アローに対する
代数的エフェクトとエフェクトハンドラ

眞田 嵩大

2023 年 6 月 8 日

目次

代数的エフェクト入門

アローと関係手 (profunctor)

アローに対する代数的エフェクトとハンドラ

代数的エフェクト

副作用を引き起こす演算がプログラムの集合に代数構造を定める

bool 型のグローバルな状態をもつプログラムを考える。演算 get : bool でその状態に保存されている値を取得できるものとする。

$$\vdash \textbf{let}\ x \Leftarrow \mathsf{get}\ \textbf{in}\ (\textbf{if}\ x\ \textbf{then}\ 0\ \textbf{else}\ 1) : \texttt{int}$$

大雑把に言って get は 2 つのプログラム

- $N[\texttt{true}/x]$
- $N[\texttt{false}/x]$

を引数にとり、1 つのプログラム $\textbf{let}\ x \Leftarrow \mathsf{get}\ \textbf{in}\ N$ をつくる「プログラム上の bool 引数の演算」である。

構文と主要な型付け規則

シグネチャ Σ の各演算には型 δ が割り当てられているとする。

構文

$$
\begin{array}{ll}
\text{型} & A ::= \mathtt{bool} \mid A \times A \mid A \to A \\
\text{型環境} & \Gamma ::= x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \\
\text{計算} & M ::= \mathtt{true} \mid \mathtt{false} \mid x \mid MM \mid \lambda x.M \\
& \quad\mid \mathbf{let}\, x \Leftarrow \mathsf{op}\ \mathbf{in}\ M \mid \ldots
\end{array}
$$

型付け規則 $\Gamma \vdash M : A$

$$
\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}
\qquad
\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}
$$

$$
\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B}
\qquad
\frac{(\mathsf{op} : \delta) \in \Sigma \quad \Gamma, x : \delta \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathbf{let}\, x \Leftarrow \mathsf{op}\ \mathbf{in}\ M : A}
$$

$$\ldots$$

表示的意味論：型 A の解釈

集合 X から自由生成された代数 $\mathrm{Term}(X)$ を解釈につかう

集合 $X \in \mathbf{Set}$ に対して $\mathrm{Term}(X) \in \mathbf{Set}$ を次を満たす最小の集合とする。

$$\frac{x \in X}{x \in \mathrm{Term}(X)} \qquad \frac{t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(X)}{\mathsf{get}(t_1, t_2) \in \mathrm{Term}(X)}$$

型 $A ::= \mathtt{bool} \mid A \times A \mid A \to A$ の表示 $[\![A]\!] \in \mathbf{Set}$ を以下で定める。

$$\begin{aligned} [\![\mathtt{bool}]\!] &:= \{\mathit{tt}, \mathit{ff}\} \\ [\![A_1 \times A_2]\!] &:= [\![A_1]\!] \times [\![A_2]\!] \\ [\![A \to B]\!] &:= \mathrm{Term}([\![B]\!])^{[\![A]\!]} \end{aligned}$$

表示的意味論：型判断 $\Gamma \vdash M : A$ の解釈

$\boxed{\Gamma \vdash M : A \text{ を } \textbf{Set} \text{ の射 } [\![M]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathsf{Term}([\![A]\!]) \text{ で解釈する}}$

$[\![\mathsf{get}]\!]_A \colon \mathsf{Term}([\![A]\!])^{[\![\mathtt{bool}]\!]} \to \mathsf{Term}([\![A]\!])$ が与えられたとする。
$\Gamma \vdash M : A$ を **Set** の射 $[\![M]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathsf{Term}([\![A]\!])$ で解釈できる。

$\boxed{\text{例}}$ 以下のように導出されているとする。

$$\frac{x \colon \mathtt{bool} \vdash N : A}{\diamond \vdash \mathbf{let}\, x \Leftarrow \mathsf{get}()\, \mathbf{in}\, N : A}$$

$[\![N]\!] \colon [\![\mathtt{bool}]\!] \to \mathsf{Term}([\![A]\!])$ であり、

$$\begin{aligned}[\![\mathbf{let}\, x \Leftarrow \mathsf{get}()\, \mathbf{in}\, N]\!] \colon 1 &\to \mathsf{Term}([\![A]\!]) \\ \star &\mapsto \mathsf{get}([\![N]\!](\mathit{tt}), [\![N]\!](\mathit{ff}))\end{aligned}$$

