

線形論理の誕生

照井一成

terui@kurims.kyoto-u.ac.jp

京都大学数理解析研究所

1 はじめに — 分解の精神

子供のころ、誰しも一度は機械やおもちゃの仕組みに興味を持ち、分解をしてみたことがあるだろう。そのような分解は、大抵の場合悲惨な結末に至る。分解しても何もわからなかったり、元通りに復元できなくなって親にこっぴどくしかられたり……。それでも、まれには機械の仕組みについて会得することがあり、さらにごくまれには、別の仕方でも組み立て直すことで元よりもよい機械ができあがったりする。だから、分解するのは悪いことではない。

さて、本稿の主題は論理である。数学的議論は普通、古典論理 (classical logic) にのっとって進められるが、構成的数学などの文脈では、より制限された推論のみを認める直観主義論理 (intuitionistic logic) が基本となる。直観主義論理の証明は、しばしば構成的 (constructive) であるといわれる。難しいことは抜きにして大雑把に言えば、証明をコンピュータプログラムとして見ることができるということである。これはちょっと驚くべきことだ。定理の根拠という静的な性格をもつ証明が、計算の筋道という動的な性格をもつプログラムと見なせるいうのである。その背後には一体どんな仕組みが隠されているのだろうか？

ここで我々が扱ってたつのは、子供のころと同じ分解の精神である。よくわからないものは、とりあえずばらしてみよう！この分解作業は、現代において最も影響力のある証明論者の一人、ジラルド (Jean-Yves Girard) により創始された。彼は直観主義論理を適切な仕方でも分解し、証明の構成性について多くの洞察をもたらした。そして別の仕方でも組み立て直すことにより、全く新しい論理体系を作り上げてしまったのである。それが線形論理 (linear logic, [2]) である。

線形論理は 1987 年に発表されて以来、計算機科学における論理 (logic in computer science) の分野で爆発的に広まってきた。それは線形論理が単なる一形式体系であるにとどまらず、論理と計算の本性に関わる洞察をいくつももたらしてきたからである。中でもめばしいものを挙げてみよう。

- 構成的証明の意味論に潜む線形性の発見
- 古典論理から直観主義論理への移行により失われた双対性の復活
- 計算の量的側面に対する論理的表現

- 並行的な証明・計算モデル
- 統語論に依存しないカット除去手続きの抽象的なモデル化
- 構成的な古典論理の可能性

これら多くの知見のゆえに、いまや線形論理は理論計算機科学、特にプログラミング言語基礎論の分野ではなくてはならない存在になっている。

しばしば誤って強調されているが、線形論理とは、別に「仮定を使う回数に注意を払おう」とか「命題“ A ”と命題“ A かつ A ”を区別して考えよう」とか、そういったところに本来の眼目があるのではない。また、推論の様式について何らかの教条を押し付けようというのではない。端的に言って、世に古典主義者や直観主義者はいようと、線形主義者というのは（ジラール自身も含めて）存在しないのである。そうではなく、線形論理にとって最も重要なのはまさに分解の精神そのものにあると言っても過言ではない。そこで本稿では特に直観主義論理の分解によって線形論理が生まれるに至った過程に焦点を当て、解説を試みることにする。

2 草枕 — 古典論理と直観主義論理の二律背反

「智に働けば角が立つ。情に棹させば流される」とは『草枕』の一節であるが、古典論理と直観主義論理の間にも同じようなやっかいな対立がある。古典論理の双対性を立てようとするれば構成性が失われ、直観主義論理の構成性を立てようとするれば双対性が失われる。とにかく論理学はやりにくい。しかしこの二律背反の存在こそが、線形論理の誕生に重要に関わっているのである。そこで本章ではそのあたりの事情について概観しておくことにする。

2.1 古典論理と双対性

古典論理の最大の特徴は、その双対性 (duality) にあるといつてよい。 A を含意記号 \rightarrow を含まない一階述語論理の論理式とすると、 A に対して

$$\top \iff \perp \quad \wedge \iff \vee \quad \forall \iff \exists$$

という交換操作を行って得られる論理式を A^d と書く。するとよく知られているように次のことが成り立つ。

$$A \rightarrow B \text{ が証明可能} \iff B^d \rightarrow A^d \text{ が証明可能。}$$

この双対性を反映して、古典論理の証明体系 LK は左右対称の構造を持っている。 LK の推論の基本単位はシーケントと呼ばれる $\Gamma \vdash \Delta$ の形の表現である。ここで Γ と Δ はそれぞれ論理式の列 A_1, \dots, A_m と B_1, \dots, B_n を表し、直感的には「仮定 A_1, \dots, A_m の全てが成り立つならば、結論 B_1, \dots, B_n のどれかが成り立つ」ことを意味する。 LK の推論規則は左右対称であり、特に Weakening (W) や Contraction (C) などの構造規則 (structural rules) についても、シーケン

トの左右で適用できるようになっている：

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} W \text{ 左} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} W \text{ 右} \quad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} C \text{ 左} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} C \text{ 右}$$

2.2 直観主義論理と構成性

一方、直観主義論理は証明がアルゴリズム的内容を持つことを最大の特徴とする（構成性、constructivity）。ゆえに、各証明に計算可能な関数を自然に対応させることができ、それを証明の“意味”とみなすことができる（証明の表示的意味論, denotational semantics for proofs）。

話を簡単にするために、論理結合子としては含意 \rightarrow のみを持つ直観主義命題論理を考える。まず、各命題変数 α に何らかの集合 α^* を割り当て、各含意論理式 $A \rightarrow B$ には、 $[A^* \rightarrow B^*]$ の“十分に大きな”部分集合 $(A \rightarrow B)^* \subseteq [A^* \rightarrow B^*]$ を割り当てる。ここで $[X \rightarrow Y]$ は集合 X から Y への関数全体の集まりを表すものとする。すると仮定 A_1, \dots, A_n から結論 B を導く証明 π に対して、関数

$$\pi^* : A_1^* \times \dots \times A_n^* \rightarrow B^*$$

を自然に対応させることができる。例えば、 $A, B \vdash A$ の自然な証明には関数 $F(a, b) = a$ ($a \in A^*, b \in B^*$) が対応し、 $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ の自然な証明には(汎)関数 $G(f, g) = g \circ f$ ($f \in (A \rightarrow B)^*, g \in (B \rightarrow C)^*$) が対応する。また、 π_1, π_2 をそれぞれ $C \vdash A \rightarrow B$ と $C \vdash A$ の証明とすると、両者の結論に modus ponens を適用することにより、 $C \vdash B$ の証明を得ることができるが、これには関数 $H(c) = \pi_1^*(c)(\pi_2^*(c))$ を対応させることができる。実際、 $c \in C^*$ のとき $\pi_2^*(c) \in A^*$ であり、 $\pi_1^*(c) : A^* \rightarrow B^*$ であるから、確かに $H(c) \in B^*$ となっている。

しかも、このようにして与えられた証明の“意味”は、証明の正規化（normalization, 回りくどい証明を直接的な証明へと書き換えること）の元で不変に保たれる。つまり、

(*) 証明 π_1 が証明 π_2 に書き換えられるならば、 $\pi_1^* = \pi_2^*$ である。

証明の正規化は数式の計算と類比的であり、 $3 \cdot (5 + 8) \rightarrow 3 \cdot 13 \rightarrow 39$ のようなプロセスと似通っている。このアナロジーによれば、証明の意味として (*) を満たすような不変値をとるのは自然であろう。

