

# アローに対する代数的エフェクトとエフェクトハンドラ

真田 嵩大

オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算を提案し、その操作的意味論と表示の意味論を与える。この計算体系は Lindley, Wadler, Yallop によるアロー計算の拡張である。表示の意味論は圏と関係手 (profunctor) のなす双圏 **Prof** における強モナド  $\mathcal{A}$  を用いて与えられる。特にエフェクトハンドラは  $\mathcal{A}$  代数の間の準同型射として解釈される。操作的意味論は、 $\mathcal{A}$  代数と準同型に関する観察から与えられる。表示の意味論と操作的意味論に関する健全性と妥当性を証明できる。さらに、オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算の応用として、ニューラルネットワークの新しいプログラミング手法を提案する。

We present an arrow calculus with operations and effect handlers, and give its operational and denotational semantics. This calculus is an extension of the arrow calculus by Lindley, Wadler, and Yallop. The denotational semantics is given by using a strong monad  $\mathcal{A}$  in the bicategory **Prof** of categories and profunctors. In particular, an effect handler is interpreted as a homomorphism between  $\mathcal{A}$ -algebras. The operational semantics is given by observations on  $\mathcal{A}$ -algebras and homomorphisms. We prove soundness and adequacy of the denotational and operational semantics. Furthermore, we propose a new programming technique for neural networks as an application of the arrow calculus with operations and effect handlers.

## 1 はじめに

Hughes [6][7] は Haskell におけるモナドの拡張としてアローを導入した。アローを用いると、ある種のパーサコンビネータなどのモナドでは捉えられない計算効果を捉えることができる。Lindley ら [11] は Moggi の metalanguage [12] のアロー版としてアロー計算を導入した。圏論的理解としては、Heunen と Jacobs [5]、Jacobs ら [8]、浅田 [1] の研究によって、アローは圏と関係手のなす双圏 **Prof** における強モナドであることが明らかとなった。

一方で、Plotkin と Power [13][14] が (適当な条件を満たす) モナドに対応する計算効果の代数的見方である代数的エフェクトを提案し、Plotkin と Pretner [15] が計算効果を実装する方法 (つまり自由代数から

の準同型射) としてエフェクトハンドラを導入した。代数的エフェクトとエフェクトハンドラは、モナドに対応する計算効果を持つプログラミング言語の基礎となっている。

アローがモナドの拡張であることを考えると、代数的エフェクトとエフェクトハンドラのアロー版が構築できるかどうかということは自然な問いである。もしそれが可能ならば、アローに対応する計算効果を持つプログラミング言語の基礎を得ることができる。

Lindley [9] はアロー、イディオム、モナドに対する代数的エフェクトとエフェクトハンドラを持ったエフェクトシステム  $\lambda_{\text{flow}}$  を提案した。しかし、 $\lambda_{\text{flow}}$  は理論的基礎付けが不十分であり、それゆえに構文や型システムが奇妙である。表示の意味論も与えられておらず、エフェクトハンドラがなんらかの代数の間の準同型射であるかどうかも考察されていない。ゆえに Lindley の  $\lambda_{\text{flow}}$  がアローに対する代数的エフェクトの概念を明らかにしているとはいえない。

本研究では、まず圏と関係手のなす双圏 **Prof** にお

\*Algebraic Effects and Effect Handlers for Arrows.  
This is an unrefereed paper. Copyrights belong to the Author.  
Takahiro Sanada, 京都大学, Kyoto University.

ける強モナド  $\mathcal{A}$  を 2 圏論的な技術を使って考察し、 $\mathcal{A}$  代数とその間の準同型射がどのようなものを調べる。それにより、アローに対する代数的エフェクトとエフェクトハンドラ概念を明らかにし、Lindley ら [10] のアロー計算を拡張としてオペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算を導入する。この体系に対する表示的意味論を **(Ens-)Prof** における強モナドを使って与え、操作的意味論に対する健全性と妥当性 (adequacy) を証明する。定理証明支援系 Agda を用いてオペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算の構文、型付け規則、簡約規則を形式化し、進行定理と型保存定理を形式的に証明した。さらに、アローに対するエフェクトハンドラを用いたニューラルネットワークの新しいプログラミング手法を提案する。

## 2 準備

集合と写像のなす圏を **Set**、クラスと写像のなす圏を **Ens**、圏と関手と自然変換のなす 2 圏を **Cat** と書く。

### 2.1 Haskell におけるアロー

Hughes [6][7] は Haskell におけるモナドの一般化としてアローを導入した。アローは次の型クラスとして定義される。

```
class Arrow a where
  arr :: (x -> y) -> a x y
  (>>>) :: a x y -> a y z -> a x z
  first :: a x y -> a (x, z) (y, z)
```

モナドのインスタンスがモナド則を満たすことを要請されると同様に、アローのインスタンスはアロー則と呼ばれる等式を満たすことが要請される。

### 2.2 圏と関係手のなす双圏 Prof

アローは圏と関係手 (profunctor) のなす双圏 **Prof** における強モナドとみることができる [5][8][1]。関係手は端的に言えば、集合論における関係の概念の圏論的類似物である (表 1)。

