

2024 年 6 月

## 次元によって多様体論に個性はあるか：加筆修正版

大槻知忠

京都大学数理解析研究所

結論から述べると、現状における、 $n$  次元多様体論の個性は、「3 次元」「4 次元」「5 次元以上」で、大きく異なる。比較的小さい次元では「次元による個性」が見えているが、次元が大きくなるほど「次元による個性」は未知であって我々には見えていない、とも言える。以下で用いる、位相多様体と可微分多様体と PL 多様体の定義や、同相と微分同相と PL 同形の説明や、多様体の関する用語の説明について、この特集の他の原稿や [HSM, Mat, Oh1] を参照されたい。また、以下では、多様体は連結有向閉多様体とする。

$n$  次元多様体論において、基本的な問題は、 $n$  次元多様体の同相類の分類問題である。 $n$  次元多様体の同相類は無限個あるが、それを「分類する」とは、次のような意味である。たとえば、2 次元多様体の場合、「種数をとる」という写像

$$\{2 \text{ 次元多様体の同相類の全体} \} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

は全単射であることが知られている。ここで、 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  は、0 以上の整数の集合である。つまり、「 $n$  次元多様体の同相類の集合」から「よくわかっている集合」に全単射が構成できたとき、 $n$  次元多様体は「**分類された**」とみなされる。この写像の全単射性は、次の意味である。

(C<sub>1</sub>) すべての  $n$  次元多様体をリストアップすることができる（全射性）。

(C<sub>2</sub>) 任意の 2 つの  $n$  次元多様体と同相であるかどうかを判定できる（単射性）。

### 5 次元以上の多様体論

$n$  を 5 以上の整数とし、 $n$  次元多様体論を考える。h 同境定理により、単連結  $n$  次元多様体は、ホモトピー同値なら同相である。よって、単連結  $n$  次元多様体の同相類の分類問題は、ホモトピー同値類の分類に帰着される。単連結で閉多様体なので、 $k$  次ホモトピー群  $\pi_k$  ( $k \geq 2$ ) は有限生成アーベル群である。さらに、閉多様体（一般に、CW 複体）のときは、ホモトピー同値類は弱ホモトピー同値類<sup>1)</sup>で決定される。すなわち、その同値類は(かなり雑に言う)と部分的には<sup>2)</sup>  $(\pi_2(M), \pi_3(M), \dots, \pi_n(M))$  によって分類される。よって、「代数の間

1) 位相空間  $X$  と  $Y$  について、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が各  $k$  について  $\pi_k$  に誘導する写像が同型であるとき、 $f$  を**弱ホモトピー同値**という。弱ホモトピー同値は、一般には同値関係ではないが、 $X$  と  $Y$  が CW 複体のとき、弱ホモトピー同値ならばホモトピー同値になるので、このときは同値関係である。

2) 単連結  $n$  次元多様体  $M$  の弱ホモトピー同値類は  $(\pi_2(M), \dots, \pi_n(M))$  の同型類を定めるが、逆は必ずしも成り立たないことに、注意する。一般に、5 次元以上の 2 つの多様体がホモトピー同値であるかどうかを判定することは、ほとんど解決不可能であるくらいに困難な問題である。ホモトピー群が同型であったとしても、ホモトピー同値写像をつくるのが非常に困難であるからである。

題に帰着された」という意味で、**5 次元以上**の単連結多様体の分類問題は決着したとみなされている<sup>3)</sup>。

一方、単連結とは限らない  $n$  次元多様体の分類問題がのこされているはずであるが、後述する理由により、それらは分類不可能であることが知られている。

h 同境定理の証明の重要部分に「ホイットニーのトリック」というステップがあるが、その途中に現れる操作で「 $n$  次元空間の中で、2 次元円板と 2 次元部分空間が交わっているとき、それらを摂動することによって、その交点を解消する」という操作がある。これがつねに可能なのは「 $n \geq 5$  のとき」であり、このことにより「単連結 **5 次元以上**」の場合には特別な個性がある。