さて、この関数解釈がうまくいくためには一つの要請が必要である。すなわち $(A \rightarrow B)^*$ は十分に多くの関数を含んでいなければならない。実際 $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ の自然な証明を解釈するためには、 $f \in (A \rightarrow B)^*, g \in (B \rightarrow C)^*$ のときには、 $g \circ f \in (A \rightarrow C)^*$ でなければならない。この要請にどう対処するかにおいて、さまざまな表示的意味論の違いが現れてくる。

1. 最も単純な方法は、単に $(A \rightarrow B)^*$ を関数空間 $[A^* \rightarrow B^*]$ 全体と定義することである。しかしこの解釈によれば、論理式 A の複雑さが増大するにつれて集合 A^* の濃度は途方もなく大きくなってしまふ。証明は常に可算個しかないということを念頭におけば、このような解釈が証明の解釈としてはあまりにも非経済的であることがわかるだろう。非経済的な解釈

は、特に二階の量子子を解釈する際に困難に陥る。実際、二階の論理式 $\forall\alpha.A(\alpha)$ を素朴に解釈しようとするれば、

$$(\forall\alpha.A(\alpha))^* = \prod_{B: \text{論理式}} A(B)^*$$

とでもするのが妥当であろうが、これでは定義が破綻してしまっている ($\forall\alpha.A(\alpha)$ も右辺の論理式 B の一つのため)。

2. もちろんひとまず上のように定義した上で、 $(A \rightarrow B)^*$ を何らかの証明 π の解釈になっている要素 π^* の集まりに制限すれば、可算な解釈を得ることができる。しかし今問題にしたいのは、まさに証明の解釈になっている関数とはどのような関数なのかである。
3. 中間的な方法として、 $(A \rightarrow B)^*$ を A^* から B^* への計算可能な関数 (のコード) の集まりと定義することもできる (実現可能性解釈, realizability interpretation)。

直観主義論理の証明は常に計算可能な関数を表すため、最後のアプローチはうまくいく。だが、それでも計算可能な関数とはどのような性質を持つ関数なのか、という疑問が残る。そこで以下では、計算可能な関数そのものを解釈として採用するのではなく、計算可能な関数が満たすべき性質をより抽象的に捉えなおし、その考察に基づいて $(A \rightarrow B)^*$ を与えるという方針をとる。これはスコット (D. Scott) 流の領域理論 (domain theory) の根底にある考え方である。

2.3 双対性と構成性の二律背反

前節で挙げた性質 (*) は証明の表示的意味論にとって最も基本的な要請であるが、この要請を満たす形で LK の証明に自然に解釈を与えようとすると、解釈は自明なものへとつづれてしまう。このことを見ておこう。

π_1 と π_2 を二つの全く異なる $\vdash A$ の証明とする。このとき次の証明 π を考える (ラフオンの危険対, Lafont's critical pair):

$$\frac{\frac{\vdots \pi_1}{\vdash A} \text{ W 右} \quad \frac{\vdots \pi_2}{A \vdash A} \text{ W 左}}{\vdash A, A} \text{ カット} \\ \frac{\vdash A, A}{\vdash A} \text{ C 右}$$

この証明は、カット除去手続き (および Weakening-Contraction の簡略化) により π_1 へも π_2 へも書き換えが可能である。ゆえに LK にどんな (自然な) 表示的意味論を与えたとしても、要請 (*) により $\pi_1^* = \pi^* = \pi_2^*$ となってしまう、 $\vdash A$ の証明の解釈は全部同一のものになってしまう。すなわち LK は構成性という観点からすると、(証明の解釈が自明なものにつづれてしまうという意味で) 矛盾しているのである。

Lafont の危険対が発生した原因は、Weakening 規則がシークエントの左右両方に対して適用可能であるという点にある。そこで矛盾を回避するために Weakening 右規則を禁止してみてもどうだろうか。この場合、(論理規則を適切に定義すれば) シークエントの右辺には高々一つの論理式

しか含まれないようにすることができる。従って Contraction 右規則を使う機会はなくなる。このようにして制限を入れた結果得られたのがまさに直観主義論理のシーケント計算 LJ に他ならない。直観主義論理は構成性の観点から言って無矛盾である。すなわち、矛盾のない表示の意味論を考えることができる。しかしシーケントの左右対称性を放棄した結果、双対性が失われてしまったのである。

双対性をとれば構成性が失われ、構成性をとれば双対性が失われる。このように双対性と構成性は、一見したところ二律背反的に見えるが、何とかして両者を両立させる方法はないのだろうか？ その一つの解が線形論理に他ならない（もっとも何らかの代償はやはり必要なのではあるが）。

2.4 もう一つの対比：エルブランの定理と存在特性

古典論理の重要な性質としてエルブランの定理が挙げられる。簡略化して述べれば、

- $A(x)$ を量子子を含まない一階述語論理の論理式とする。もしも $\exists x A(x)$ が古典論理で証明可能ならば、ある有限個の項 t_1, \dots, t_n が存在して $A(t_1) \vee \dots \vee A(t_n)$ が証明可能である。

一方、直観主義論理においてはより強い性質・存在特性 (disjunction property) が成り立つ。

- $A(x)$ を一階述語論理の論理式とする。もしも $\exists x A(x)$ が直観主義論理で証明可能ならば、一つの項 t が存在して $A(t)$ が証明可能である。

なぜ古典論理では一般に複数個の項 t_1, \dots, t_n が必要なのに、直観主義論理ではただ一つの項 t だけで十分なのだろうか？ 実をいうとこれは、古典論理が“線形”ではなく、直観主義論理が“部分的に線形”であることと深く関係しているのである。

3 具体から抽象へ — プログラムと整合空間

3.1 有限呼び出し性と連続性

前章 2.2 節からの流れで、計算可能な関数のもつ性質を抽象的に捉えることから始めよう。話を単純にするために、以下では次のような型のプログラム M を考える。 M は部分関数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ と自然数 $m \in \mathbb{N}$ が入力として与えられたときに計算を行い、計算が停止するときには自然数 $n \in \mathbb{N}$ を出力する。ここで f はサブルーチン、あるいは計算論の言葉で言えば、神託 (oracle) に相当する。そのようなプログラムの典型例としては、反復演算 IT が挙げられる。 IT は部分関数 f と自然数 m が入力として与えられたとき、0 に対して f を m 回適用した結果を出力する：

$$IT(f, m) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_m(0).$$

いま、自然数 \mathbb{N} 上の部分関数の集合を $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ と書くことにすると、上のようなプログラム M に対して、部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次のように対応させることができる：

$F(f, m) = n \iff M$ は部分関数 f と自然数 m が与えられたときに n を出力して停止する。

さて、プログラム M の実行についてまず言えるのは、次のことである。もしも $M(f, m)$ が停止するならば、その計算過程においてサブルーチン f は高々有限回しか呼び出されることはない。ゆえに、 m に依存してある有限個の値 $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ が存在し、部分関数 f はこれらについてさえ定義されていれば十分だということになる。

もう一つ、次のことも言える。もしも $M(f, m)$ が停止し、 n を出力するならば、 f の拡張になっている (f よりも多くの値について停止する) どんなサブルーチン g についても $M(g, m) = n$ となる。このことも明らかであろう。

これらとはとりわけ計算可能な関数について成り立つ性質であるが、この性質を任意の部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ について述べなおしておこう。以下、関数をそのグラフと同一視し、 $f \subseteq g$ は f が g の部分関数であることを表すものとする。また、 $f \subseteq_{fin} g$ は f が g の有限の (すなわち有限個の値についてのみ定義されている) 部分関数であることを表す。

有限呼び出し性 (finite call property) : 任意の $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ について、 $F(f, m) = n$ ならば、ある $g \subseteq_{fin} f$ が存在し、 $F(g, m) = n$.