**定義 1** (関係手 [3]).  $\mathbb{C}$  と  $\mathbb{D}$  を圏とする。  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{D}$  への関係手  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  とは、関手  $F: \mathbb{D}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Set}$

表 1 集合論的概念と圏論的概念の対応

集合論的概念	圏論的概念
関数	関手
関係	関係手

のことである。2つの関係手  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  と  $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}$  が与えられたとき、それらの合成  $G \circ F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$  は以下の余エンドで定義される。

$$(G \circ F)(E, C) = \int_{D \in \mathbb{D}} G(E, D) \times F(D, C)$$

$\mathbb{C}$  上の恒等関係手  $I_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は射関手

$$I_{\mathbb{C}}(C, C') = \mathbb{C}(C, C')$$

で定義される。2つの関係手  $F, F': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  の間の 2セル  $\alpha: F \Rightarrow F'$  は関手としての自然変換である。

関係手について  $(H \circ G) \circ F \cong H \circ (G \circ F)$  と  $I_{\mathbb{D}} \circ F \cong F \circ I_{\mathbb{C}}$  が成り立つ。これらのことから、圏と関係手は双圏 (bicategory) をなすことがわかる。

関手  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  が与えられたとき、関係手  $F_*: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  と  $F^*: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  を次のように定義できる。  
 $F_*(D, C) = \mathbb{D}(D, FC)$ ,  $F^*(C, D) = \mathbb{C}(FC, D)$

### 2.3 Prof における強モナドと Eilenberg-Moore 圏

圏と関手のなす 2 圏 **Cat** における強モナドが Haskell におけるモナドの意味を与えるのと同様に、圏と関係手のなす双圏 **Prof** における強モナドが Haskell におけるアローの意味を与えることとなる。

**定義 2** (**Prof** における強モナド [1][2]).  $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I)$  をモノイダル圏とする。  $\mathbb{C}$  上の **Prof** における強モナドとは、関係手  $\mathcal{A}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  と 2セルたち  $\eta: I_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\mu: \mathcal{A} \circ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\sigma: (\otimes_*) \circ (\mathcal{A} \times I_{\mathbb{C}}) \Rightarrow \mathcal{A} \circ (\otimes_*)$  の組であって、適切な公理を満たすものことである。

圏と関手のなす 2 圏 **Cat** におけるモナド  $\mathcal{T}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して Eilenberg-Moore 圏  $\mathcal{EM}(\mathcal{T})$  と呼ばれる圏が次のようにして定義される。

- 対象は、 $\mathbb{C}$  の対象  $A \in \mathbb{C}$  と射  $a: \mathcal{T}A \rightarrow A$  の組  $(A, a)$  であって単位  $\eta^{\mathcal{T}}$  と掛け算  $\mu^{\mathcal{T}}$  に対して整合的なものとする。
- 射  $f: (A, a) \rightarrow (A', a')$  は、 $\mathbb{C}$  の射  $f: A \rightarrow A'$

であって以下の図式を可換にするものと定める。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}A & \xrightarrow{\mathcal{T}f} & \mathcal{T}A' \\ a \downarrow & & \downarrow a' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

$\mathcal{EM}(\mathcal{T})$  の対象  $(A, a)$  のことを  $\mathcal{T}$  代数と呼ぶ。また  $\mathcal{T}$  代数の間の射  $f: (A, a) \rightarrow (A', a')$  のことを準同型射と呼ぶ。Eilenberg-Moore 圏  $\mathcal{EM}(\mathcal{T})$  は次の性質を満たす [16]。

$$\mathbf{Cat}(\mathbb{D}, \mathcal{EM}(\mathcal{T})) \cong \mathcal{EM}(\mathbf{Cat}(\mathbb{D}, \mathcal{T})) \quad (1)$$

**Prof** におけるモナド  $\mathcal{A}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対しても圏  $\mathcal{EM}(\mathcal{A})$  が存在して、次を満たす [17]。

$$\mathbf{Prof}(\mathbb{D}, \mathcal{EM}(\mathcal{A})) \simeq \mathcal{EM}(\mathbf{Prof}(\mathbb{D}, \mathcal{A})) \quad (2)$$

**定義 3** (**Prof** におけるモナドに対する Eilenberg-Moore 圏 [17])。 **Prof** におけるモナド  $\mathcal{A}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、Eilenberg-Moore 圏  $\mathcal{EM}(\mathcal{A})$  を次のようにして定める。

- 対象は  $\mathbb{C}$  の対象と同一とする。つまり  $\text{Ob}(\mathcal{EM}(\mathcal{A})) = \text{Ob}(\mathbb{C})$ 。
- 対象  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{EM}(\mathcal{A}))$  に対して  $\mathcal{EM}(\mathcal{A})(A, B) = \mathcal{A}(A, B)$  と定める。
- 対象  $A \in \text{Ob}(\mathcal{EM}(\mathcal{A}))$  に対して  $A$  上の恒等射は  $\eta(\text{id}_A) \in \mathcal{A}(A, A)$  とする。
- 射  $a \in \mathcal{EM}(\mathcal{A})(A, B)$  と  $b \in \mathcal{EM}(\mathcal{A})(B, C)$  に対して合成  $b \circ a$  は  $\mu_{A,B,C}(a, b)$  で定める。