と解釈される。

表示的意味論：モナド

Set 上のモナド $\mathcal{T}$ と演算の解釈 $[\![\mathrm{op}]\!]_A \colon (\mathcal{T}[\![A]\!])^{[\![\delta]\!]} \to \mathcal{T}[\![A]\!]$ があれば解釈が定まる

実は $\mathrm{Term} \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は **Set** 上の（強）モナドとなる。

$$\eta_X \colon X \to \mathrm{Term}(X) \quad \mu_X \colon \mathrm{Term}(\mathrm{Term}(X)) \to \mathrm{Term}(X)$$

一般の演算 op : δ に対してその解釈

$$[\![\mathrm{op}]\!]_A \colon (\mathcal{T}A)^{[\![\delta]\!]} \to \mathcal{T}A$$

を定めれば、一般の演算を含んだ型判断 $\Gamma \vdash M : A$ の解釈

$$[\![M]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{T}[\![A]\!]$$

が定まる。

ここまでのまとめ

適当な条件をみたすカルテシアン圏 $\mathbb{C}$ と 2 圏 **Cat** のなかの強モナド
$\mathcal{T}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ がここで考えた言語のモデルとなる。
各演算 $(\mathsf{op} : \delta) \in \Sigma$ に対して、その解釈

$$[\![\mathsf{op}]\!]_A \colon (\mathcal{T}A)^{[\![\delta]\!]} \to \mathcal{T}A$$

があれば言語の解釈が定まる。

強モナド $\mathrm{Term}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ はそのようなモデルの一例である

$$\begin{aligned} [\![\mathsf{get}]\!]_A \colon \ \mathrm{Term}(X)^{[\![\mathtt{bool}]\!]} &\to \mathrm{Term}(X) \\ k &\mapsto \mathsf{get}(k(\mathit{tt}), k(\mathit{ff})) \end{aligned}$$

別の解釈の例

$$\begin{aligned} [\![\mathsf{get}]\!]_A \colon \ \mathrm{Term}(X)^{[\![\mathtt{bool}]\!]} &\to \mathrm{Term}(X) \\ k &\mapsto k(\mathit{tt}) \end{aligned}$$

ハンドラについて

エフェクトハンドラは各演算 ($\mathsf{op} : \delta) \in \Sigma$ に対してその解釈

$$[\![\mathsf{op}]\!]_A : (\mathcal{T}A)^{[\![\delta]\!]} \to \mathcal{T}A$$

を言語自体を使って定めることで、副作用を実装する方法である。

$$
\begin{aligned}
&\textbf{handle}(\textbf{let}\, x \Leftarrow \mathsf{get}\, \textbf{in}\, x)\, \textbf{with}\{\\
&\quad \textbf{ret}\, x \mapsto \textbf{if}\, x\, \textbf{then}\, 1\, \textbf{else}\, 0;\\
&\quad \mathsf{get}, k : \texttt{bool} \to \texttt{int} \mapsto k\ \texttt{true}\\
&\}
\end{aligned}
$$

$\mathsf{get}, k : \texttt{bool} \to \texttt{int} \mapsto k\ \texttt{true}$ が

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{op}]\!]_{[\![\texttt{int}]\!]} : (\mathcal{T}[\![\texttt{int}]\!])^{[\![\texttt{bool}]\!]} &\to \mathcal{T}[\![\texttt{int}]\!]\\
k &\mapsto k(tt)
\end{aligned}
$$

を定めている。

代数的エフェクト入門

アローと関係手 (profunctor)

アローに対する代数的エフェクトとハンドラ

関係手 (profunctor)

関係手とは、関係の圏論版である

集合論	圏論
関数 $f\colon A \to B$	関手 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$
関係 $r\colon B \times A \to 2$	関係手 $R\colon \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$

- 関係 $r\colon A \nrightarrow B$ とは、関数 $r\colon B \times A \to 2$ のこと。
- 関係手 $R\colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{D}$ とは、関手 $R\colon \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ のこと。

例 hom 関手 $\mathbb{I}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}(-,-)\colon \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ は関係手 $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ である。

関係手の合成

$\boxed{\text{coend によって関係の合成をまねできる}}$

関係 $r\colon A \nrightarrow B$, $s\colon B \nrightarrow C$ に対して関係の合成

$$\frac{s \circ r\colon A \nrightarrow C}{\overline{s \circ r\colon C \times A \to 2}}$$

