0)$ alors $G$ est un groupe de monodromie finie d'une variété abélienne abélienne de dimension $g$ sur un corps de nombres.*

Pour répondre positivement à la question de Silverberg et Zarhin il suffit donc de montrer que les groupes $(p, t, a)$-inertiels se réalisent comme sous-groupes des automorphismes de variétés semi-abéliennes de dimension $t + a$ et plus précisément, suite à la partie 2.1 on peut remarquer que si ce problème a une solution il a une solution avec une variété semi-abélienne produit, c'est-à-dire de la forme $\mathbf{G}_m^t \times B_0$ avec $B_0$ de dimension $a$.

## 4.2. Le degré de semi-stabilité

**4.2.1.** Le théorème 4.3 de [Phi22a] donne une forme de principe local-global pour les groupes de monodromie finie sous l'hypothèse technique que les variétés abéliennes associées doivent être munies d'une polarisation principale. Ce résultat avec la formule, du même article,

$$d(A) = \operatorname*{ppcm}_{v \in \Sigma_K} \operatorname{Card} \Phi_{A,v}$$

pour une variété abélienne sur un corps de nombres, ramène la question de la construction de variétés abéliennes avec degré de semi-stabilité maximal à son analogue local. Précisément, si l'on construit des variétés abéliennes principalement polarisées et de même dimension $A_1, \dots, A_n$ sur des corps $p$-adiques $K_1, \dots, K_n$ on obtient l'existence d'une variété abélienne $A$ sur un corps de nombres $L$ avec

$$\operatorname*{ppcm}_{i \in \{1,\dots,n\}} \operatorname{Card} \Phi_{A_i} \mid d(A).$$

Pour un entier $g \geq 1$, la construction CM faite dans [Phi22b] - voir la remarque 4.6 - donne que pour tout corps de nombres $K$ il existe une extension finie $L$ de $K$ non ramifiée aux places au-dessus de 2, des places $v_1, \dots, v_n$ de $L$ au-dessus des diviseurs premiers impairs $p_1, \dots, p_n$ de $M(2g)$, et des variétés abéliennes principalement polarisées $A_1, \dots, A_n$ vérifiant

$$\operatorname{Card} \Phi_{A_i, v_i} = p_i^{r(2g, p_i)}.$$

D'après ce qu'il précède, il est suffisant de construire une variété abélienne principalement polarisée, de dimension $g$ sur un corps 2-adique avec $\operatorname{Card} \Phi_A = 2^{r(2g,2)}$ pour établir l'égalité $d_g = M(2g)$.

**4.2.2.** La variété abélienne $A$ obtenue de l'exemple 3.8 ne convient pas a priori du fait que la polarisation $\lambda$ sur $A$ obtenue de notre construction est de degré une puissance 2. Pour palier ce défaut on donne un lemme qui permet, quitte à faire une extension finie modérément ramifiée, d'obtenir une variété abélienne isogène à $A$ qui convient. L'invariance par isogénie des groupes de monodromie finie se déduit, par exemple, du fait qu'une isogénie induit un isomorphisme au niveau des modules de Tate.

**Lemme 4.8.** *Soit $\{1\} \neq G$ un groupe fini étale abélien d'ordre une puissance d'une nombre premier $p$ sur un corps $p$-adique $K$. Alors il existe un sous-groupe cyclique non trivial $H \subset G$ défini sur une extension finie modérément ramifiée $L$ de $K$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'il existe un tel sous-groupe $H$ fixée par l'action du groupe de ramification sauvage $V_K \subset G_K$. Ce groupe étant un pro-$p$-groupe libre de rang infini, son action sur $G$ est donnée par l'action d'un quotient fini $V$ d'ordre $p^c$ pour un $c \geq 0$. On considère alors l'action induite par $V$ sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des sous-groupes cycliques d'ordre $p$ de $G$. Par un calcul élémentaire, on a

$$\operatorname{Card} K = p \operatorname{Card} \mathcal{C} - \operatorname{Card} \mathcal{C} + 1$$

où $K$ est le sous-groupe de $G$ engendré par les éléments de $G$ d'ordre $p$. Ce sous-groupe est nécessairement non trivial et d'ordre une puissance de $p$. Il suit que $\operatorname{Card} \mathcal{C}$ n'est pas divisible par $p$. Comme $\mathcal{C}$ est l'union disjointe des orbites de ses éléments sous l'action de $V$ il suit qu'au moins une orbite est de cardinal 1, les orbites non triviales étant de cardinal divisible par $p$. Autrement dit, il existe un sous-groupe cyclique $H \subset G$ fixé par l'action de $V$. □

**Corollaire 4.9.** *Soit $A$ une variété abélienne sur un corps $p$-adique $K$ muni d'une polarisation $\lambda$ de degré $d$ une puissance de $p$. Alors il existe une extension finie modérément ramifiée $L/K$ et une variété abélienne $B$ sur $L$ isogène à $A_L$ telle que $B$ admet une polarisation principale.*

*Démonstration.* Le résultat s'obtient grâce au lemme par une récurrence sur le degré $d$ de la polarisation. Si $d \geq p$ alors il existe une extension finie $L_1/K$ modérément ramifiée telle qu'un sous-groupe cyclique $H$ d'ordre $p$ du noyau de $\lambda$ soit défini sur $L_1$. La variété quotient $A_{L_1}/H$ est isogène à $A_{L_1}$ et est muni d'une polarisation de degré $d/p$. □

On peut désormais démontrer l'égalité attendue.

