

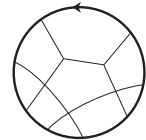
結び目の Kontsevich 不変量と Milnor move 大槻知忠 (京大数理研)

この原稿では、結び目の Milnor move によって Kontsevich 不変量や Alexander 多項式の係数がどのように変化するか、主に、既知の結果について概要を解説する。Jacobi 図や Kontsevich 不変量について [8, 9] を、clasper や C_d -move について [3, 7] を、 M_d -move (Milnor move) について [4] を、Alexander 多項式の重み系について [6] (と [1, 2]) を参照されたい。

§1. Jacobi 図

以下では、Kontsevich 不変量が属する空間である Jacobi 図の空間を導入する。各頂点が 1 価頂点か 3 価頂点であるようなグラフを 1,3 価グラフという。ここで、 n 本の辺がでている頂点を n 価頂点という。3 価頂点からでる 3 つの辺の巡回順序が指定されているとき、その 3 価頂点を有向であるという。 X を有向コンパクト 1 次元多様体とする。

X 上の Jacobi 図とは、1,3 価グラフであって、その 1 価頂点たちが X の異なる点であり、各 3 価頂点有向であるようなものである。 X を太線でかき、1,3 価グラフを細線でかく。Jacobi 図の 1,3 価頂点の個数の $\frac{1}{2}$ 倍をその Jacobi 図の次数という。1,3 価グラフの連結成分で 3 価頂点をもたないもの (線分と同相なもの) をコード (chord) という。



S^1 上の Jacobi 図

X 上の Jacobi 図の全体がはる \mathbb{Q} 上のベクトル空間を次の 3 つの関係式でわってできる商ベクトル空間を $\mathcal{A}(X)$ とかく。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{AS 関係式} & \text{IHX 関係式} & \text{STU 関係式} \\
 \text{Diagram 1} = - \text{Diagram 2} & \text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} & \text{Diagram 6} = \text{Diagram 7} - \text{Diagram 8}
 \end{array}$$

さらに、Kontsevich 不変量の定義において使われる操作である余積と対合射を以下のように導入する。有向コンパクト 1 次元多様体 $C \sqcup X$ で、その連結成分の 1 つが C で、のこりの部分が X であるようなものを考える。 $C^{(2)}$ を C の 2 つの平行なコピーの排反和として、余積 (comultiplication) $\Delta_{(C)} : \mathcal{A}(C \sqcup X) \rightarrow \mathcal{A}(C^{(2)} \sqcup X)$ を

$$\Delta_{(C)} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \downarrow \end{array} \right) = \sum^{2^k} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \downarrow \end{array}$$

で定める。ここで、左辺の図は、太線が C で、 C 上に k 個の 1 価頂点をもつ Jacobi 図を表し、右辺は、各 1 価頂点を $C^{(2)}$ のどちらかの成分につなげるすべての場合 (2^k 通り) にわたる和を表す。次に、 C の向きを逆にしたものを \bar{C} とし、対合射 (antipode) $S_{(C)} : \mathcal{A}(C \sqcup X) \rightarrow \mathcal{A}(\bar{C} \sqcup X)$ を

$$S_{(C)} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \downarrow \end{array} \right) = (-1)^k \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \uparrow \end{array}$$

で定める。ここで、左辺の図は、太線が C で、 C 上に k 個の 1 価頂点をもつ Jacobi 図を表す。

§2. 結び目の Kontsevich 不変量

以下では、枠つき結び目 \mathcal{K} の Kontsevich 不変量 $Z(\mathcal{K}) \in \mathcal{A}(S^1)$ の定義を説明する。 $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0, 1\}$ に端点をもつような、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ 中の有向タングルを考える。このようなタングルの「上端の点列」と「下端の点列」をそれぞれ2項結合する順序が定められているものを q タングルという。枠つきの q タングルを考え、枠を黒板枠で表した q タングルの図式を考える。さらに、次の q タングル図式に対して、その Kontsevich 不変量の値を次のように定める。

$$Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = \Phi, \quad Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = \Phi^{-1}, \quad Z\left(\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array}\right) = \nu^{1/2}, \quad Z\left(\begin{array}{c} \cap \\ \cap \end{array}\right) = \nu^{1/2},$$

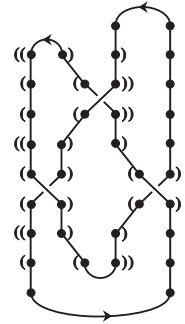
$$Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = \boxed{\exp\left(\frac{\downarrow \downarrow}{2}\right)} = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + \frac{1}{8} \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + \frac{1}{48} \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + \dots,$$

$$Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = \boxed{\exp\left(-\frac{\downarrow \downarrow}{2}\right)}.$$