を

$$(s \circ r)(c, a) = \bigvee_{b \in B} (s(c, b) \wedge r(b, a))$$

で定義する。

関係手 $R\colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{D}$, $S\colon \mathbb{D} \nrightarrow \mathbb{E}$ に対して関係手の合成

$$\frac{S \circ R\colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{E}}{\overline{S \circ R\colon \mathbb{E}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbf{Set}}}$$

を coend

$$(S \circ R)(E, C) = \int^{D \in \mathbb{D}} S(E, D) \times R(D, C)$$

で定義する。

恒等関係手

hom 関係手 $\mathrm{I}_{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C}(-,-) \colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ が関係手の合成 $\circ$ に対する単位元になる

$R \colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{D}$ に対して

$$\begin{aligned} R \circ \mathrm{I}_{\mathbb{C}}(D, C) &= \int^{C' \in \mathbb{C}} R(D, C') \times \mathbb{C}(C', C) \\ &\cong R(D, C) && \text{余米田の補題} \end{aligned}$$

より $R \circ \mathrm{I}_{\mathbb{C}} \cong R$

圏と関係手のなす双圏 (bicategory)

$\boxed{\text{圏と関係手によって双圏 } \mathbf{Prof} \text{ ができる}}$

双圏 Prof

- 0-cell $\mathbb{C}$: 小さい圏 $\mathbb{C}$
- 1-cell $\mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{D}$: 関係手 $R\colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{D}$
- 2-cell $R \Rightarrow S$: 関手としての自然変換 $\phi\colon R \Rightarrow S$

cf. 2 圏 **Cat**

- 0-cell $\mathbb{C}$: 小さい圏 $\mathbb{C}$
- 1-cell $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$: 関手 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$
- 2-cell $F \Rightarrow G$: 自然変換 $\phi\colon F \Rightarrow G$

アロー

アローは副作用を捉える概念

アローの Haskell の型クラスは以下のようになる (Hughes 2000)

```
class Arrow a where
  arr :: (x -> y) -> a x y
  (>>>) :: a x y -> a y z -> a x z
  first :: a x y -> a (x, z) (y, z)
```

モナドの Haskell の型クラスを思い出しておくと

```
class Monad m where
  return :: x -> m x
  (>>=) :: m x -> (x -> m y) -> m y
```

アローは強モナドである

> アローは双圏 **Prof** における強モナドである (Asada 2010)

Prof における強モナドは、関係手 $\mathcal{A} \colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ と 2-cell たち

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{I}_{\mathbb{C}}", "\shortmid"{marking}] \arrow[r, bend right, "\mathcal{A}"', "\shortmid"{marking}] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[dr, "\mathcal{A}", "\shortmid"{marking}] & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\mathcal{A}", "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{A}"', "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \mu"] & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \times \mathbb{C} \arrow[r, "\mathcal{A} \times \mathrm{I}_{\mathbb{C}}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\otimes_*"', "\shortmid"{marking}] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \sigma"] & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \arrow[d, "\otimes_*", "\shortmid"{marking}] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\mathcal{A}"', "\shortmid"{marking}] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

であって適当な公理を満たすもののこと。
アローと **Prof** における強モナドの関係：

$$
\frac{\eta_{X,Y} \colon \mathrm{I}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathcal{A}}{\mathbb{C}(X,Y) \xrightarrow{\eta_{X,Y}} \mathcal{A}(X,Y)}
\qquad
\frac{\mu \colon \mathcal{A} \circ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}}{\mathcal{A}(X,Y) \times \mathcal{A}(Y,Z) \xrightarrow{\mu_{X,Y,Z}} \mathcal{A}(X,Z)}
$$

$$
\frac{\sigma \colon \otimes_* \circ (\mathcal{A} \times \mathrm{I}_{\mathbb{C}}) \Rightarrow \mathcal{A} \circ \otimes_*}{\mathcal{A}(X,Y) \xrightarrow{\sigma_{X,Y,Z}} \mathcal{A}(X \otimes Z, Y \otimes Z)}
$$

代数的エフェクト入門

アローと関係手 (profunctor)

アローに対する代数的エフェクトとハンドラ

アローに対する代数的エフェクトとハンドラ

Prof における強モナド $\mathcal{A}$ で解釈されるような「代数的エフェクト」と「ハンドラ」を持つ言語を作れる

Arrow calculus (Lindley, Wadler and Yallop, 2011) を拡張する

型 $$A, B, C, D ::= \beta \mid A \times B \mid A \to B \mid A \rightsquigarrow B$$