**Théorème 4.10.** *Pour $g \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on a*

$$d_g = M(2g).$$

*Démonstration.* D'après le théorème 4.3 de [Phi22a] et la remarque 4.6 de [Phi22b], il suffit de construire une variété abélienne $A$ principalement polarisée de dimension $g$ sur un corps 2-adique avec $\mathrm{Card}\,\Phi_A = 2^{r(2g,2)}$.
On considère la variété abélienne $A$ sur un corps 2-adique $K$ obtenue dans l'exemple 3.8. Le corollaire 4.9 appliqué à $A$ fournit une variété abélienne $B$ principalement polarisée sur une extension $L$ de $K$ finie et modérément ramifiée sur $K$ avec $B$ isogène à $A_L$. Les groupes de monodromie finie étant invariant par isogénie, la variété abélienne $B$ convient. □

**Remarque 4.11.** On obtient de plus que $d_g$ est aussi le plus petit commun multiple $d_g^{div}$ des entiers $d(A)$ lorsque $A$ varie et non pas seulement le maximum. On en donne rapidement la démonstration. De la formule

$$d(A) = \operatorname*{ppcm}_{v \in \Sigma_K} \mathrm{Card}\,\Phi_{A,v}$$

on déduit le fait que $d_g^{div}$ est le plus petit commun multiple des cardinaux des groupes de monodromie finie réalisable en dimension $g$ et l'inégalité $d_g^{div} \leq M(2g)$. Par ailleurs, l'inégalité $d_g \leq d_g^{div}$ est claire.

## 4.3. La réduction semi-stable déployée

On montre ici l'égalité $d_g = d_g^{dep}$ pour tout entier naturel $g \geq 1$ annoncée dans l'introduction. Cette partie est indépendante des autres et repose sur les propriétés connues des groupes de monodromie finie, en particulier obtenues dans [SZ98].

On considère un corps de nombres $K$ et une variété abélienne $A$ de dimension $g$ sur $K$. On dit que $A$ a réduction semi-stable déployée sur $K$ si pour toute place $v \in \Sigma_K$ la réduction $A_v$ de $A$ est l'extension d'une variété abélienne par un tore déployé. Il découle facilement du théorème de réduction semi-stable qu'il existe une extension finie $L/K$ telle que $A_L$ a réduction semi-stable déployée.

**Définition 4.12.** On pose

$$d^{dep}(A) = \min\{[L : K] \mid A_L \text{ a réduction semi-stable délpoyé}\}$$

et $d_g^{dep}$ le plus petit entier naturel tel que $d^{dep}(A) \leq d_g^{dep}$ pour toute variété abélienne $A$ de dimension $g$ sur un corps de nombres.

Il est clair que $d(A) \leq d^{dep}(A)$. Soit $L/K$ une extension finie telle que $A_L$ a réduction semi-stable. Pour une place $w \in \Sigma_L$ le rang torique de la réduction de $A_L$ en $w$ ne dépend que de la place $v$ de $K$ en-dessous de $w$ et on le note $t_v$. Pour déployer un tore de dimension $n$ il suffit d'une extension de degré au plus $M(t_v)$. On déduit directement la majoration suivante du théorème 2.4 de [Phi22a].

**Proposition 4.13.** *On a*

$$d^{dep}(A) \leq \operatorname*{ppcm}_{v \in \Sigma_K} M(t_v)\,\mathrm{Card}\,\Phi_{A,v}.$$

**Lemme 4.14.** *Pour tout $g \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et tout $n \in \{0, \dots, g\}$ on a la divisibilité*

$$M(n)^2 M(2g - 2n) \mid M(2g).$$

*Démonstration.* Cela suit directement de la divisibilité $M(a)M(b) \mid M(a+b)$ pour tous entiers naturels $a$, $b$ qui s'obtient par l'inclusion diagonale $\mathrm{GL}_a(\mathbf{Q}) \times \mathrm{GL}_b(\mathbf{Q}) \subset \mathrm{GL}_{a+b}(\mathbf{Q})$. □