ここで、 Φ と ν は次のように定める。

$$\Phi = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + \frac{1}{24} \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + (4 \text{ 次以上の項}),$$

$$\nu = \left(\boxed{S_2 \Phi} \right)^{-1} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} + \frac{1}{48} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} + (4 \text{ 次以上の項}).$$



枠つき有向結び目 \mathcal{K} について、黒板枠による \mathcal{K} の図式を q タングル図式に (たとえば、右図のように) 分解する。分解された各部分の q タングル図式の Kontsevich 不変量の値を次のようにして定める。

q タングル図式 E の成分 C を2重化することにより q タングル図式 E' が得られるとき、 $Z(E')$ の値を $\Delta_{(C)}Z(E)$ で定める。たとえば、

$$Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = \Delta_2 Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = \Delta_2 \Phi$$

のようになる。また、 q タングル図式 E の成分 C の向きを逆にすることにより q タングル図式 E'' が得られるとき、 $Z(E'')$ の値を $S_{(C)}Z(E)$ で定める。たとえば、

$$Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = S_2 Z\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = S_2 \Phi$$

のようになる。前述した q タングル図式の Kontsevich 不変量の値にこれらの操作を繰り返して適用することにより、 \mathcal{K} の図式を分解した各部分の Kontsevich 不変量の値を定め、それらを合成することにより、枠つき結び目 \mathcal{K} の Kontsevich 不変量 $Z(\mathcal{K}) \in \mathcal{A}(S^1)$ を定める。 $Z(\mathcal{K})$ は枠つき結び目 \mathcal{K} のイソトピー不変量であることが知られている ([8, 9] 参照)。

§4. Kontsevich 不変量と Alexander 多項式

線型写像 $W : \mathcal{A}(S^1) \rightarrow \mathbb{Q}$ を重み系 (weight system) という。次数 d の Jacobi 図 D に対して $\hat{W}(D) = W(D)\hbar^d$ とおくことにより写像 $\hat{W} : \mathcal{A}(S^1) \rightarrow \mathbb{Q}[[\hbar]]$ を定める。枠つき結び目の任意の量子不変量 $Q(\mathcal{K}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2N}]$ に対して、ある重み系 W を用いて $Q(\mathcal{K})|_{q=e^\hbar} = \hat{W}(Z(\mathcal{K}))$ とかけることが知られている (量子不変量に対する Kontsevich 不変量の普遍性)。

とくに、Alexander 多項式に対する重み系は、次のようにして与えられることが知られている。線型写像 $W_{B'} : B' \rightarrow \mathbb{Q}$ を、 B' の開 Jacobi 図 D に対して

$$W_{B'}(D) = \begin{cases} (-2)^c & D \text{ が } c \text{ 個の偶数本足 wheel の排反和のとき} \\ 0 & D \text{ は 2 ループ以上の連結成分をもつとき} \end{cases}$$

で定める。さらに $W = W_{B'} \circ \chi^{-1}$ で、線型写像 $W : \mathcal{A}(S^1)' \rightarrow \mathbb{Q}$ を定める。 W の値は、たとえば、

$$W\left(\text{Diagram 1}\right) = W\left(\text{Diagram 2}\right) = -2, \quad W\left(\text{Diagram 3}\right) = W\left(\text{Diagram 4}\right) = 4$$

のようになる。上の各式で、1 つ目の Jacobi 図と 2 つ目の Jacobi 図の差は 2 ループの Jacobi 図でかけるので、その W の値は 0 になることに、注意しよう。以下、 W はこの W であるとする。このとき、 K を結び目として、 K に 0 枠をいれてできる枠つき結び目を \mathcal{K} とすると、

$$\hat{W}(Z(\mathcal{K})) = \frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} \cdot \Delta_{\mathcal{K}}(e^\hbar)$$

となることが知られている ([1, 6])。

多項式またはべき級数 $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ に対して、Jacobi 図の辺の横に $f(x)$ をラベル付けしたものは次のような線型和

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \\ \text{Diagram 1} \end{array} \right\} = c_0 \left. \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right\} + c_1 \left. \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right\} + c_2 \left. \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \right\} + c_3 \left. \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array} \right\} + \dots$$

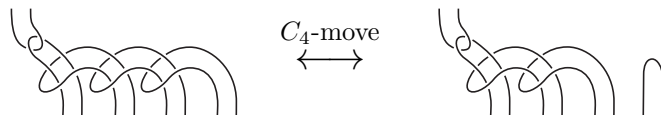
を意味するものとする。0 枠をもつ枠つき結び目 \mathcal{K} について、 $\chi^{-1}Z(\mathcal{K})$ は連結な開 Jacobi 図の無限線型和の \exp で表され、各 l について l ループの部分は e^x の有理式でラベル付けされた開 Jacobi 図の有限和で表されることが知られている (ループ展開)。ここで、 B の積は開 Jacobi 図の排反和で定める。ループ展開の 1 ループの部分は

$$\chi^{-1}Z(\mathcal{K}) = \exp \left(\frac{\frac{1}{2} \log \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x}}{\text{Diagram 10}} + \frac{-\frac{1}{2} \log \Delta_{\mathcal{K}}(e^x)}{\text{Diagram 11}} + (2 \text{ ループ以上の項}) \right)$$