対象に関して恒等的な関手  $J: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{EM}(\mathcal{A})$  が  $\eta_{A,B}: \mathbb{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{A}(A, B)$  によって定義される。関手  $J$  は随伴  $J_* \dashv J^*$  を誘導する。

## 2.4 関係手の合成に関する問題

アローは双圏 **Prof** における強モナドと対応する。しかし、例えば **Prof** における **Set** 上の強モナド  $\mathcal{A}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  でプログラミング言語を解釈しようとしたときに、集合のサイズに関する問題に直面する。

自己関係手  $\mathcal{A}$  は、関手  $\mathcal{A}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  ではなく、関手  $\mathcal{A}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ens}$  でなければならない。そのため、アロー型  $A \rightsquigarrow B$  の解釈  $\mathcal{A}([A], [B])$  は、**Set** の対象ではなく、**Ens** の対象になってしまう。これは関係手の合成が余エンドで定義されており、関係手の合成ができてかつモデルが非自明であるためには、十分な余極限を持つことか「小さい」圏で

あることのどちらか一方を諦めなければならないからである。

浅田 [1] はこの問題に対して、 $\mathbb{V}'$ -**Prof** における  $\mathbb{V}$  小関係手の概念を導入した。

**定義 4** (浅田 [1])。  $\mathbb{V}$  を対称モノイダル圏、 $\mathbb{V}'$  を十分余完備な対称モノイダル閉圏、 $J: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$  を対称強モノイダル忠実充満関手とする。 $\mathbb{V}'$  豊穡圏  $\mathbb{C}$  と  $\mathbb{D}$  に対して  $\mathbb{V}'$  関係手  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  とは  $\mathbb{V}'$  関手  $F: \mathbb{D}^{\text{op}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{V}'$  である。 $\mathbb{V}'$  豊穡圏と  $\mathbb{V}'$  関係手は双圏  $\mathbb{V}'$ -**Prof** をなす。 $\mathbb{V}'$  関係手  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  が  $\mathbb{V}$  小であるとは、 $\mathbb{V}'$  関手  $F^\circ: \mathbb{D}^{\text{op}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{V}$  が存在して、 $J \circ F^\circ = F$  となることとする。

**Set** 小な **Ens-Prof** における強モナド  $\mathcal{A}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  があれば、集合  $\mathcal{A}^\circ([A], [B])$  によりアロー型  $A \rightsquigarrow B$  の解釈を与えることができる。

## 3 アローの代数的な見方

アローに対応する代数的エフェクトとエフェクトハンドラ概念を導出するために、**Prof** における強モナド  $\mathcal{A}$  に対応する  $\mathcal{A}$  代数および準同型射の概念がどのようなものであるか調べる。

**Cat** におけるモナド  $\mathcal{T}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、Eilenberg-Moore 圏  $\mathcal{EM}(\mathcal{T})$  の対象を  $\mathcal{T}$  代数、射を準同型射と呼ぶことにしたのであった。

**Prof** におけるモナド  $\mathcal{A}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対しても Eilenberg-Moore 圏  $\mathcal{EM}(\mathcal{A})$  が存在する (定義 3)。しかし  $\mathcal{EM}(\mathcal{A})$  の対象のことを  $\mathcal{A}$  代数と呼ぶことはできない。なぜならば、 $\mathcal{EM}(\mathcal{A})$  の対象は  $\mathbb{C}$  の対象と同一であるからである。

**Cat** におけるモナド  $\mathcal{T}$  に対応する  $\mathcal{T}$  代数を関手  $\mathbf{1} \rightarrow \mathcal{EM}(\mathcal{T})$  と見ることができる。ここで  $\mathbf{1}$  はただ 1 つの対象と恒等射からなる圏である。式 1 より、 $\mathcal{T}$  代数の指定  $a: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{EM}(\mathcal{T})$  と **Cat**( $\mathbf{1}, \mathcal{T}$ ) 代数  $\alpha$  が対応する。すなわち以下の図式の間の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \downarrow a & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{EM}(\mathcal{T}) & & \mathbb{C} \\ \downarrow U & \xrightarrow{\xi} & \downarrow U \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathbb{C} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathbb{C} \end{array} \end{array}$$

ゆえに、 $\mathcal{T}$  代数の関手による指定  $a: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{EM}(\mathcal{T})$  と通常の  $\mathcal{T}$  代数の条件を満たす射  $\alpha: \mathcal{T}A \rightarrow A$  を指定

することは同値である。

同様のことを **Prof** におけるモナド  $\mathcal{A}$  に対しても主張できる。式 2 より、関係手  $a: \mathbf{1} \mapsto \mathcal{EM}(\mathcal{A})$  と **Prof**( $\mathbf{1}, \mathcal{A}$ ) 代数  $\alpha$  は同型の違いを除いて一致する。すなわち、以下の図式間の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a} & G \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \\ \uparrow J^* & & \uparrow J^* \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \end{array} \cong \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \end{array}$$