単調性 (monotonicity) : 任意の $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ について、 $F(f, m) = n$, $f \subseteq g$ ならば $F(g, m) = n$.

有限呼び出し性はコンピュータプログラムとその実行について当てはまる操作的 (operational) な性質であるが、これは実は連続性という、より数学的な道具立てを用いて捉えなおすことが可能である。そのための準備として、まずは部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対して、(全域) 関数 $\hat{F} : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ を一対一に対応させる (この操作をカーリー化 (Currying) という):

$$\hat{F}(f) = \{(m, n) | F(f, m) = n\}$$

さて、関数 $G : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ について次の性質を考える。

連続性 (continuity) : 任意の有向和 $f = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$ について、 $G(f) = \bigcup_{i \in I} G(g_i)$.

ただし、集合族 $\{g_i\}_{i \in I}$ が有向 (directed) であるとは、どんな $i, j \in I$ についてもある $k \in I$ が存在し $g_i, g_j \subseteq g_k$ が成り立つこととする。有向和 (directed union) $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$ とは有向集合族 $\{g_i\}_{i \in I}$ の和に他ならない。

連続性は単調性 $f \subseteq g \implies F(f) \subseteq F(g)$ を含意する。さらに次のことが成り立つ。

定理 3.1 部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が単調かつ有限呼び出し性を持つための必要十分条件は、 $\hat{F} : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ が連続なことである。

証明 (\implies) f を有向和 $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$ とするとき、単調性から $\bigcup_{i \in I} \hat{F}(g_i) \subseteq \hat{F}(f)$ がいえる。また $(m, n) \in \hat{F}(f)$ とすると、 $F(f, m) = n$ であるから、有限呼び出し性よりある $h \subseteq_{fin} f$ について $F(h, m) = n$ となる。 h は $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$ の有限部分集合であるから、ある有限個の g_1, \dots, g_k の和の部分集合になっているはずである。よって $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$ の有向性により $h \subseteq g_l$ となる g_l ($l \in I$) が存在

する。そして F の単調性により $F(g_l, m) = n$ であるが、これは $(m, n) \in \hat{F}(g_l) \subseteq \bigcup_{i \in I} \hat{F}(g_i)$ を意味する。

(\Leftarrow) 任意の部分関数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ はその有限部分の有向和として表すことができる：

$$f = \bigcup^\uparrow \{g \mid g \subseteq_{fin} f\}.$$

有限呼び出し性はこのことからただちに帰結する。 ■

このように、有限呼び出し性のような操作的な性質を連続性（極限の保存）のような数学的な性質でもって置き換えようというのが領域理論の根本的なアイデアである。

3.2 確定呼び出し性と安定性

プログラム M が乱数や確率的振る舞い、非決定的分岐などを含まない決定的 (deterministic) プログラムであり、さらに二つ以上の処理を並行的に行うことのないような逐次的 (sequential) プログラムであるとする。このときには、その実行過程についてさらに次のことが言える。もしも $M(f, m)$ が停止するならば、その計算過程におけるサブルーチン f の呼び出し方は確定している。すなわち、 $f \in [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ と $m \in \mathbb{N}$ が与えられたとき

$k \in K \iff M(f, m)$ の実行過程においてサブルーチン f が k を引数として呼び出される。

を成り立たしめるような集合 $K \subseteq \mathbb{N}$ がただ一つ存在する。

この性質はとりわけ決定的・逐次的プログラムについて成り立つ性質であるが、任意の部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ について述べ直しておこう。

確定呼び出し性 (definite call property) : $F(f, m) = n$ ならば、 $g \subseteq f$ かつ $F(g, m) = n$ を満たす部分関数 g の中で最小のものがただ一つ存在する。

確定呼び出し性を持たないプログラムの代表例に並行選言 (parallel-or) がある。並行選言プログラム POR を便宜上 $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の型に合わせて書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} POR(f, m) &= 1 && f(0) = 1 \text{ のとき} \\ &= 1 && f(1) = 1 \text{ のとき} \\ &= 0 && f(0) = f(1) = 0 \text{ のとき} \\ &\rightarrow loop && \text{それ以外のとき} \end{aligned}$$

プログラム POR はサブルーチン f を並列的に呼び出して $f(0)$ と $f(1)$ を計算する。そしてもしもどちらか一方でも停止して 1 を出力するならば、全体も即座に停止して 1 を出力する。

このプログラムが確定呼び出し性を満たさないことは、次のようにして確かめることができる。今、部分関数 f について $f(0) = f(1) = 1$ が成り立つとする。このとき $POR(f, m) = 1$ が成り立つ。しかし $POR(g, m) = 1$ かつ $g \subseteq f$ を成り立たせる極小の g は二通り存在する。すなわち $\{(0, 1)\} \subseteq f$ と $\{(1, 1)\} \subseteq f$ である。ゆえに POR は確定呼び出し性を満たさない。

確定呼び出し性は再び操作的な性質なので、これを数学的性質で言い換えることを考える。そのようにして得られるのが、ベリー (G. Berry) による安定性の概念である。ここでは $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ の型の関数 G についてのみ定義しておく。

安定性 (stability) : 部分関数 f と g が両立する (compatible, すなわち $f \cup g$ が再び部分関数となる) ならば、 $G(f \cap g) = G(f) \cap G(g)$.

安定性が単調性を含意することは容易に見てとることができる。さらに次の性質が成り立つ。

定理 3.2 有限呼び出し性を満たす部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を考える。 F が単調性・確定呼び出し性をもつための必要十分条件は、 $\hat{F} : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ が安定性を持つことである。

証明 (\Rightarrow) f と g を両立する部分関数とする。単調性より $\hat{F}(f \cap g) \subseteq \hat{F}(f) \cap \hat{F}(g)$ は明らか。また $(m, n) \in \hat{F}(f) \cap \hat{F}(g)$ とすると $F(f, m) = n$ 、 $F(g, m) = n$ であり単調性より $F(f \cup g, m) = n$ が言える。確定呼び出し性により $h \subseteq f \cup g$ かつ $F(h, m) = n$ となる部分関数の中で最小のものが唯一つ定まる。最小性より $h \subseteq f \cap g$ 。よって単調性より $F(f \cap g, m) = n$ 、すなわち $(m, n) \in \hat{F}(f \cap g)$ 。

(\Leftarrow) $F(f, m) = n$ とする。すなわち $(m, n) \in \hat{F}(f)$ 。いま、 $g \subseteq f$ かつ $F(g, m) = n$ を満たす部分関数 g の中で極小のものを考える (有限呼び出し性より、そのような g の中には有限のものがあ、それゆえ極小のものが存在する)。 g_1, g_2 をそのような部分関数とすると g_1, g_2 は両立しており、 $(m, n) \in \hat{F}(g_1) \cap \hat{F}(g_2)$ であるから、安定性により $(m, n) \in \hat{F}(g_1 \cap g_2)$ 、つまり $F(g_1 \cap g_2, m) = n$ である。 g_1, g_2 は極小であるから、これは $g_1 = g_1 \cap g_2 = g_2$ を意味する。すなわち $g \subseteq f$ かつ $F(g, m) = n$ を満たす極小の部分関数 g は唯一つしか存在しない。 ■

連続かつ安定な関数は単に安定関数 (stable function) と呼ばれることが多い。

3.3 整合空間

連続性・安定性の概念は、より高階の汎関数へと一般化することができる。まずは $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ などの具体的な関数空間を一般化して整合空間の概念を導入する。