### 3 次元多様体論と 4 次元多様体論

「4 次元以上」と「3 次元以下」の多様体論は、次の点で、大きく異なる。

- **4 次元多様体の分類は不可能である。**
- **3 次元多様体の分類は可能である。**

一般に、群の有限表示について、任意の 2 つの有限表示が同型な群を表すかどうかを判定するアルゴリズムは存在しないことが知られている。一方、任意の有限表示に対して、それが表す群を基本群にもつ 4 次元多様体が、次のように構成されると、その基本群は有限生成の自由群である。有限表示の関係式に対応して、 $M$  の中に閉曲線を取り、その閉曲線にそって  $M$  を手術することにより、その有限表示が表す群を基本群にもつ 4 次元多様体を構成することができる。よって、任意の 2 つの 4 次元多様体の基本群が同型であるかどうかを判定するアルゴリズムは存在しない。さらに、そのことの帰結として、任意の 2 つの 4 次元多様体が同相であるかどうかを判定するアルゴリズム

は存在しないことが知られている ([Mar])([Sht] も参照)。したがって、4 次元多様体では、前述の  $(C_2)$  が不成立であり、**4 次元多様体は分類不可能である**<sup>4)</sup>。5 次元以上の多様体も、同様に、分類不可能である ([Mar])([Sht] も参照)。

一方、3 次元多様体に対して、上述の議論を適用しようとする、 $S^2 \times S^1$  のコピーの連結和の中に閉曲線をとることになるが、一般に、3 次元空間の中の閉曲線は結び目をつくり、その閉曲線にそって手術しても、求める基本群は得られない。4 次元空間の中の閉曲線はつねにほどくことができるが、3 次元空間の中の閉曲線は結び目をつくる、ということが、「**3 次元**」と「**4 次元**」の**決定的なちがい**になっている。

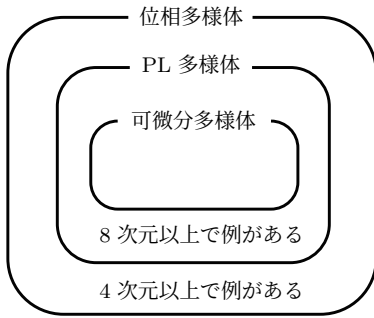
任意の 3 次元多様体は、幾何化定理により、Seifert 多様体と双曲多様体に分割される。Seifert 多様体は分類されているので、3 次元多様体の分類問題は、3 次元双曲多様体の分類に帰着される。幾何化定理の分割によって現れるのは、カスプ付き双曲多様体と閉双曲多様体であり、それらを分類すればよい。2 つのカスプ付き双曲多様体があるとき、それらの標準分割を比較することにより、それらが同相であるかどうかを判定することができる。2 つの閉双曲多様体があるとき、それらから最短閉測地線を除いたものはカスプ付き双曲多様体になり、よって、上述と同様にして、それらが同相であるかどうかを判定することができる。したがって、3 次元多様体では、前述の  $(C_2)$  が成立

3) ホモトピー群を決定することも、実際に実行するには多くの困難があるであろう。たとえば、 $M = S^k \times S^{n-k}$  のとき、 $\pi_m(M) = \pi_m(S^k) \times \pi_m(S^{n-k})$  であるが、 $\pi_m(S^k)$  を決定することは、一般には容易ではない問題であり、すべての  $(m, k)$  に対してはまだ決定されていない。

4) 単連結な 4 次元多様体の同相類は、Freedman の定理によって、分類されている。4 次元多様体の「良いクラス」を設定して、そのクラスの 4 次元多様体を研究する（たとえば、分類する）というのが、4 次元多様体の研究の 1 つの方向である。

する<sup>5)</sup>。さらに、任意の3次元多様体は3角形分割可能であり、4面体の数が少ない3次元多様体から順に、3次元多様体を列挙することは可能であり、 $(C_1)$ も原理的には成立する。したがって、**3次元多様体は分類可能である**。ただし、「3次元多様体の同相類の集合」と全単射であるような「よくわかっている集合」はまだ具体的には知られておらず、簡明な分類定理はまだ知られていない。3次元多様体の分類問題は、その意味では、まだ未解決である。

### 位相多様体と PL 多様体と可微分多様体の多様体論のちがい



図は、説明を整理するための模式的な図である。たとえば、「位相多様体」は「位相多様体の同相類の集合」の意味であり、「可微分多様体」は「可微分多様体の微分同相類の集合」の意味である。滑らかな3角形分割が与える写像

$$F_2 : \left\{ \begin{array}{c} \text{可微分多様体} \\ \text{(の微分同相類)} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{PL 多様体} \\ \text{(の PL 同形類)} \end{array} \right\}$$