型環境 $$\Gamma, \Delta ::= x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$$

項 $$\begin{aligned} M, N, L ::= {} & x \mid \langle M, N \rangle \mid \mathbf{fst}\, M \mid \mathbf{snd}\, M \\ & \mid \lambda x : A.M \mid MN \mid \lambda^{\bullet} x : A.P \end{aligned}$$

コマンド $$\begin{aligned} P, Q, R ::= {} & \lfloor M \rfloor \mid \mathbf{let}\, x \Leftarrow P\, \mathbf{in}\, Q \mid L \bullet M \\ & \mid \mathrm{op}(M) \mid \mathbf{handle}\, R\, \mathbf{with}\, H \end{aligned}$$

ハンドラ $$H ::= \{ \,;\, x \mapsto P \} \cup \{ \mathrm{op}, k \,;\, z \mapsto Q_{\mathrm{op}} \}_{\mathrm{op} \in \Sigma}$$

シグネチャ Σ にはいっている各演算 op には型 γ と δ が割り当てられている。

$$(\mathrm{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta) \in \Sigma$$

主要な型付け規則

純粋な計算 $\Gamma \vdash M : A$

$$\frac{\Gamma \mathbin{;} x : A \vdash P \mathrel{!} B}{\Gamma \vdash \lambda^{\bullet} x : A.P : A \rightsquigarrow B}$$

副作用を含んだ計算 $\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash P \mathrel{!} A$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash M : A}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash \lfloor M \rfloor \mathrel{!} A} \qquad \frac{\Gamma \vdash L : A \rightsquigarrow B \quad \Gamma, \Delta \vdash M : A}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash L \bullet M \mathrel{!} B}$$

$$\frac{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash P \mathrel{!} A \quad \Gamma \mathbin{;} x : A, \Delta \vdash Q \mathrel{!} B}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash \mathbf{let}\, x \Leftarrow P \,\mathbf{in}\, Q \mathrel{!} B} \qquad \frac{\mathsf{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta \in \Sigma \quad \Gamma, \Delta \vdash M : \gamma}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash \mathsf{op}(M) \mathrel{!} \delta}$$

$$\frac{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash P \mathrel{!} C \quad \vdash H : C \Rightarrow D}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash \mathbf{handle}\, P \,\mathbf{with}\, H \mathrel{!} D}$$

ハンドラ $\vdash H : C \Rightarrow D$

$$\frac{\Phi(C) \wedge \Phi(D) \quad \diamond \mathbin{;} x : C \vdash P \mathrel{!} D \quad (k : \delta \rightsquigarrow D \mathbin{;} z : \gamma \vdash Q_{\mathsf{op}} \mathrel{!} D)_{(\mathsf{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta) \in \Sigma}}{\vdash \{\mathbin{;} x \mapsto P\} \cup \{\mathsf{op}, k \mathbin{;} z \mapsto Q_{\mathsf{op}}\}_{\mathsf{op} \in \Sigma} : C \Rightarrow D}$$

モデル

（大雑把に言って）**Prof** における強モナド $\mathcal{A} \colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ がモデルとなる

型判断

純粋な計算	$\Gamma \vdash M : A$
副作用を含んだ計算	$\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash P \mathbin{!} A$
ハンドラ	$\vdash H : C \Rightarrow D$

強モナド $\mathcal{A}$ の η, μ, σ を使ってコマンド P の解釈を定めたい

$$[\![\Gamma \vdash M : A]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$$
$$[\![\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash P \mathbin{!} A]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![A]\!])$$

実は少々問題がある。より正確には、ccc $\mathbb{C}$ と十分余完備な ccc $\mathbb{C}'$ の間のカルテシアン関手 $J \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ に対する $\mathbb{C}$ 小な $\mathbb{C}'$-**Prof** における強モナド $\mathcal{A} \colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ がモデルとなる。

$\lfloor M \rfloor$ の解釈

導出

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash M : A}{\Gamma \,⨾\, \Delta \vdash \lfloor M \rfloor \,!\, A}$$

に対して、η を使って

$$\frac{[\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![\Delta]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\Lambda[\![M]\!]} \mathbb{C}([\![\Delta]\!], [\![A]\!]) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![A]\!])}$$

と解釈を定める

$L \bullet M$ の解釈

導出

$$\frac{\Gamma \vdash L : A \rightsquigarrow B \qquad \Gamma, \Delta \vdash M : A}{\Gamma \,⨾\, \Delta \vdash L \bullet M \,!\, B}$$