**Prof**( $\mathbf{1}, \mathcal{A}$ ) 代数  $\alpha$  は次の等式を満たす。

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \\ \uparrow \eta & & \uparrow \eta \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \end{array} = \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \\ \uparrow \mu & & \uparrow \mu \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array} = \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \\ \uparrow \mu & & \uparrow \mu \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array} \quad (4)$$

つまり、関係手  $a: \mathbf{1} \mapsto \mathcal{EM}(\mathcal{A})$  を 1 つ決めることは前層  $G: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  と **Prof** における 2 セル  $\alpha: \mathcal{A} \circ G \Rightarrow G$  であって式 3, 4 を満たすものを 1 つ決めることと同値である。

以上の観察から、関係手  $a: \mathbf{1} \mapsto \mathcal{EM}(\mathcal{A})$  およびそれと等価なデータである式 3, 4 を満たす組  $(G, \alpha)$  のことを  $\mathcal{A}$  代数と呼ぶ。また、 $\mathcal{A}$  代数  $(G, \alpha)$  から  $(G', \alpha')$  への準同型射  $f: (G, \alpha) \rightarrow (G', \alpha')$  とは、前層の射  $f: G \rightarrow G'$  であって、 $\alpha' \circ (\mathcal{A}f) = f \circ \alpha$  を満たすものとする。言い換えると  $f: G \rightarrow G'$  は任意の  $A, B \in \mathcal{C}$  に対して以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} A(A, B) \times GB & \xrightarrow{\alpha_{A,B} \times f_B} & A(A, B) \times G'B \\ \alpha_{A,B} \downarrow & & \downarrow \alpha'_{A,B} \\ GA & \xrightarrow{f_A} & GA \end{array}$$

通常の (**Cat** における強モナド  $\mathcal{T}$  に対応する) エフェクトハンドラは自由  $\mathcal{T}$  代数からの普遍性によって誘導される準同型射によって解釈されるのであった。このことから、アローに対するエフェクトハンドラは、それが実現できたとすると、やはり **Prof** における強モナド  $\mathcal{A}$  に対応する自由  $\mathcal{A}$  代数からの普遍性によって誘導される準同型射によって解釈されるべきである。

**定理 5.**  $\mathcal{A}$  を **Prof** における  $\mathcal{C}$  上のモナドとする。 $(G, \alpha)$  を  $\mathcal{A}$  代数とする。 $\phi: \mathcal{C}(-, C) \rightarrow G$  が前層の間の射であるならば、 $\mathcal{A}$  の間の準同型射

$$\phi^\dagger: (\mathcal{A}(-, C), \mu_{-,C}) \rightarrow (G, \alpha)$$

であって以下の図式を同型の違いを除いて可換にするようなものが一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, C) & \xrightarrow{\eta_{-,C}} & \mathcal{A}(-, C) \\ & \searrow \phi & \downarrow \phi^\dagger \\ & & G \end{array}$$

**証明.**  $\phi^\dagger$  を次の合成によって定義して、余エンドの計算を行えばよい。

$$\mathcal{A}(-, C) \cong \mathcal{A} \circ (\mathcal{C}(-, C)) \xrightarrow{\mathcal{A}\phi} \mathcal{A} \circ G \xrightarrow{\alpha} G$$

□

米田の補題より、前層の間の射  $\phi: \mathcal{C}(-, C) \rightarrow G$  を与えることは要素  $p \in GC$  を与えることと同値である。さらに前層  $G$  を別のモナド  $\mathcal{A}'$  から作られる前層  $\mathcal{A}'(-, D)$  とすることで、以下の系を得る。

**系 6.**  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{A}'$  を **Prof** における  $\mathcal{C}$  上のモナドとする。 $\alpha$  を  $A, B$  に関して自然な族  $(\alpha_{A,B}: \mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}'(B, D) \rightarrow \mathcal{A}'(A, D))_{A,B \in \mathcal{C}}$  とする。要素  $p \in \mathcal{A}'(C, D)$  に対して準同型射

$$h: (\mathcal{A}(-, C), \mu) \rightarrow (\mathcal{A}'(-, D), \alpha)$$

であって、

- 任意の  $A \in \mathcal{C}$  と  $a \in \mathcal{A}(A, C)$  に対して  $h(a) = \alpha_{A,C}(a, p)$  かつ
- 任意の  $A \in \mathcal{C}$  と  $f: A \rightarrow C$  に対して  $h_A(\eta^A(f)) = \mathcal{A}'(f, D)(p)$

を満たすものが一意に存在する。

第 5 節では、アローに対応するエフェクトハンドラを解釈するために系 6 を用いる。

#### 4 オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算

Lindley ら [10][11] によって導入されたアロー計算にオペレーションとエフェクトハンドラを追加して拡張した体系を考える。

#### 4.1 構文と型付け規則

$BType$  を基本型の集合とし、 $\Sigma$  をオペレーションの集合とする。各オペレーション  $op \in \Sigma$  には、2つの基本型  $\gamma$  (余引数) と  $\delta$  (引数) が割り当てられているものとし、このことを  $op: \gamma \rightarrow \delta$  と書くことにする。図1が構文である。元のアロー計算との差分はオペレーションの追加  $op(M)$  とハンドラの追加 **handle  $R$  with  $H$**  である。