の形に表される (1 ループの部分だけは、ラベルが“有理式”ではなく、上記のようになる)。上式の \exp 中の第 1 項は自明結び目の Kontsevich 不変量の値を表していて、上述の $\hat{W}(Z(\mathcal{K}))$ の式の右辺の第 1 因子もそれに由来している。つまり、Kontsevich 不変量の 1 ループの部分は実質的に Alexander 多項式で決定されている。

§5. C_d -move と Kontsevich 不変量

結び目の一部分を次の図のように変更することを C_d -move という (図は $d = 4$ の場合であるが、これを自然に一般化した図で C_d -move が定められる)。



補題 1 C_d -move によって Kontsevich 不変量の値は次のように変化する。

$$Z\left(\text{tangle with crossing}\right) - Z\left(\text{tangle without crossing}\right) = \text{tangle with crossing} + (\text{高次の項})$$

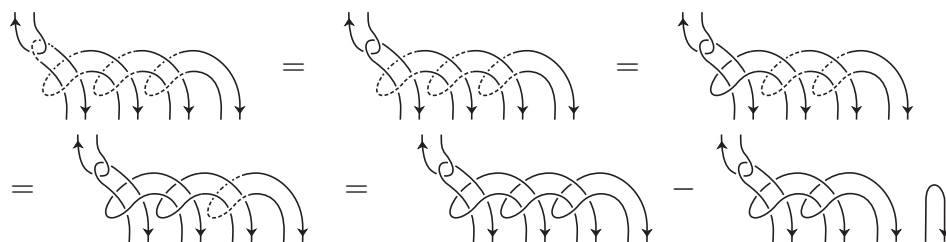
ただし、左辺のタングルを q タングルにするために、下端の点列の結合順序を指定する必要があるが、右辺第 1 項はその指定の仕方によらない (左辺の 2 つのタングルで、同じ結合順序を指定する必要がある)。

補題の証明の準備として、破線のひもが別のひもに巻き付いている部分があったときに、その図の意味を $\text{diagram} = \text{diagram} - \text{diagram}$ で定める (結び目の全体がはるベクトル空間の中での線型和を考えている)。Kontsevich 不変量の定義より具体的に計算することにより

$$Z\left(\text{diagram with crossing}\right) = \text{diagram} + (\text{高次の項})$$

であることがわかる。ここで、長円形の意味は $\text{diagram} = \text{diagram} - \text{diagram}$ で定める。

補題 1 の証明. 次の最初の図を、次のようにして計算することにより、補題の式の左辺の差が得られる。



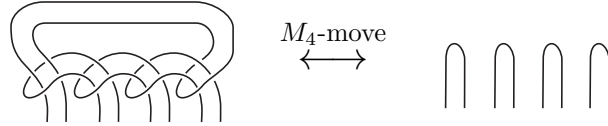
よって、 $\text{diagram} = \text{diagram}$ であることに注意して、上式の最初の図の Kontsevich 不変量を計算すると、補題の式が得られる。

$$\begin{aligned} (\text{補題の左辺}) &= Z\left(\text{tangle with crossing}\right) \\ &= \text{tangle with crossing} + (\text{高次の項}) = (\text{補題の右辺}) \end{aligned}$$

□

§6. M_d -move と Kontsevich 不変量

結び目の一部分を次の図のように変更することを M_d -move (d 次の Milnor move) という (図は $d = 4$ の場合であるが、これを自然に一般化した図で M_d -move が定められる)。

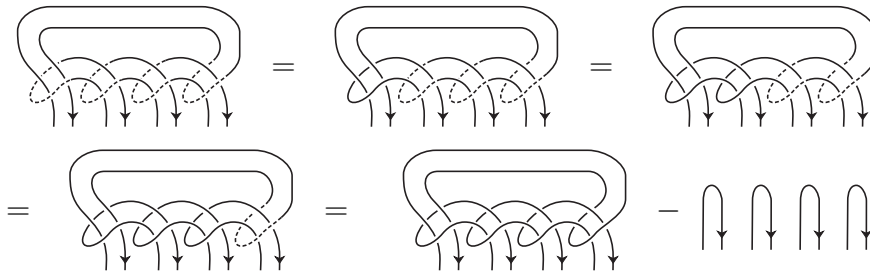


補題 2 M_d -move によって Kontsevich 不変量の値は次のように変化する。

$$Z\left(\text{left diagram}\right) - Z\left(\text{right diagram}\right) = \text{middle diagram} + (\text{高次の項})$$