定義 3.3 (整合空間) 反射的な無向グラフ $X = (|X|, \circ)$ を整合空間 (coherent space) と呼ぶ。二項関係 \circ を X 上の整合関係 (coherence) という。 $a \subseteq X$ が X の完全部分グラフのとき (すなわちどんな $x, y \in a$ についても $x \circ y$ が成り立つとき) a を X のクリーク (clique) と呼び $a \sqsubset X$ と書く。 X のクリーク全体の集合、有限クリーク全体の集合をそれぞれ $C(X)$ 、 $C_{fin}(X)$ と書いて表すことにする。

部分関数空間 $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ は整合空間を用いて自然に表現することができる。実際、集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上で次の整合関係を考える：

$$(m_1, n_1) \circ (m_2, n_2) \iff m_1 = m_2 \text{ ならば } n_1 = n_2.$$

するとこの整合空間のクリークとはまさに \mathbb{N} 上の部分関数のことに他ならない。

その他の整合空間の例として次のものを挙げておく。

定義 3.4 (空空間、単位空間、直積空間)

1. 空集合 \emptyset は自明な整合空間とみなすことができる。この空間の唯一のクリークは \emptyset そのものである。この整合空間を \top と書く。
2. 単元集合 $\{\bullet\}$ も自明な整合空間とみなすことができる。この空間のクリークは \emptyset および $\{\bullet\}$ の二つのみである。この整合空間を \perp と書く。
3. $X = (|X|, \circ_X)$, $Y = (|Y|, \circ_Y)$ を整合空間とするとき、 $X \& Y = (|X \& Y|, \circ_{X \& Y})$ を次のように定義する。

$$|X \& Y| = |X| \uplus |Y| = \{(x, 1) | x \in |X|\} \cup \{(y, 2) | y \in |Y|\}$$

$$(x, 1) \circ_{X \& Y} (x', 1) \iff x \circ_X x'$$

$$(y, 2) \circ_{X \& Y} (y', 2) \iff y \circ_Y y'$$

$$(x, 1) \circ_{X \& Y} (y, 2) \text{ は常に成り立つ。}$$

整合空間をクリークの集合として見ると、 $X \& Y$ は X と Y の直積になっている。 \top がその単位元である。

さて、安定関数を任意の整合空間上の写像へと一般化しよう。

定義 3.5 (安定写像) 整合空間 X から Y への安定写像 (stable map) F とは次の性質を満たす $C(X)$ から $C(Y)$ への関数のことである。

$$1. (\text{連続性}) a = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} b_i \sqsubset X \implies F(a) = \bigcup_{i \in I} F(b_i).$$

$$2. (\text{安定性}) a \cup b \sqsubset X \implies F(a \cap b) = F(a) \cap F(b).$$

X から Y への安定写像全体の集合を $\text{Coh}(X, Y)$ と書く。

整合空間について重要なのは、 X から Y への安定写像の全体 $\text{Coh}(X, Y)$ を再び一つの整合空間として見なすことができるという性質である。しかもその整合空間は非常に経済的な形で与えることができる。その際に決定的な役割を果たすのは、連続性が有限呼び出し性 (の一般化) を含意し、安定性が確定呼び出し性 (の一般化) を含意するという事実である。より正確には、次の補題が成り立つ。

補題 3.6 X, Y を整合空間、 F を X から Y への安定写像とし、 $a \sqsubset X$ とする。このとき次のことが成り立つ。 $y \in F(a)$ ならば、 $y \in F(a_0)$ を満たす $a_0 \subseteq_{fin} a$ が存在する。またそのようなクリークの中には最小のものがただ一つ存在する。(このとき、 (a_0, y) を F に関する最小データ (minimal data) と呼ぶ。)

定義 3.7 (関数空間) $X = (|X|, \circ_X)$, $Y = (|Y|, \circ_Y)$ を整合空間とすると、 $X \Rightarrow Y = (|X \Rightarrow Y|, \circ_{X \Rightarrow Y})$ を次のように定義する。

- $|X \Rightarrow Y| = C_{fin}(X) \times |Y|$.
- $(a, x) \circ_{X \Rightarrow Y} (b, y) \iff$
 - (i) $a \cup b \sqsubset X$ ならば $x \circ_Y y$.
 - (ii) $a \cup b \sqsubset X$ で、さらに $a \neq b$ ならば $x \neq y$.

すると $\mathbf{Coh}(X, Y)$ と $X \Rightarrow Y$ のクリークの集合は“自然に” (すなわち X と Y の具体的内容に依存しない形で) 一対一に対応することがわかる。

命題 3.8 X, Y を整合空間とする。

1. $F \in \mathbf{Coh}(X, Y)$ のとき、

$$Tr(F) = \{(a, y) \mid (a, y) \text{ は } F \text{ に関する最小データである}\}$$

は $X \Rightarrow Y$ のクリークである。このクリークを F の痕跡 (trace) と呼ぶ。

2. $c \sqsubset X \Rightarrow Y$ のとき、各 $a \sqsubset X$ に対して

$$\tilde{c}(a) = \{y \mid \text{ある } a_0 \subseteq_{fin} a \text{ について } (a_0, y) \in c\}$$

と定義すると、 $\tilde{c} \in \mathbf{Coh}(X, Y)$.

3. $\widetilde{Tr(F)} = F$, $Tr(\tilde{c}) = c$.

証明

1. $(a, x), (b, y) \in Tr(F)$ とする。すると $x \in F(a)$, $y \in F(b)$ が成り立つ。もしも $a \cup b \sqsubset X$ ならば、 $F(a \cup b)$ は Y のクリークとなる。そして単調性により $x, y \in F(a \cup b)$ なので $x \circ_Y y$ が成り立つ。またさらに $a \neq b$ ならば $a \cap b \subsetneq a$ (あるいは $a \cap b \subsetneq b$) であり、安定性により $F(a \cap b) = F(a) \cap F(b)$ である。ゆえに仮に $x = y$ とすると $x \in F(a \cap b)$ となり、 (a, x) (あるいは (b, y)) が最小データであることに反する。
2. $\tilde{c}(a)$ が Y のクリークとなることは明らか。 \tilde{c} の連続性を示すために $a = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} b_i$ とする。 \tilde{c} は明らかに単調なので、 $\bigcup_{i \in I} \tilde{c}(b_i) \subseteq \tilde{c}(a)$ がいえる。逆に $x \in \tilde{c}(a)$ とすると、ある有限の $a_0 \subseteq_{fin} a$ について $(a_0, x) \in c$ である。 $\{b_i\}_{i \in I}$ の有向性からある $j \in I$ について $a_0 \subseteq b_j$. よって $x \in \tilde{c}(b_j)$ であるからこれで $x \in \bigcup_{i \in I} \tilde{c}(b_i)$ が言えた。
最後に \tilde{c} の安定性を示すために、 $a \cup b \sqsubset X$ とする。 $\tilde{c}(a \cap b) \subseteq \tilde{c}(a) \cap \tilde{c}(b)$ は明らかなので、逆を示す。いま $x \in \tilde{c}(a) \cap \tilde{c}(b)$ とすると、ある $a_0 \subseteq_{fin} a$, $b_0 \subseteq_{fin} b$ について $(a_0, x) \in c$, $(b_0, x) \in c$ である。 $a_0 \cup b_0 \sqsubset X$ なので、 $X \Rightarrow Y$ の定義から $a_0 = b_0$ でなければならない。つまり $a_0 \subseteq_{fin} a \cap b$ について $(a_0, x) \in c$ が成り立つことになる。ゆえに $x \in \tilde{c}(a \cap b)$.
3. 省略。

■

上の一対一対応は“自然”であるので、随伴性 (adjunction)

$$\mathbf{Coh}(X \& Z, Y) \cong \mathbf{Coh}(Z, X \Rightarrow Y)$$

へと自然に拡張することができる。すなわち整合空間と安定写像からなる圏 (category) は関数空間の構成について“閉じて”いる。ゆえにこれらの道具立てを用いて直観主義論理の証明に意味を与えることができる。