型  $A$  が基本型と  $\times, \rightarrow$  のみを用いて構成されているとき、**原始的**であるといい  $\Phi(A)$  と書く。形式的には  $\Phi(A)$  の導出規則は以下の通りである。

$$\frac{\beta \in BType}{\Phi(\beta)} \quad \frac{\Phi(A) \quad \Phi(B)}{\Phi(A \times B)} \quad \frac{\Phi(A) \quad \Phi(B)}{\Phi(A \rightarrow B)}$$

型付け規則は図2で与える。

#### 4.2 操作的意味論

簡約規則を閉項  $\diamond \vdash M : A$  と閉コマンド  $\diamond \circ \circ \vdash P ! A$  に対して定めたい。まず2種類の評価文脈  $\mathcal{E}$  と  $\mathcal{F}$  を定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} ::= & [-] \mid \mathcal{E}N \mid V\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \bullet N \mid (\lambda^* x.P) \bullet \mathcal{E} \\ & \mid [\mathcal{E}] \mid op(\mathcal{E}) \mid \text{fst } \mathcal{E} \mid \text{snd } \mathcal{E} \mid \langle \mathcal{E}, M \rangle \mid (V, \mathcal{E}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} ::= [-] \mid \text{let } x \leftarrow \mathcal{F} \text{ in } Q$$

文脈  $\mathcal{E}[-]$  の穴には項を入れ、文脈  $\mathcal{F}[-]$  の穴にはコマンドを入れる。簡約規則を図3で定める。

この簡約規則に対して、簡約の前後で型が変化しないことを保証する型保存定理と型付けられたコマンドは簡約できるか値であるかオペレーションを呼んでいることを保証する進行定理が証明できる。

**命題 7** (進行). 次が成り立つ。

1. 任意の型付けられた項  $\diamond \vdash M : A$  に対して、ある項  $M'$  が存在して  $M \rightarrow M'$  が成り立つか、または  $M$  は値である。
2. 任意の型付けられたコマンド  $\diamond \circ \circ \vdash P ! A$  に対して、次のいずれかが成り立つ。
  - あるコマンド  $P'$  が存在して  $P \rightarrow P'$  となる。
  - ある値  $V$  が存在して  $P = [V]$  である。
  - あるオペレーション  $op$  と値  $V$  と文脈  $\mathcal{F}$  が存在して  $P = \mathcal{F}[op(V)]$  である。

**命題 8** (型保存). 次が成り立つ。

1. 任意の型付けられた項  $\diamond \vdash M : A$  に対して、 $M \rightarrow M'$  ならば  $\diamond \vdash M' : A$  である。
2. 任意の型付けられたコマンド  $\diamond \circ \circ \vdash P ! A$  に対して、 $P \rightarrow P'$  ならば  $\diamond \circ \circ \vdash P' ! A$  である。

## 5 表示的意味論

### 5.1 アロー計算のモデルと構成

オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算を解釈するモデルの定義を与える。

**定義 9.** アロー計算のモデルは次のデータからなる。

- カルテシアン閉圏  $\mathbb{C}$
  - 十分余完備なカルテシアン閉圏  $\mathbb{C}'$
  - 忠実充満なカルテシアン関手  $J: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$
  - $\mathbb{C}'\text{-Prof}$  における  $\mathbb{C}$  小な強モナド  $\mathcal{A}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- 集合の圏をクラスの圏に埋め込む忠実充満なカルテシアン関手  $J: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ens}$  がある。恒等関係手  $I_{\mathbf{Set}}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  はモデル  $(\mathbf{Set}, \mathbf{Ens}, J, I_{\mathbf{Set}})$  をなす。

以降では、 $\mathbf{Ens}\text{-Prof}$  における  $\mathbf{Set}$  小な強モナド  $\mathcal{A}_{\mathbf{Set}}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  を構成することで、具体的なアロー計算のモデルを1つ与える。このモデルの構成において難しいことは、一見すると真のクラスになってしまうものの集まりが、実際は集合になることを証明することである。そのために、標準形を導入し、その個数を数えることになる。

基本型の解釈  $\llbracket - \rrbracket: BType \rightarrow \mathbf{Set}$  を固定する。

まず写像  $\text{Arr}_{\Sigma}: \text{Ob}(\mathbf{Set}^{\text{op}}) \times \text{Ob}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{Ens})$  を構成する。集合  $A$  と  $B$  に対して、 $\text{Arr}_{\Sigma}(A, B)$  を次を満たす最小のクラスとする。

$$\frac{f \in \mathbf{Set}(A, B) \quad op: \gamma \rightarrow \delta \in \Sigma}{\text{arr}(f) \in \text{Arr}_{\Sigma}(A, B) \quad op \in \text{Arr}_{\Sigma}(\llbracket \gamma \rrbracket, \llbracket \delta \rrbracket)}$$

$$\frac{a \in \text{Arr}_{\Sigma}(A, B) \quad b \in \text{Arr}_{\Sigma}(B, C)}{a \gg b \in \text{Arr}_{\Sigma}(A, C)}$$

$$\frac{a \in \text{Arr}_{\Sigma}(A, B)}{\text{first}_C(a) \in \text{Arr}_{\Sigma}(A \times C, B \times C)}$$