ただし、補題 1 と同様に、左辺のタンゲルを q タンゲルにするために、下端の点列の結合順序を指定する必要があるが、右辺第 1 項はその指定の仕方によらない。

補題 2 の証明. 次の最初の図を、次のようにして計算することにより、補題の式の左辺の差が得られる。



よって、補題 1 の証明と同様にして、最初の図の Kontsevich 不変量を計算すると、補題の式が得られる。

$$\begin{aligned} (\text{補題の左辺}) &= Z\left(\text{left diagram}\right) \\ &= \text{middle diagram} + (\text{高次の項}) = (\text{補題の右辺}) \end{aligned}$$

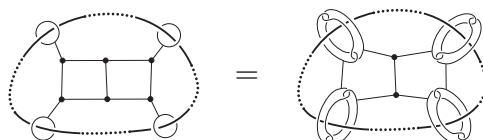
□



補題 2 より、 M_d -move は Kontsevich 不変量の $(d-1)$ 次以下の部分を変えない。よって、 M_d -move は $\Delta_K(e^h) \in \mathbb{Q}[[h]]$ の $(d-1)$ 次以下の部分を変えない。次数を下から見ていったとき、 M_d -move が変える初めの部分が次数 d の部分である。

d が偶数のとき、補題 2 より、 M_d -move は Kontsevich 不変量の d 次の部分を「 d 本足の wheel」だけ変化させる。よって、 $\Delta_K(e^h)$ の h^d の係数を ± 2 だけ変化させる。

d が奇数のとき、補題 2 より、 M_d -move は Kontsevich 不変量の次数 d の部分を「 d 本足の wheel を S^1 につけたもの」だけ変化させる。これは B の元として見ると 2 ループ以上の元であり、 $\Delta_K(e^h)$ の h^d の係数は変化しない。(この原稿の Alexander 多項式は $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ であるように正規化されており、そもそも、 $\Delta_K(e^h)$ は h の偶数乗の項のみからなる。)

上の部分にはよらないとおもわれる理由は、以下のようにして説明される。結び目 K を 2 ループ以上の graph clasper で手術することを考える (次の左図)。 K とつながっている 3 価頂点を展開すると右図のようになる。



$S^3 - K$ の無限巡回被覆 $\widetilde{S^3 - K}$ にこの clasper を lift することを考える。3 価頂点を  を  のようにこわすことによってホモロジー群は変わらないことに注意すると、この clasper 手術は $\widetilde{S^3 - K}$ のホモロジー群を変えないことがわかる。 $\widetilde{S^3 - K}$ のホモロジー群から Alexander 多項式がきまるので、よって、2 ループ以上の graph clasper の手術で Alexander 多項式は変わらない。このような clasper 手術で Kontsevich 不変量の 2 ループ以上の部分の値は自由に変わることができるので、以上より、Alexander 多項式は Kontsevich 不変量の 1 ループの部分からきまることが期待される²。

References

- [1] Bar-Natan, D., Garoufalidis, S., *On the Melvin-Morton-Rozansky conjecture*, Invent. Math. **125** (1996) 103–133.
- [2] Garoufalidis, S., Habegger, N., *The Alexander polynomial and finite type 3-manifold invariants*, Math. Ann. **316** (2000) 485–497.
- [3] Habiro, K., *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000) 1–83.
- [4] Ishikawa, T., Kobayashi, K., Shibuya, T., *On Milnor moves and Alexander polynomials of knots*, Osaka J. Math. **40** (2003) 845–855.
- [5] Kobayashi, K., Shibuya, T., Tsukamoto, T., *Simple ribbon moves for links*, Osaka J. Math. **51** (2014) 545–571.
- [6] Kriker, A., *Alexander-Conway limits of many Vassiliev weight systems*, J. Knot Theory Ramifications **6** (1997) 687–714.
- [7] Meilhan, J.-B., Yasuhara, A., *On C_n -moves for links*, Pacific J. Math. **238** (2008) 119–143.
- [8] Ohtsuki, T., *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [9] 大槻知忠, “結び目の不変量”, 共立出版, 2015 年.

606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所

メールアドレス: tomotada@kurims.kyoto-u.ac.jp

この原稿は次の URL からダウンロードすることができます。

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/paper/kook15.pdf>

²実際、前述したように、そのことは Alexander 多項式 $\Delta_K(e^h)$ の重み系を具体的に決定することにより証明される。 $\Delta_K(e^h)$ の重み系は、[1] でスケイン関係式を用いて具体的に決定され、[6] で開 Jacobi 図の言葉に書き直されて、1 ループの部分のみできまることが示された。