具体的には、原子論理式 α に対して何らかの整合空間 α^* を割り当てる。含意式 $A \rightarrow B$ は $(A \rightarrow B)^* = A^* \Rightarrow B^*$ と解釈する。この解釈は十分に多くの写像を含み、ゆえに $A_1, \dots, A_n \vdash B$ の証明 π に対して安定写像 $\pi^* \in \mathbf{Coh}(A_1^* \& \dots \& A_n^*, B^*)$ を自然に割り当てることができる。この解釈は 2.2 節の要請 (*) を満たす。そして重要なのは複雑な論理式 A に対する解釈 A^* が途方もなく大きくなったりはしないということである。実際、 A^*, B^* の濃度が可算ならば $(A \rightarrow B)^*$ の濃度も可算である。

4 Est, est, est! — 線形性の発見

4.1 線形写像

安定写像 F をクリーク a に適用するとクリーク $F(a)$ が得られる。そしてこのとき引数部 a については連続性が成り立つ。すなわち a を有向和と見なしたとき、その有向和は関数適用によって保存される。このことは定義の通りである。一方、前章で見たとおり、整合空間においては関数部 F もクリークと見なすことができる。すると自然な疑問は、この関数部 F についても連続性は成り立つのかどうかである。実をいうと関数部については連続性よりもずっと強い性質、ある種の線形性が成り立つのである。

いま、二つのクリーク $a, b \sqsubset X$ が共通部分を持たず、なおかつ $a \cup b \sqsubset X$ のとき $a \cup b$ のことを $a + b$ と書くことにする。このとき、次のことが成り立つ。

命題 4.1 $f + g \sqsubset X \Rightarrow Y, a \sqsubset X$ ならば、

$$\widetilde{f + g}(a) = \widetilde{f}(a) + \widetilde{g}(a).$$

証明 $\widetilde{f + g}(a) = \widetilde{f}(a) \cup \widetilde{g}(a)$ は容易に示すことができる。いま仮にある x が存在し $x \in \widetilde{f}(a) \cap \widetilde{g}(a)$ とすると、ある $a_1, a_2 \subseteq_{fin} a$ について $(a_1, x) \in f, (a_2, x) \in g$ となる。両方ともクリーク $f + g$ の要素なので $(a_1, x) \circ_{X \Rightarrow Y} (a_2, x)$ となるが、このことは $a_1 = a_2$ を意味する。しかしこれは f と g が共通部分を持たないという仮定に反する。 ■

このような線形性は関数部の特徴であり、引数部については一般的には成り立たない。この非対称性は、実を言うと直観主義論理のシークエント計算において、シークエントの左右が対称でない

ことと密接なかわりがある。しかしいったん直観主義論理との関係を忘れてしまえば、関数部と引数部が対称的な、すなわち引数部についても線形性が成り立つような関数を考えることができる。

定義 4.2 (線形写像) 整合空間 X から Y への線形写像 (linear map) F とは次の性質を満たす $C(X)$ から $C(Y)$ への関数のことである。

$$1. (\text{線形性}) a = \sum_{i \in I} b_i \sqsubset X \implies F(a) = \sum_{i \in I} F(b_i).$$

ここで $\sum_{i \in I} b_i$ は互いに共通部分を持たないクリーク族 $\{b_i\}_{i \in I}$ の直和 (disjoint union) を表す。 X から Y への線形写像全体の集合を $\text{Lin}(X, Y)$ と書いて表す。

線形写像が常に安定写像であるということは、容易に確かめられる。

ここで“線形”という用語はもちろん線形代数における線形性に由来する。しかし整合空間においてはスカラーが定義されていないので、ここでの線形性は単に直和の保存というだけにとどまっている。もちろん整合空間にスカラーを加えることは、やろうと思えばできるのだが、問題はそうすることにどんな意義があるのかである。

4.2 線形性と単一呼び出し性

こうして線形性という数学的性質が得られたわけであるが、これは3章で議論したようなプログラム実行の観点からすると、一体どんな操作的性質に対応するのだろうか？結論から言えばそれは次の単一呼び出し性に対応する。

サブルーチン $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 、自然数 m が与えられたとき、ある種のプログラム M はその実行過程において f をただ一度しか呼び出さない。評価関数 (evaluation)

$$EV(f, m) = f(m)$$

がまさにそのようなプログラムの典型例である。一方、そうでないプログラムの典型例は3.1節の反復演算である。

サブルーチン f をただ一度しか呼び出さないということは、別の言い方をすれば、こと $EV(f, m)$ を計算する限りにおいては、 f はただ一つの値について定義されていれば十分だということである。この性質を任意の部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ について述べ直しておく。

単一呼び出し性 (unique call property) : $F(f, m) = n$ ならば、ある $(k, l) \in f$ について $F(\{(k, l)\}, m) = n$ となる。しかもそのような $(k, l) \in f$ は各 m に対してただ一つに定まる。

定理 4.3 部分関数 $F : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が単調性・単一呼び出し性を持つための必要十分条件は、 $\hat{F} : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ が ($[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$ を整合空間を用いて表したときに) 線形性を持つことである。

証明 (⇒) $f = \sum_{i \in I} g_i$ とすると、 $\hat{F}(f) = \bigcup_{i \in I} \hat{F}(g_i)$ となることは定理 3.1 の場合と同様に示すことができるので、あとは右辺が実際には共通部分を含まない集合族の直和になっていることを示せばよい。 $i, j \in I$ について $(m, n) \in \hat{F}(g_i) \cap \hat{F}(g_j)$ とすると $F(f, m) = n$ であるから、単一呼び出し性により $F(\{(k, l)\}, m) = n$ となる $(k, l) \in f$ がただ一つに定まる。このような (k, l) はただ一つの g_h ($h \in I$) にもみ属し、その他の $g_{h'}$ については $F(g_{h'}, m) = n$ とならないことは明らかである。ゆえに $g_i = g_j$ でなければならない。

(⇐) 任意の部分関数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は単元集合の直和 $\sum \{ \{(k, l)\} \mid (k, l) \in f \}$ の形に書けることより。 ■

単一呼び出し性は、サブルーチンを二回以上呼び出すプログラムについては一般には成り立たない。線形論理の「仮定（または入力）をちょうど一回使う」という性質はまさにこの単一呼び出し性から来ているのである。

4.3 線形写像と整合空間

3.3 節で示したように、 A から B への安定写像の全体 $\text{Coh}(A, B)$ はそれと同型な整合空間 $A \Rightarrow B$ により表現することができる。同様に、 A から B への線形写像の全体 $\text{Lin}(A, B)$ に対しても、それと同型な整合空間を考えることができる。

定義 4.4 (線形関数空間) $X = (|X|, \circ_X)$, $Y = (|Y|, \circ_Y)$ を整合空間とするとき、 $X \multimap Y = (|X \multimap Y|, \circ_{X \multimap Y})$ を次のように定義する。

- $|X \multimap Y| = |X| \times |Y|$
- $(x_1, y_1) \circ_{X \multimap Y} (x_2, y_2) \iff$
 - (i) $x_1 \circ_X x_2$ ならば $y_1 \circ_Y y_2$.
 - (ii) $x_1 \circ_X x_2$ で、さらに $x_1 \neq x_2$ ならば $y_1 \neq y_2$.