は、滑らかな3角形分割の一意性より、well-definedな写像として定められ、その写像は、多様体の次元によって、単射とは限らない。また、

$$F_1 : \left\{ \begin{array}{c} \text{PL 多様体} \\ \text{(の PL 同形類)} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{位相多様体} \\ \text{(の同相類)} \end{array} \right\}$$

は、多様体の次元によって、単射とは限らない。模式図は、内側の集合が外側の集合の部分集合であることを意味するものではなく、内側の集合から

外側の集合への写像があることを意味する。

$$\{ \text{PL 多様体} \} \rightarrow \{ \text{位相多様体} \}$$

**PL 多様体**とは、おおまかに言うと、「3角形分割された多様体」である。多様体を組合せ的手法に帰着できるかどうかを問う「3角形分割問題」「基本予想」は20世紀前半に非常に基本的で重要な問題であった。

$F_1$  の全射性 (存在問題) (3角形分割問題)：任意の位相多様体に PL 構造がはいるか？

$F_1$  の単射性 (一意性問題) (基本予想)：2つの PL 多様体が同相なら、それらは PL 同形か？

全単射性ともに次の結果が知られている。

- 3次元以下で、成立する。
- 4次元以上で、反例があり、成立しない。

5次元以上で全単射性が成立しないことは、Kirby-Siebenmann (1969) の古典的な結果であり、PL 構造の存在と一意性の障害を求めることにより示される。4次元で全射性の反例は、Freedman (1982) による、 $E_8$  多様体である。4次元で単射性の反例は、Donaldson (1987) による、エキゾチック  $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$  である (エキゾチックな微分構造の存在から、エキゾチックな PL 構造の存在がわかる)。

4次元の場合、4次元可微分多様体  $M$  に対して、インスタントンのモジュライ空間 (多様体になる) という上部構造を考えることにより  $M$  の情報を得るという手法 (ゲージ理論) により、エキゾチックな微分構造の存在が示される、ということが「4次元」の顕著な個性の1つである。

$$\{ \text{可微分多様体} \} \rightarrow \{ \text{PL 多様体} \}$$

PL 多様体が微分構造をもつことの障害は  $\Gamma_k = \pi_k(\text{PL}/\text{O})$  にある。ここで、 $\Gamma_k$  は、 $(k-1)$  次元球面の微分同相写像類全体  $\pi_0(\text{Diff}^+(S^{k-1}))$  を  $k$

5) 2つの3次元多様体が同相であることが判定可能であることについて、[Lac] も参照されたい。

次元球体の微分同相写像類に拡張されるものからなる部分群でわって得られる群と同型である。

$n$  次元 PL 多様体  $M$  について、 $H^k(M, \Gamma_{k-1}) = 0$  ( $k = 2, \dots, n$ ) であれば、 $M$  の平滑化の微分構造が存在する ( $M$  の  $(k-1)$  骨格の近傍の平滑化を  $k$  骨格の近傍の平滑化に拡張する障害が  $H^k(M, \Gamma_{k-1})$  にある)。

$\Theta_n$  を  $n$  次元ホモトピー球面 (可微分多様体として) の微分同相類の集合とする。多様体の連結和により、 $\Theta_n$  は可換群になる。 $n \geq 5$  では、ホモトピー球面は球面と PL 同形なので、 $\Theta_n$  は PL 球面の微分構造の集合である。文献によって、 $\Theta_n$  は、 $n$  次元ホモトピー球面の  $h$  同境類がつくる群であると定義されていることがあるが、 $n \geq 5$  のとき、 $h$  同境定理よりその群は  $\Theta_n$  と同型であることに注意する。

$f \in \Gamma_k$  で 2 つの  $k$ -disk の境界をはって “twisted  $k$ -sphere” をつくることにより、自然な写像  $\Gamma_k \rightarrow \Theta_k$  が得られる。 $k \neq 3, 4$  のとき、この写像により、 $\Gamma_k \cong \Theta_k$  である ( $h$  同境定理の帰結)。