に対して、η と μ を使って

$$\frac{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![L]\!]} \mathcal{A}([\![A]\!], [\![B]\!]) \qquad [\![\Gamma]\!] \times [\![\Delta]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A]\!]}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle m, [\![L]\!] \rangle} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![A]\!]) \times \mathcal{A}([\![A]\!], [\![B]\!]) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![B]\!])}$$

と解釈を定める。ここで

$$m = \left([\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\Lambda [\![M]\!]} \mathbb{C}([\![\Delta]\!], [\![A]\!]) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![A]\!]) \right)$$

$\mathbf{let}\, x \Leftarrow P \,\mathbf{in}\, Q$ の解釈

導出

$$\frac{\Gamma \mathbin{⨟} \Delta \vdash P \,!\, A \qquad \Gamma \mathbin{⨟} x : A, \Delta \vdash Q \,!\, B}{\Gamma \mathbin{⨟} \Delta \vdash \mathbf{let}\, x \Leftarrow P \,\mathbf{in}\, Q : B}$$

に対して、η と μ と σ を使って

$$\frac{[\![P]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![A]\!]) \qquad [\![Q]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{A}([\![A]\!] \times [\![\Delta]\!], [\![A]\!])}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle d, p, [\![Q]\!] \rangle} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![\Delta]\!]^2) \times \mathcal{A}([\![\Delta]\!]^2, [\![A]\!] \times [\![\Delta]\!]) \times \mathcal{A}([\![A]\!] \times [\![\Delta]\!], [\![B]\!]) \xrightarrow{\mu\text{ を 2 回使う}} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![B]\!])}$$

と解釈を定める。ここで、

$$d = \left([\![\Gamma]\!] \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\Lambda\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle} \mathbb{C}([\![\Delta]\!], [\![\Delta]\!] \times [\![\Delta]\!]) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![\Delta]\!] \times [\![\Delta]\!]) \right)$$

$$p = \left([\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![P]\!]} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![A]\!]) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}([\![\Delta]\!]^2, [\![A]\!] \times [\![\Delta]\!]) \right)$$

$\mathsf{op}(M)$ の解釈

$\mathsf{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta \in \Sigma$ の解釈

$$[\![\mathsf{op}]\!]_A \colon \mathcal{A}([\![\delta]\!], A) \to \mathcal{A}([\![\gamma]\!], A)$$

が与えられているとする。導出

$$\frac{\mathsf{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta \in \Sigma \qquad \Gamma, \Delta \vdash M : \gamma}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash \mathsf{op}(M) \mathbin{!} \delta}$$

に対して

$$\frac{[\![M]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \times [\![\Delta]\!] \to [\![\gamma]\!]}{[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle m, o\rangle} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![\gamma]\!]) \times \mathcal{A}([\![\gamma]\!], [\![\delta]\!]) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![\delta]\!])}$$

と解釈を定める。ここで

$$m = \left([\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\Lambda[\![M]\!]} \mathbb{C}([\![\Delta]\!], [\![\gamma]\!]) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}([\![\Delta]\!], [\![\gamma]\!]) \right)$$

$$o = \left([\![\Gamma]\!] \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\Lambda \mathrm{id}} \mathbb{C}([\![\delta]\!], [\![\delta]\!]) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}([\![\delta]\!], [\![\delta]\!]) \xrightarrow{[\![\mathsf{op}]\!]_\delta} \mathcal{A}([\![\gamma]\!], [\![\delta]\!]) \right)$$

モデルの構成

$\boxed{\text{Term}: \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}\ \text{のアロー版}\ \mathrm{Arr}\ \text{をつくることができる}}$

集合 X, Y に対してクラス $\mathrm{Arr}_\Sigma(X, Y)$ を次で定める。

$$\frac{f \in \mathbf{Set}(X, Y)}{\mathrm{arr}(f) \in \mathrm{Arr}_\Sigma(X, Y)} \qquad \frac{a \in \mathrm{Arr}_\Sigma(X, Y) \quad b \in \mathrm{Arr}_\Sigma(Y, Z)}{a \ggg b \in \mathrm{Arr}_\Sigma(X, Z)}$$

$$\frac{\mathrm{op} : \gamma \rightarrow \delta \in \Sigma}{\mathrm{op} \in \mathrm{Arr}_\Sigma([\![\gamma]\!], [\![\delta]\!])} \qquad \frac{a \in \mathrm{Arr}_\Sigma(X, Y)}{\mathrm{first}_Z(a) \in \mathrm{Arr}_\Sigma(X \times Z, Y \times Z)}$$