**Théorème 4.15.** *Pour tout $g \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on a $d_g^{dep} = d_g$.*

*Démonstration.* L'inégalité $d_g \leq d_g^{dep}$ est triviale. Pour l'autre direction, on considère une variété abélienne $A$ de dimension $g$ sur un corps de nombres $K$. D'après la proposition 4.13 on a

$$d^{dep}(A) \leq \underset{v \in \Sigma_K}{\mathrm{ppcm}}\ M(t_v) \operatorname{Card} \Phi_{A,v}.$$

Or d'après [SZ98] Corollary 6.3 le cardinal $\operatorname{Card} \Phi_{A,v}$ divise $M(t_v)M(2g-2t_v)$. Avec le lemme 4.14 il suit $M(t_v) \operatorname{Card} \Phi_{A,v} \mid M(2g)$ d'où l'inégalité

$$d^{dep}(A) \leq M(2g).$$

□

## Références


[BM19] A. Bertapelle et N. Mazzari, « On deformations of 1-motives, » *Can. Math. Bull.*, t. 62, n° 1, p. 11-22, 2019 (cf. p. 3, 24, 26).

[Bou04] S. Bouc, « The functor of rational representations for $p$-groups, » *Adv. Math.*, t. 186, n° 2, p. 267-306, 2004 (cf. p. 3, 29).

[CM13] P. Chrétien et M. Matignon, « Maximal wild monodromy in unequal characteristic, » *J. Number Theory*, t. 133, n° 4, p. 1389-1408, 2013 (cf. p. 29).

[DOR10] J.-F. Dat, S. Orlik et M. Rapoport, *Period domains over finite and $p$-adic fields* (Cambridge Tracts in Mathematics). Cambridge University Press, Cambridge, 2010, t. 183, p. xxii+372 (cf. p. 7).

[FC90] G. Faltings et C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]). Springer-Verlag, Berlin, 1990, t. 22, p. xii+316, With an appendix by David Mumford (cf. p. 2, 3, 5, 26).

[FO22] J.-M. Fontaine et Y. Ouyang, *Theory of $p$-adic Galois representations* (Springer). unpublished, 2022, p. iv+293 (cf. p. 6, 22, 24).

[EGAIII.1] A. Grothendieck, « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I., » *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, n° 11, p. 167, 1961 (cf. p. 26).

[SGA7.1] ——, *Modèles de Néron et monodromie.* Sémin. Géom. Algébrique, Bois-Marie 1967–1969, SGA 7 I, Exp. No. 9, Lect. Notes Math. 288, 313-523. Avec un appendice par M. Raynaud, 1972 (cf. p. 2, 4, 27).

[Kim12] W. Kim, « The classification of $p$-divisible groups over 2-adic discrete valuation rings, » *Math. Res. Lett.*, t. 19, n° 1, p. 121-141, 2012 (cf. p. 24).

[Kis06] M. Kisin, « Crystalline representations and $F$-crystals, » in *Algebraic geometry and number theory*, sér. Progr. Math. T. 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, p. 459-496 (cf. p. 22-24).

[Liu12] T. Liu, « Lattices in filtered $(\phi, N)$-modules, » *J. Inst. Math. Jussieu*, t. 11, n° 3, p. 659-693, 2012 (cf. p. 23).

[Mum72] D. Mumford, « An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, » *Compositio Math.*, t. 24, p. 239-272, 1972 (cf. p. 5).

[Phi22a] S. PHILIP, « On the semi-stability degree for abelian varieties, » *Bull. Lond. Math. Soc.*, t. 54, n° 6, p. 2174-2187, 2022 (cf. p. 2, 3, 28, 30, 32).

[Phi22b] ——, « Variétés abéliennes CM et grosse monodromie finie sauvage, » *J. Number Theory*, t. 240, p. 163-195, 2022 (cf. p. 7, 31, 32).

[SZ98] A. SILVERBERG et Y. G. ZARHIN, « Subgroups of inertia groups arising from abelian varieties, » *J. Algebra*, t. 209, n° 1, p. 94-107, 1998 (cf. p. 2, 5, 27, 32, 33).

[SZ05] ——, « Inertia groups and abelian surfaces, » *J. Number Theory*, t. 110, n° 1, p. 178-198, 2005 (cf. p. 2, 3, 28-30).

[Sil09] J. H. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves* (Graduate Texts in Mathematics), Second. Springer, Dordrecht, 2009, t. 106, p. xx+513 (cf. p. 9).

[Vol01] M. VOLKOV, « Les représentations $l$-adiques associées aux courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}_p$, » *J. Reine Angew. Math.*, t. 535, p. 65-101, 2001 (cf. p. 27).



RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY, KITASHIRAKAWA-OIWAKECHO, SAKYO-KU, KYOTO 606-8502, JAPAN

*Email address*: `sphilip@kurims.kyoto-u.ac.jp`