**$F_2$  の全射性** (平滑化の存在問題) : 任意の PL 多様体に対して、その平滑化である可微分多様体はあるか?

**$F_2$  の単射性** : (平滑化の一意性问题) 2 つの可微分多様体について、それらの滑らかな 3 角形分割が PL 同形であるとき、それらの可微分多様体は微分同相か?

次の結果が知られている。

- **6 次元以下**で、全単射性が成立。
- **7 次元**で、全射性は成立、単射性は不成立。
- **8 次元以上**で、全単射性はおおむね不成立。

$\Gamma_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) より、7 次元以下で平滑化は存在し、6 次元以下で平滑化は一意である。

7 次元の単射性の反例は、エキゾチック  $S^7$  であり、これは、 $S^4$  上のオイラー数が 2 の  $D^4$  束を

ディンキン図形  $E_8$  にそって plumbing して得られる 8 次元多様体  $W$  の境界  $M$  として構成される。 $M$  には、臨界点が 2 つのモース関数をつくることができ、よって、 $M$  は  $S^7$  と同相であり、 $S^7$  の PL 構造は一意なので、 $S^7$  と PL 同形になる。一方、 $M$  が  $S^7$  と微分同相であったと仮定すると、 $W$  に 8 次元球体をはってできる閉 8 次元可微分多様体  $\hat{W}$  に対して、Hirzebruch の符号数定理 (8 次元の場合) より、 $\frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$  が、 $\hat{W}$  の交叉形式の符号数 8 に等しいが、 $p_1 = 0$  なので、 $p_2$  の整数性に矛盾する。ここで、 $p_1, p_2$  はポントリヤギン類であり、 $p_k$  は  $4k$  次元で定義される。したがって、 $M$  はエキゾチック  $S^7$  である。

8 次元の全射性の反例は、上記の  $W$  に 8 次元 PL 球体をはってできる閉 8 次元 PL 多様体  $\check{W}$  である。上述と同様の議論により、 $\check{W}$  には、PL 構造ははいるが、微分構造ははらない。

特性類を用いて、微分構造の存在や一意性を示すときには、**「7 次元」「8 次元」が個性的な次元**である。

## エキゾチック球面

$n \geq 5$  のとき、 $\Theta_n$  は  $n$  次元 PL 球面の微分構造がつくる可換群であった。 $\Theta_n$  は有限群であり、後述のようにホモトピー論により計算可能であることが、知られている。 $5 \leq n < 140$  のとき、

$$|\Theta_n| \begin{cases} = 1 & n = 5, 6, 12, \textcolor{red}{56}, 61, \\ > 1 & n \neq 5, 6, 12, \textcolor{red}{56}, 61 \end{cases}$$

であることが知られていて、さらに、

「 $n > 6$ ,  $n \neq 12, \textcolor{red}{56}, 61$  のとき  $|\Theta_n| > 1$  か」(\*) ということが予想されている ([BHHM, IWX] 参照)。

$5 \leq n < 140$  のとき、 $n = 5, 6, 12, \textcolor{red}{56}, 61$  のとき、 $S^n$  の微分構造は一意であり、 $n$  次元微分ポアンカレ予想が成立する。 $n \neq 5, 6, 12, \textcolor{red}{56}, 61$  のとき、エキゾチック  $S^n$  が存在して、 $n$  次元微分ポア

ンカレ予想は成立しない。

$n = 4$  のとき「エキゾチック  $S^4$  の存在」と「4次元微分ポアンカレ予想」は有名な未解決問題である。

$n \geq 140$  のときは、 $n$  が奇数のとき、Wang–Xu (2017) により、予想 (\*) が成立することが示されている。また、 $n$  が偶数のとき、Behrens–Mahowald–Quigley (2023) により、 $n$  が“半分以上の偶数”のとき ( $(n \bmod 192)$  が特定の値 ( $0 < n < 192$  の半分以上の特定の偶数) のとき) 予想 (\*) が成立することが示されている。

それらの結果の証明の中では、Kervaire–Milnor (1963) による、次の完全系列

$n \not\equiv 2 \pmod{4}$  のとき

$$0 \rightarrow \Theta_n^{bp} \rightarrow \Theta_n \rightarrow \pi_n^S/J \rightarrow 0$$