クラス  $\text{Arr}_{\Sigma}(A, B)$  の要素を**アロー項**と呼ぶ。

クラス  $\text{Arr}_{\Sigma}(A, B)$  は、任意の集合  $X$  と  $a \in \text{Arr}_{\Sigma}(A, X)$  と  $b \in \text{Arr}_{\Sigma}(X, B)$  に対して  $a \gg b$  を含むため、真のクラスとなる。しかし、 $\text{Arr}_{\Sigma}(A, B)$  上に同値関係  $\sim$  を以下のように定めることができ、

型	$A, B, C, D ::= \beta \mid \text{Unit} \mid A \times B \mid A \rightarrow B \mid A \rightsquigarrow B$ ここで $\beta \in BType$
型環境	$\Gamma, \Delta ::= \diamond \mid x : A, \Gamma$
項	$M, N, L ::= x \mid \langle \rangle \mid \langle M, N \rangle \mid \text{fst } M \mid \text{snd } M \mid \lambda x : A. M \mid MN \mid \lambda^\bullet x : A. P$
値	$V, W ::= x \mid \langle V, W \rangle \mid \lambda x : A. M \mid \lambda^\bullet x : A. P$
コマンド	$P, Q, R ::= [M] \mid \text{let } x \leftarrow P \text{ in } Q \mid L \bullet M \mid \text{op}(M) \mid \text{handle } R \text{ with } H$
ハンドラ	$H ::= \{ \dagger x : C \mapsto P \} \cup \{ \text{op}, k : \delta \rightsquigarrow D \dagger z : \gamma \mapsto Q_{\text{op}} \}_{\text{op} \in \Sigma}$

図1 オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算の構文

項 $\Gamma \vdash M : A$ の型付け規則	
$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$ T-VAR	$\frac{}{\Gamma \vdash \langle \rangle : \text{Unit}}$ T-UNIT
$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B}$ T-ABS	$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B}$ T-ABS
$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$ T-APP	$\frac{\Gamma \dagger x : A \vdash P ! B}{\Gamma \vdash \lambda^\bullet x : A. P : A \rightsquigarrow B}$ T-CABS
$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B}$ T-PAIR	$\frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \text{fst } M : A}$ T-FST
	$\frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \text{snd } M : B}$ T-SND
コマンド $\Gamma \dagger \Delta \vdash P ! A$ の型付け規則	
$\frac{\Gamma, \Delta \vdash M : A}{\Gamma \dagger \Delta \vdash [M] ! A}$ T-PURE	$\frac{\Gamma \vdash L : A \rightsquigarrow B \quad \Gamma, \Delta \vdash M : A}{\Gamma \dagger \Delta \vdash L \bullet M ! B}$ T-CAPP
$\frac{\Gamma \dagger \Delta \vdash P ! A \quad \Gamma \dagger x : A, \Delta \vdash Q ! B}{\Gamma \dagger \Delta \vdash \text{let } x \leftarrow P \text{ in } Q ! B}$ T-LET	$\frac{\text{op} : \gamma \rightarrow \delta \in \Sigma \quad \Gamma, \Delta \vdash M : \gamma}{\Gamma \dagger \Delta \vdash \text{op}(M) ! \delta}$ T-OP
	$\frac{\Gamma \dagger \Delta \vdash P ! C \quad \vdash H : C \Rightarrow D}{\Gamma \dagger \Delta \vdash \text{handle } P \text{ with } H ! D}$ T-HANDLE
ハンドラ $H : C \Rightarrow D$ の型付け規則	
$\frac{\Phi(C) \wedge \Phi(D) \quad \diamond \dagger x : C \vdash P ! D \quad (k : \delta \rightsquigarrow D \dagger z : \gamma \vdash Q_{\text{op}} ! D)_{(\text{op} : \gamma \rightarrow \delta) \in \Sigma}}{\vdash \{ \dagger x : C \mapsto P \} \cup \{ \text{op}, k : \delta \rightsquigarrow D \dagger z : \gamma \mapsto Q_{\text{op}} \}_{\text{op} \in \Sigma} : C \Rightarrow D}$ T-HANDLER	

図2 型付け規則

この同値関係による完全代表系は集合となることを証明できる。

$$(a \ggg b) \ggg c \sim a \ggg (b \ggg c)$$

$$\text{arr}(g \circ f) \sim \text{arr}(g) \ggg \text{arr}(f)$$

$$\text{arr}(\text{id}) \ggg a \sim a$$

$$a \ggg \text{arr}(\text{id}) \sim a$$

$$\text{first}(a) \ggg \text{arr}(\text{id} \times f) \sim \text{arr}(\text{id} \times f) \ggg \text{first}(a)$$

$$\text{first}(a) \ggg \text{arr}(\pi_1) \sim \text{arr}(\pi_1) \ggg a$$

$$\text{first}(a) \ggg \text{arr}(\alpha) \sim \text{arr}(\alpha) \ggg \text{first}(\text{first}(a))$$

$$\text{first}(\text{arr}(f)) \sim \text{arr}(f \times \text{id})$$

$$\text{first}(a \ggg b) \sim \text{first}(a) \ggg \text{first}(b)$$

**命題 10** (アロー項標準形).  $A$  と  $B$  を集合とする。

任意のアロー項  $a \in \text{Arr}_\Sigma(A, B)$  に対して

- 自然数  $n \in \mathbb{N}$
- オペレーションの列  $(\text{op}_i : \gamma_i \rightarrow \delta_i)_{i=1, \dots, n}$