すると $\text{Lin}(X, Y)$ と $X \multimap Y$ のクリークの集合は“自然に” (X と Y の具体的内容に依存しない形で) 一対一に対応することがわかる。

命題 4.5 X, Y を整合空間とする。

1. $F \in \text{Lin}(X, Y)$ のとき、

$$\text{Tr}(F) = \{(x, y) \mid y \in F(\{x\})\}$$

は $X \multimap Y$ のクリークである。

2. $c \sqsubset X \multimap Y$ のとき、各 $a \sqsubset X$ に対して

$$\tilde{c}(a) = \{y \mid \text{ある } x \in a \text{ について } (x, y) \in c\}$$

と定義すると、 $\tilde{c} \in \text{Lin}(X, Y)$.

$$3. \widetilde{Tr}(F) = F, Tr(\tilde{c}) = c.$$

証明は命題 3.8 と同様である。

$\mathbf{Coh}(X, Y)$ と $X \Rightarrow Y$ の同型性が随伴性 $\mathbf{Coh}(X \& Z, Y) \cong \mathbf{Coh}(Z, X \Rightarrow Y)$ へと拡張することができたように、 $\mathbf{Lin}(X, Y)$ と $X \rightarrow Y$ の間の同型性も随伴性へと拡張することができる。その際 \rightarrow に随伴するのは、次に定義するテンソル積である。

定義 4.6 (テンソル積) X, Y が整合空間のとき、テンソル積 (tensor product) $X \otimes Y = (|X \otimes Y|, \circ_{X \otimes Y})$ を次のように定義する。

- $|X \otimes Y| = |X| \times |Y|.$
- $(x_1, y_1) \circ_{X \otimes Y} (x_2, y_2) \iff x_1 \circ_X x_2 \text{ かつ } y_1 \circ_Y y_2.$

すると次の随伴性が得られる：

$$\mathbf{Lin}(X \otimes Z, Y) \cong \mathbf{Lin}(Z, X \rightarrow Y).$$

\rightarrow と随伴関係にある \otimes をテンソル積と呼ぶのは、もちろん線形代数とのアナロジーによるものである。他にも $X \otimes Y$ は線形代数のテンソル積と類比的な性質を満たす。

4.4 安定写像の線形分解

安定写像の整合空間 $X \Rightarrow Y$ と線形写像の整合空間 $X \rightarrow Y$ の定義を見比べてみると、両者は非常に似通っていることがわかる。実際、 $X \Rightarrow Y$ は $X \rightarrow Y$ に“指数関数的な”操作を組み込むことによって復元することが可能である。

定義 4.7 (指数関数的空間) 整合空間 $X = (|X|, \circ_X)$ が与えられたときに、 $!X = (|!X|, \circ_{!X})$ を次のように定義する。

- $|!X| = C_{fin}(X).$
- $a \circ_{!X} b \iff a \cup b \sqsubset X.$

すると定義より次のことは明らかである。

定理 4.8 (安定写像の線形分解) $X \Rightarrow Y = !X \rightarrow Y.$

これで安定写像は指数関数的空間からの線形写像と見なせることがわかった。言い換えれば、直観主義論理の含意 $A \rightarrow B$ は線形含意と指数関数演算子の組み合わせ $!A \rightarrow B$ へと分解されるに至ったのである。

4.5 双対性の復活

整合空間は有限次元ベクトル空間と非常に似通った性質をもつ。特に重要なのは双対空間の存在である。ベクトル空間についていえば、体 K 上のベクトル空間 X が与えられたときに、その双対

空間 X^* は X から K への線形写像の全体からなる。整合空間の場合にはスカラー体の概念が入っていないので、3.3 節で導入した単位整合空間 $\perp = (\{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\})$ を考え、任意の整合空間 X に対して $X \rightarrow \perp$ をその双対と考えるのである。

実際には、双対空間にはより直接的な構成法がある。そのための準備としていくつか記法を導入しておく。

整合空間 $X = (|X|, \circ)$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} x \frown y &\iff x \circ y \text{ かつ } x \neq y. \\ x \smile y &\iff x \circ y \text{ でないかまたは } x = y. \end{aligned}$$

と定義する。 $x \circ y \iff x \frown y$ または $x = y$ であるから、整合関係の定義は \circ のかわりに \frown を用いても与えることができる。

定義 4.9 (双対空間) 整合空間 $X = (|X|, \circ_X)$ が与えられたとき、その双対空間 X^\perp を

$$X^\perp = (|X|, \smile_X)$$

と定義する。

すると明らかに次のことが成り立つ。

命題 4.10 X を整合空間とすると、 $(X^\perp)^\perp = X$, $X^\perp \cong X \rightarrow \perp$.

ゆえに X^\perp を“命題” X の否定だと思えば、整合空間では二重否定律が成り立つことになる。

これまでに整合空間 \top, \perp ならびに整合空間の構成法 $X \& Y, X \otimes Y, !X$ を導入した(定義 3.4, 4.6, 4.7) が、それぞれについてその双対 $0, 1, X \oplus Y, X \wp Y, ?X$ を考えることができる。

定義 4.11 整合空間 $X = (|X|, \circ_X), Y = (|Y|, \circ_Y)$ が与えられたとき、 $0, 1, X \oplus Y, X \wp Y, ?X$ を次のように定義する。

- $0 = (\emptyset, \emptyset)$, $1 = (\{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\})$.
- $X \oplus Y = (|X| \uplus |Y|, \circ_{X \oplus Y})$. ここで

$$\begin{aligned} (x, 1) \circ_{X \oplus Y} (x', 1) &\iff x \circ_X x'. \\ (y, 2) \circ_{X \oplus Y} (y', 2) &\iff y \circ_Y y'. \\ (x, 1) \circ_{X \oplus Y} (y, 2) &\text{は常に成り立たない。} \end{aligned}$$

- $X \wp Y = (|X| \times |Y|, \circ_{X \wp Y})$. ここで整合関係 $\circ_{X \wp Y}$ は次の $\frown_{X \wp Y}$ の定義により定められる。

$$(x_1, y_1) \frown_{X \wp Y} (x_2, y_2) \iff x_1 \frown_X x_2 \text{ または } y_1 \frown_Y y_2.$$

- $?X = (|?X|, \circ_{?X})$. ここで $|?X|$ は X の有限反クリーク(つまり X^\perp の有限クリーク)の集合であり、

$$a \frown_{?X} b \iff a \cup b \text{ は } X \text{ の反クリークではない。}$$

これまでに定義した構成法について、次のようにドモルガンの法則が成り立つ。

命題 4.12 X, Y を整合空間とする。

1. $\top^\perp = \mathbf{0}$, $\perp^\perp = \mathbf{1}$.
2. $(X \& Y)^\perp = X^\perp \oplus Y^\perp$.
3. $(X \otimes Y)^\perp = X^\perp \wp Y^\perp$.
4. $(!X)^\perp = ?X^\perp$.