残念なことに $\mathrm{Arr}_\Sigma(X, Y)$ は真クラスになる（$\ggg$ のせい）。

標準形を定義でき、適当な同値関係 $\sim$ を入れると任意の $\mathrm{Arr}_\Sigma(X, Y)$ の要素はある標準形と同値になる。
標準形だけを集めたもの $\mathcal{A}^\circ_\Sigma(X, Y)$ は集合になる。

モデル（**Ens-Prof** の **Set** 小な強モナド）$\mathcal{A}_\Sigma : \mathbf{Set} \nrightarrow \mathbf{Set}$ が得られる。

健全性と adequacy

$\boxed{\text{操作的意味論と表示的意味論の間の関係}}$

操作的意味論 $M \to M'$, $P \to P'$ を call-by-value で定めることができる。

$\boxed{\text{健全性}}$

- $M \to M'$ ならば $[\![M]\!] = [\![M']\!]$ である。
- $P \to P'$ ならば $[\![P]\!] = [\![P']\!]$ である。

$\boxed{\text{adequacy}}$

- $\diamond \vdash M : \mathtt{unit}$ かつ $[\![M]\!] = \star \in [\![\mathtt{unit}]\!]$ ならば $M \to^* \langle\rangle$ である。
- $\diamond \,;\, \diamond \vdash P \,!\, \mathtt{unit}$ かつ $[\![P]\!] = \mathrm{arr}(\star) \in \mathcal{A}_\Sigma(1, [\![\mathtt{unit}]\!])$ ならば $P \to^* \lfloor\langle\rangle\rfloor$ である。

adequacy の証明のためには論理関係 (logical relation) を適切に定めればよい

エフェクトハンドラについて

エフェクトハンドラは各演算 $(\mathsf{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta) \in \Sigma$ に対してその解釈

$$[\![\mathsf{op}]\!]_A : \mathcal{A}([\![\delta]\!], A) \to \mathcal{A}([\![\gamma]\!], A)$$

を言語自体を使って定めることで、プログラマが副作用を実装する方法である。

$$\frac{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash P \mathbin{!} C \qquad \vdash H : C \Rightarrow D}{\Gamma \mathbin{;} \Delta \vdash \textbf{handle}\ P\ \textbf{with}\ H \mathbin{!} D}$$

$$\frac{\diamond \mathbin{;} x : C \vdash P \mathbin{!} D \qquad (k : \delta \rightsquigarrow D \mathbin{;} z : \gamma \vdash Q_{\mathsf{op}} \mathbin{!} D)_{(\mathsf{op} : \gamma \twoheadrightarrow \delta) \in \Sigma}}{\vdash \{\mathbin{;} x \mapsto P\} \cup \{\mathsf{op}, k \mathbin{;} z \mapsto Q_{\mathsf{op}}\}_{\mathsf{op} \in \Sigma} : C \Rightarrow D}$$

$$[\![Q_{\mathsf{op}}]\!] : \mathcal{A}([\![\delta]\!], [\![D]\!]) \to \mathcal{A}([\![\gamma]\!], [\![D]\!])$$

（本当は、強モナドの σ をうまく取り扱うために、解釈にちょっとした工夫をする）

まとめ

- Arrow calculus に代数的エフェクトとハンドラを付け加えて拡張できる。
- （大雑把に言って）**Prof** における強モナド $\mathcal{A}\colon \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ がモデルとなる。
- モデルと演算の解釈 $[\![\mathsf{op}]\!]_A\colon \mathcal{A}([\![\delta]\!], A) \to \mathcal{A}([\![\gamma]\!], A)$ があれば解釈が定まる。
- 具体的なモデルとして強モナド $\mathcal{A}_\Sigma\colon \mathbf{Set} \nrightarrow \mathbf{Set}$ が構成できる。
- このようにして作られた解釈（表示的意味論）は操作的意味論と整合的である。
  - 健全性
  - adequacy
- ハンドラは、演算の解釈 $[\![\mathsf{op}]\!]_A\colon \mathcal{A}([\![\delta]\!], A) \to \mathcal{A}([\![\gamma]\!], A)$ をプログラミング言語を使って定めて、副作用を実装する方法である。