- 写像の列  $(f_i : [\delta_{i-1}] \times \dots \times [\delta_1] \times A \rightarrow [\gamma_i])_{i=1, \dots, n}$

- 写像  $g : [\delta_n] \times \dots \times [\delta_1] \times A \rightarrow B$

が存在して

$$a \sim \text{arr}(d_A) \ggg \text{first}_A(\text{arr}(f_1) \ggg \text{op}_1)$$

$$\ggg \text{arr}(d_{[\delta_1] \times A})$$

$$\ggg \text{first}_{[\delta_1] \times A}(\text{arr}(f_2) \ggg \text{op}_2)$$

$$\ggg \dots$$

$$\ggg \text{arr}(d_{[\delta_{n-1}] \times \dots \times [\delta_1] \times A})$$

$$\ggg \text{first}_{[\delta_{n-1}] \times \dots \times [\delta_1] \times A}(\text{arr}(f_n) \ggg \text{op}_n)$$

$$\ggg \text{arr}(g)$$

(5)

が成り立つ。ここで  $d_X : X \rightarrow X \times X$  は対角写像  $d_X(x) = (x, x)$  である。式5の右辺のアロー項を  $\text{cf}((\text{op}_i)_{i=1, \dots, n}, (f_i)_{i=1, \dots, n}; g)$  と書き標準形と呼ぶことにする。

$$\begin{array}{l}
\text{項 } \circ \vdash M : A \text{ に対する簡約 } M \rightarrow M' \\
\text{fst}\langle V, W \rangle \rightarrow V \quad \text{O-FST} \\
\text{snd}\langle V, W \rangle \rightarrow W \quad \text{O-SND} \\
(\lambda x.M)V \rightarrow M[V/x] \quad \text{O-}\beta \\
\frac{M \rightarrow M'}{\mathcal{E}[M] \rightarrow \mathcal{E}[M']} \quad \text{O-C}_{\text{TXE}} \\
\text{コマンド } \diamond \circ \vdash P ! A \text{ に対する簡約 } P \rightarrow P' \\
(\lambda^\bullet x.P) \bullet V \rightarrow P[V/x] \quad \text{O-}\beta^\bullet \\
\text{let } x \leftarrow [V] \text{ in } Q \rightarrow Q[V/x] \quad \text{O-LET} \\
\text{handle}[V] \text{ with } H \rightarrow P[V/x] \quad \text{O-HVAL} \\
\text{handle } \mathcal{F}[\text{op}(V)] \text{ with } H \rightarrow Q_{\text{op}}[V/z, (\lambda^\bullet y : \delta. \text{handle } \mathcal{F}[[y]] \text{ with } H) / k] \quad \text{O-HOP} \\
\text{ここで } H = \{ \circ \circ x \mapsto P \} \cup \{ \text{op}, k \circ \circ z \mapsto Q_{\text{op}} \}_{\text{op} \in \Sigma} \\
\frac{P \rightarrow P'}{\mathcal{F}[P] \rightarrow \mathcal{F}[P']} \quad \text{O-C}_{\text{TXF}}
\end{array}$$

図 3 簡約規則

今後、アロー項とその標準形およびその同値類を同一視する。標準形の個数はその形から集合個しかないので分かる。つまり  $\mathcal{A}_\Sigma(A, B) := \text{Arr}_\Sigma(A, B) / \sim$  は集合となる。

さらに  $\mathcal{A}_\Sigma(-1, -2)$  は自然な方法で **Ens** 関係手  $\mathcal{A}_\Sigma(-1, -2) : \mathbf{Set} \leftrightarrow \mathbf{Set}$  に拡張され、これは **Set** 小である。つまり以下の図式を可換にする **Ens** 関手  $\mathcal{A}_\Sigma^\circ : \mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{Set} & \xrightarrow{\mathcal{A}_\Sigma} & \mathbf{Ens} \\
& \searrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ & \uparrow J \\
& & \mathbf{Set}
\end{array}$$

さらに、 $\mathcal{A}_\Sigma$  は自然な方法で **Ens-Prof** における強モナドとなる。以上をまとめることで、アロー計算のモデルを得ることができた。

**命題 11.** データ  $(\mathbf{Set}, \mathbf{Ens}, J, \mathcal{A}_\Sigma)$  はアロー計算のモデルである。

## 5.2 解釈

アロー計算のモデル  $(\mathbf{C}, \mathbf{C}', J, \mathcal{A})$ 、基本型の解釈  $\llbracket - \rrbracket : BType \rightarrow \mathbf{Set}$ 、各オペレーション  $\text{op} : \gamma \rightarrow \delta \in \Sigma$  の解釈  $\llbracket \text{op} \rrbracket : \mathcal{A}(-, \llbracket \delta \rrbracket) \rightarrow \mathcal{A}(-, \llbracket \gamma \rrbracket)$  が与えられたとする。型  $A$  の解釈は基本型の解釈を自然に拡張することで与える。特に型  $A \rightsquigarrow B$  の解釈  $\llbracket A \rightsquigarrow B \rrbracket$  は  $\mathcal{A}^\circ(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$  で定める。オペレーションを持ったアロー計算（ハンドラなし）の圏論的意味論を図 4 で