直積 $X \& Y$ の双対 $X \oplus Y$ は X と Y の直和に相当する。しかしテンソル積 $X \otimes Y$ の双対 $X \wp Y$ が何に相当するかは一見したところ明らかではない。重要なのは次の同値性である。

命題 4.13 X, Y を整合空間とすると、 $X \multimap Y = X^\perp \wp Y$ 。

従って $X \wp Y$ は $X^\perp \multimap Y$ と $Y^\perp \multimap X$ と書けることになる。ゆえに $X \wp Y$ のクリークは X^\perp から Y への線形写像と同等であり、同時に Y^\perp から X への線形写像とも同等であることになる。いわば“双方向の”線形写像を表すと思えばよい。

定義 3.4, 4.11 に見られるとおり、 \top の双対 $\mathbf{0}$ は \top と全く同じ整合空間であり、 \perp の双対 $\mathbf{1}$ についても同様である。これらの空間は自己双対的であり、論理的に解釈すれば「真 = 偽」が成り立つということである。ゆえに整合空間は論理的には“矛盾した”意味論であると言ってよい。しかし証明の解釈が一つにつぶれるということはない。すなわち整合空間は証明の解釈としては“無矛盾”なのであり、そのことさえ満たされていれば証明の表示的意味論としては立派に通用するのである。

4.6 テンソル積と直積

線形写像は Contraction について閉じていない。なぜならば線形写像は「各サブルーチンをちょうど一回ずつ使う」ようなプログラムに相当すると考えてよいが、Contraction を使うとそのようなプログラムから「一つのサブルーチンを二回以上使う」プログラムが簡単に構成できてしまうからである。また、線形写像は Weakening についても閉じていない。なぜならば Weakening を使うと「一度も使われないサブルーチンを含む」ようなプログラムが構成できてしまうからである。

Contraction と Weakening について閉じていないということは、論理的に言えばテンソル積に関して

$$X \multimap X \otimes X, \quad X \multimap \mathbf{1}$$

という原理が成り立たないということである。一方で直積については

$$X \multimap X \& X, \quad X \multimap \top$$

が成り立つ。($\mathbf{1}$ と \top はそれぞれ \otimes と $\&$ についての単位空間である。) しかしこのことは決して「サブルーチンを二回以上使えるような」線形写像を構成できるということではない。例えば、線

形写像 $F : (X \& X) \multimap Y$ が与えられたとき、そこから写像 $F' : X \multimap Y$ を $F'(f) = F(\langle f, f \rangle)$ と定義することができる。ここで $\langle f, g \rangle$ は二つのクリーク $f, g \sqsubset X$ の“順序対”に相当する $X \& X$ のクリークである。この場合 F' は確かに線形写像となる。しかしここには何の不思議もない。いま、 $x \in F(\langle f, g \rangle)$ とすると、線形性により $x \in F(\{v\})$ となるような $v \in \langle f, g \rangle$ が一つ定まるが、そのような v は $(v_1, 1)$ ($v_1 \in f$) の形であるか $(v_2, 2)$ ($v_2 \in g$) の形であるかのどちらかである。いわば F は最初から「各 x を求めるのに f か g のどちらか一方しか使わない」ようなプログラムなのである。このような F から始めて F' を構成したとしても、それは決して「サブルーチンを二回使う」ようなプログラムとはならない。

さてこのようにテンソル積と直積の間には大きな差があるのだが、両者は“指数関数”を用いて対応づけることができる。

命題 4.14 (指数関数的同型性) $!X \otimes !Y \cong !(X \& Y), \quad 1 \cong !\top.$

上の同型性は通常の数則 $2^x 2^y = 2^{x+y}$ の整合空間版に他ならない。この理由から、 \otimes と $\&$ はそれぞれ乗法的 (multiplicative) な演算子、加法的 (additive) な演算子と呼ばれる。そして両者を結びつける $!$ は指数関数的 (exponential) な演算子と呼ばれる。

上の命題により、指数関数演算子のもとでは、Contraction と Weakening の原理

$$!X \multimap !X \otimes !X, \quad !X \multimap 1$$

が成り立つ。実際、前者については $\{(a \cup b, (a, b)) : a \cup b \in !|X|\}$ が、後者については $\{(\emptyset, \bullet)\}$ が線形写像となる。

5 受肉 — 線形論理の誕生

これまでの流れを振り返ってみよう。直観主義論理は構成的であるため、各証明を計算可能な関数として解釈することができる。そこでまず(決定的・逐次的に)計算可能な関数の特性を抽出し、整合空間と安定写像の概念を得た。次に安定写像の関数部は“線形的”であるという点に着目し、それを引数部へ対称的に拡張することにより線形写像の概念へと至った。線形写像を用いることで、安定写像は適切に分解され、さらには整合空間の世界で双対性が再発見されることとなったのである。

以上の分解作業は意味論的なレベル(いわば“精神的”なレベル)で行われてきた。次になすべきことは、分解により得られた様々な構成要素を統語論という具体的なレベル(いわば“肉体的”なレベル)へと“受肉”させて、組み立てなおすことである。そうして線形論理は“誕生”するのである。

5.1 線形論理の統語論

まず、線形論理の論理式を定義する。整合空間の構造を反映して連言・選言・真・偽は、それぞれ加法的なもの(乗法的なもの)の二種類へと分裂することになる。また、一度分裂した加法的なもの

のと乗法的なものを再び結び付けるために、指数関数的な様相演算子 $!$ (必然性) と $?$ (可能性) が必要となる。

定義 5.1 (線形論理の論理式) 線形論理の命題論理式とは次のものである。

1. リテラル $\alpha, \alpha^\perp, \beta, \beta^\perp, \dots$ は論理式である。
2. A, B が論理式ならば、次のものも論理式である。
 - 加法的 / 乗法的結合子：

	連言	選言	真	偽
乗法的	$A \otimes B$	$A \wp B$	1	\perp
加法的	$A \& B$	$A \oplus B$	\top	0

- 指数関数的結合子： $!A, ?A$.

原子論理式 α については、その否定 α^\perp もリテラルであり、すなわち論理式である。より複雑な論理式については、否定はドモルガンの法則を用いて帰納的に定義する。例えば $1^\perp = \perp$, $(A \otimes B)^\perp = A^\perp \wp B^\perp$, $(A \wp B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp$ 等々である。また、線形含意論理式を次のように定義する。

$$A \multimap B \equiv A^\perp \wp B, \quad A \circ\multimap B \equiv (A \multimap B) \& (B \multimap A).$$

次に線形論理のシーケント計算を考える。線形論理には多くの論理結合子が含まれるので、左右両側を持つシーケントについて推論規則を導入すると、とんでもない数の推論規則が必要になる。かわりに

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n \quad \text{を} \quad \vdash A_1^\perp, \dots, A_m^\perp, B_1, \dots, B_n$$

と同一視して、右側にのみ論理式を含むようなシーケントを考える。つまり線形論理のシーケント (sequent) は、 $\vdash \Gamma$ の形である。ここで Γ は論理式の多重集合 (multiset, すなわち同一の要素を複数回含むことができるような集合) を表す。

線形論理の推論規則は表 1 の通りである。ただし $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$ のとき、 $? \Gamma \equiv ?A_1, \dots, ?A_n$ とする。シーケント $\vdash \Gamma$ をこれらの規則によって導出することができるとき、 $\vdash \Gamma$ は証明可能 (provable) であるという。

古典論理のシーケント計算 LK との最大の違いは、Weakening, Contraction などの構造規則が使えるのは $?A$ の形の論理式に限るという点である。

5.2 線形論理の基本的性質

線形論理の推論規則は、整合空間の構造を反映するように導入されたものである。ゆえに線形論理の証明は、当然のことながら整合空間上で解釈することができる。

具体的には、まず以前と同様に原子論理式 α に対して整合空間 α^* を割り当てる。この割り当てはその他の論理式へと自然に拡張できる。すると $\vdash A_1, \dots, A_n$ の証明 π に対してクリーク $\pi^* \sqsubset A_1^* \wp \dots \wp A_n^*$ を自然に対応させることができる。

$\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Identity}$	$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{Cut}$		
$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \otimes$	$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp$	$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \perp$	$\frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1}$
$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \&$	$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus 1$	$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus 2$	$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \top$
$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} ?D$	$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} ?C$	$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} ?W$	$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} !$

図1 線形論理の推論規則

さて、古典論理や直観主義論理同様、線形論理についてもカット除去定理が成り立つ。

定理 5.2 (カット除去) シークエント $\vdash \Gamma$ が証明可能ならば、 $\vdash \Gamma$ はカット規則を用いずに証明可能である。