$n \equiv 2 \pmod{4}$  のとき

$$0 \rightarrow \Theta_n^{bp} \rightarrow \Theta_n \rightarrow \pi_n^S/J \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \Theta_{n-1}^{bp} \rightarrow 0$$

が使われる (記号について [IWX] を参照)。とくに、 $\pi_n^S$  は球面の安定ホモトピー群である。Kervaire–Milnor (1963) によって、 $|\Theta_n^{bp}|$  は決定されているので、 $\pi_n^S/J$  を計算することにより  $|\Theta_n|$  が求められる。たとえば、 $n = 12$  のとき、安定ホモトピー群  $\pi_{12}^S$  が 0 であることより、 $\Theta_{12} = 0$  が導かれる。「12次元」が特別である根拠は、そこにある。

一般の  $n \geq 140$  のとき、 $|\Theta_n| > 1$  であれば、「エキゾチック  $S^n$  は存在」して「 $n$ 次元微分ポアンカレ予想」は不成立であるが、上述のように、最近、多くの  $n$  に対して予想 (\*) が成立することが示されており、一般の  $n \geq 140$  に対しても、そうであることが期待される。

エキゾチック  $n$  次元球面について、「4次元」「12次元」「56次元」「61次元」は個性的な次元である。もっとも、それらが個性的な次元であると言っても、たとえば、「61次元多様体論」を研究する意義のためには、そのことのためのもっと強い動機が必要であろう。

## 我々の住んでいる空間は多様体か

我々の住んでいる空間は、宇宙スケールでみるとまがっている (ユークリッド空間ではない) ということ、アインシュタインの相対論は明らかにした。相対論の世界観の空間は「局所的にはユークリッド空間であるが、大域的にはまがっている空間」、つまり「多様体」である。多様体論は、20世紀の幾何学の中心的研究テーマであった。

一方、相対論と量子論を統一する統一理論をつくるのが、長年、物理でめざされているが、まだ達成されていない。その問題点は「発散の困難」にあり、その困難を解消するための1つのアプローチとして「新しい空間概念」が必要ではないか、という方向性があり、「我々の住んでいる空間は (マクロ的に、だけではなく) ミクロ的にみてもユークリッド空間ではないのではないか？」という疑問がある<sup>6)</sup>。もし我々の住んでいる空間が「新しい空間」であった場合、その「新しい空間」が定式化された将来には、その空間の研究が、「ポスト多様体」として、幾何学の中心的研究テーマになるとおもわれる。

この原稿の内容に対して、松本幸夫先生、小島定吉先生、上正明先生、坪井俊先生、作間誠先生、山下靖さん、岸本大祐さん、秋吉宏尚さん、伊藤哲也さんから多くの有益なコメントをいただきました。深く感謝いたします。

### ●参考文献

- B[HH]M Behrens, M., Hill, M., Hopkins, M. J., Mahowald, M., *Detecting exotic spheres in low dimensions using coker  $J$* , J. Lond. Math. Soc. (2) **101** (2020) 1173–1218.
- ISM 服部晶夫, 佐藤肇, 森田茂之, 多様体のトポロジー, 幾何学百科 I, 朝倉書店, 2016 年.

6) 「22世紀の幾何学」というキーワードで検索すると、関連文献を見つけることができる。

- [W̄X̄] Isaksen, D. C., Wang, G., Xu, Z., *Stable homotopy groups of spheres: from dimension 0 to 90*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **137** (2023) 107–243.
- [Lac] Lackenby, M., *Algorithms in 3-manifold theory*, Surv. Differ. Geom. **25** International Press, Boston, MA, 2022, 163–213.
- [Mar] Markov, A. *The insolubility of the problem of homeomorphy* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **121** (1958) 218–220.
- [Mat] 松本幸夫, [新版] 4 次元のトポロジー, 日本評論社, 2016 年.
- [Oh̄1] 大槻知忠, 位相多様体と PL 多様体と可微分多様体のちがひ,  
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/paper/TPDmfd.pdf>
- [Oh̄2] 大槻知忠, 次元によって多様体論に個性はあるか, 数学セミナー 2023 年 11 月号, 日本評論社.
- [Sht] Shtan'ko, M. A. *Markov's theorem and algorithmically unrecognizable combinatorial manifolds*, Izv. Math. **68** (2004) 205–221.