しかもその際に用いるカット除去の手続きは、証明の解釈を不変に保ち、2.2 節の要請 (*) を満たす。すなわち、線形論理は“無矛盾な”表示の意味論を持つ。

以下に線形論理において成り立つ基本的な代数的性質をまとめておく。

- 交換律 : $A \otimes B \circ\text{-}\circ B \otimes A$, $A \oplus B \circ\text{-}\circ B \oplus A$.
- 結合律 : $(A \otimes B) \otimes C \circ\text{-}\circ A \otimes (B \otimes C)$, $(A \oplus B) \oplus C \circ\text{-}\circ A \oplus (B \oplus C)$.
- 単位元 : $\mathbf{1} \otimes A \circ\text{-}\circ A$, $\mathbf{0} \oplus A \circ\text{-}\circ A$.
- 分配律 : $A \otimes (B \oplus C) \circ\text{-}\circ (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$, $A \otimes \mathbf{0} \circ\text{-}\circ \mathbf{0}$.
- 随伴性 : $(A \otimes B \multimap C) \circ\text{-}\circ (A \multimap (B \multimap C))$.
- 指数関数的同型性 : $!A \otimes !B \circ\text{-}\circ !(A \& B)$, $\mathbf{1} \circ\text{-}\circ !\top$.

上では主に正 (positive) の結合子 ($\otimes, \oplus, \mathbf{1}, \mathbf{0}$) について成立する法則を述べた。負 (negative) の結合子 ($\wp, \&, \perp, \top$) に関する同様の法則は次の双対原理により得ることができる。

A を線形含意記号 \multimap を含まない論理式とする。 A に対して

$$\begin{array}{ll} \otimes \iff \wp & \mathbf{1} \iff \perp \\ \& \iff \oplus & \top \iff \mathbf{0} \\ ! \iff ? & \end{array}$$

という交換操作を行って得られる論理式を A^d と書くことにする。すると次のことが成り立つ。

定理 5.3 (双対原理) $A \multimap B$ が証明可能 $\iff B^d \multimap A^d$ が証明可能。

かくて直観主義論理の構成的な解釈から出発したにもかかわらず、見事古典論理同様の双対性を再発見するに至ったのである。もちろんそこには代償がある。それは連言や選言などの結合子が乗

法的なものや加法的なものに分裂してしまったこと、指数関数的な様相演算子が必要なこと、などである。

5.3 線形論理における“古典”と“直観主義”

線形論理は直観主義論理を一度分解し、組み立てなおすことにより得られた論理である。ゆえに当然のことながら直観主義論理は線形論理の内部に埋め込むことができる。その際、最も自然な翻訳方法は、4.4節で見た安定写像の線形分解を含意以外の論理結合子へと拡張することである。

定義 5.4 (直観主義論理から線形論理への翻訳) 直観主義論理の論理式から線形論理の論理式への翻訳 $^\circ$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &\equiv \alpha \\ (A \rightarrow B)^\circ &\equiv !A^\circ \multimap B^\circ & (\neg A)^\circ &\equiv !A^\circ \multimap \mathbf{0} \\ (A \wedge B)^\circ &\equiv A^\circ \& B^\circ & (A \vee B)^\circ &\equiv !A^\circ \oplus !B^\circ \end{aligned}$$

定理 5.5 A を直観主義論理の論理式とするとき、 A が直観主義論理で証明可能であることと、 A° が線形論理で証明可能であることは同値である。

実際には上の翻訳は“証明可能性”のレベルでのみならず、“証明”のレベルでも適切な埋め込みになっている。

かくして直観主義論理は線形論理の一部となった。実をいうと、古典論理も線形論理の内部で解釈可能なのであるが、デリケートな点があるのでここでは取り上げない。代わりに古典論理の特徴たるエルブランの定理と直観主義論理の特徴たる存在特性が線形論理内でどのように立ち現れるのかを見ておくことにする。

まず、これまでに導入した命題線形論理に量子子を(古典論理の場合と同様に)加え、述語線形論理を考える。するとカット除去定理は依然として成り立ち、その帰結として、次のことが得られる。

定理 5.6 (存在特性) $A(x)$ を述語線形論理の論理式とする。もしも $\exists x A(x)$ が証明可能ならば、一つの項 t が存在して $A(t)$ が証明可能である。

定理 5.7 (エルブランの定理) $A(x)$ を量子子を含まない述語線形論理の論理式とする。もしも $\exists x A(x)$ が証明可能ならば、ある有限個の項 t_1, \dots, t_n が存在して $?(A(t_1) \oplus \dots \oplus A(t_n))$ が証明可能である。

このように並べてみると、線形論理がいかに古典論理と直観主義論理の両者の特性を兼ね備えているかが見てとれるだろう。古典か直観主義かは、もはや主義主張の違いでもなければ、形式的体系の違いでもない。それらは指数関数的結合子の使い方の違いとして、純粹に線形論理内部の問題として現れてくるのである。

第二章で提示した双対性と構成性の二律背反問題にも一応かたがついたことになる。線形論理がまさに体现しているように、両者は、必ずしも相反するものではない。構造規則の使い方に注意を払うことによって、両者はともに維持することが可能なのである。

このことの帰結は計り知れない。なぜならば、それは計算に対する新しい論理的パラダイムをもたらすからである。直観主義論理においては、証明とは関数を表すものであった。すなわち型 $A \rightarrow B$ のプログラムに型 A の入力を与えることにより型 B の出力を得るという、関数的 (functional) な計算の考え方が支配的であった。入力から出力へという一方向性は、直観主義論理の非対称性に由来するものである。一方、線形論理は対称的なので、入出力の方向性やプログラムとデータの区別を考えることは、必ずしも自然なことではない。むしろ線形論理が強く示唆するのは、計算とは対話であるという考え方である。型 A のエージェントと、それに対する型 A^\perp のエージェントが対話することによって計算が進行する。両者は全く対等であり、どちらか一方がプログラムでもう一方が入力データであるというような人為的な区別は存在しない。線形論理によって、このような相互作用的 (interactive) な計算の考え方が論理の文脈にもたらされたのである。

6 それから

本稿では、線形論理の誕生に至る概念的な流れを、整合空間意味論に焦点を当てて駆け足で説明してきた。しかしもちろん、これは線形論理をめぐる物語のほんの序章に過ぎない。特に残念なのは、線形論理から生まれた真に独創的なアイデアたる証明網 (proof nets) や相互作用の幾何学 (geometry of interaction) について、紙面の都合上一切言及できなかったことである。本稿を読んで興味を持たれた方は、ぜひ [3] へと読み進んでほしい。線形論理について書かれた書物としては、[5, 6] がある。線型論理が生まれるきっかけとなった整合空間については [4] に詳しい。領域理論の専門書 [1] も整合空間および線型論理についての章を含む。

参考文献

- [1] R. Amadio and P.-L. Curien. *Domains and Lambda-Calculi*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 1998.
- [2] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, Vol. 50, pp. 1–102, 1987.
- [3] J.-Y. Girard. Linear logic: Its syntax and semantics. In J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pp. 1–42. Cambridge University Press, 1995. Proceedings of the Workshop on Linear Logic, Ithaca, New York, 1993.
- [4] J.-Y. Girard, Y. Lafont, and P. Taylor. *Proofs and Types*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7. Cambridge University Press, 1988. (著者たちのウェブサイトよりダウンロード可)
- [5] Anne S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic*. CSLI Lecture Notes 29, Center for the Study of Language and Information, Stanford, California, 1992.

[6] 竹内外史. 線型論理入門. 日本評論社, 1995.