与える。

以降では、エフェクトハンドラの解釈をモデル  $(\mathbf{Set}, \mathbf{Ens}, J, \mathcal{A}_\Sigma)$  で考える。

**Cat** における強モナド  $\mathcal{T} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  の場合と違って、**Ens-Prof** における強モナド  $\mathcal{A}_\Sigma : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  の場合は強度 (strength) の扱いが自明ではない。このことを説明する。ハンドラを  $\mathcal{A}_\Sigma$  代数の間の準同型射として解釈するために、前層  $\mathcal{A}_\Sigma^\circ(-, \llbracket D \rrbracket)$  上にハンドラから誘導される  $\mathcal{A}_\Sigma$  代数の構造を入れたい。そのためには射の族

$$(\alpha_{A,B} : \mathcal{A}_\Sigma^\circ(A, B) \times \mathcal{A}_\Sigma^\circ(B, \llbracket D \rrbracket) \rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ(A, \llbracket D \rrbracket))_{A,B} \quad (6)$$

をハンドラ  $H = \{ \circ \circ x : C \mapsto P \} \cup \{ \text{op}, k : \delta \rightsquigarrow D \circ \circ z : \gamma \mapsto Q_{\text{op}} \}_{\text{op}}$  から構成する必要がある。ハンドラ  $H$  の型付けは以下のようにになっている。

$$\diamond \circ x : C \vdash P ! D$$

$$(k : \delta \rightsquigarrow D \circ \circ z : \gamma \vdash Q_{\text{op}} ! D)_{\text{op} : \gamma \rightarrow \delta}$$

$$\vdash H : C \Rightarrow D$$

T-HANDLER

先ほど定めた解釈（図 4）では、 $Q_{\text{op}}$  は写像  $\llbracket Q_{\text{op}} \rrbracket : \mathcal{A}_\Sigma^\circ(\llbracket \delta \rrbracket, \llbracket D \rrbracket) \rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ(\llbracket \gamma \rrbracket, \llbracket D \rrbracket)$  として解釈される。しかしながら、この解釈から式 6 を構成することはできない。なぜならば、 $\text{op} : \gamma \rightarrow \delta$  と  $b \in \mathcal{A}_\Sigma^\circ(\llbracket \delta \rrbracket \times S, \llbracket D \rrbracket)$  に対して  $\alpha(\text{first}_S(\text{op}), b)$  を定義する方法がないためである。

この問題はナイーブな解釈がつぶれすぎていること

項の解釈  $\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket A \rrbracket$

**T-CAbs:**  $\llbracket \Gamma \vdash \lambda^* x : A. P : A \rightsquigarrow B \rrbracket = \llbracket P \rrbracket$

他の項の型付け規則に対しては  $\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket$  は通常通り定義する。

コマンドの解釈  $\llbracket \Gamma ; \Delta \vdash P ! A \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \mathcal{A}^\circ(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket)$

**T-Pure:**

$$\llbracket \Gamma ; \Delta \vdash [M] ! A \rrbracket = \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\Lambda[M]} \mathbb{I}_c^\circ(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}^\circ(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket) \right)$$

**T-CApp:**

$$\llbracket \Gamma ; \Delta \vdash L \bullet M ! B \rrbracket = \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\langle m, [L] \rangle} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket) \times \mathcal{A}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \right)$$

ここで

$$m = \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\Lambda[M]} \mathbb{I}^\circ(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket) \right)$$

**T-Let:**

$$\begin{aligned} & \llbracket \Gamma ; \Delta \vdash \text{let } x \leftarrow P \text{ in } Q ! B \rrbracket \\ &= \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\langle d, p, [Q] \rangle} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \Delta \rrbracket^2) \times \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket^2, \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket) \times \mathcal{A}(\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \right. \\ & \quad \left. \xrightarrow{\mu \times \text{id}} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket) \times \mathcal{A}(\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} d &= \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\Lambda(\lambda x. \langle x, x \rangle)} \mathbb{I}^\circ(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \Delta \rrbracket^2) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \Delta \rrbracket^2) \right) \\ p &= \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{[P]} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket A \rrbracket) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket^2, \llbracket A \rrbracket \times \llbracket \Delta \rrbracket) \right) \end{aligned}$$

**T-Op:**

$$\llbracket \Gamma ; \Delta \vdash \text{op}(M) ! \delta \rrbracket = \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\langle m, o \rangle} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \gamma \rrbracket) \times \mathcal{A}(\llbracket \gamma \rrbracket, \llbracket \delta \rrbracket) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \delta \rrbracket) \right)$$

ここで

$$\begin{aligned} m &= \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\Lambda[M]} \mathbb{I}^\circ(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \gamma \rrbracket) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}(\llbracket \Delta \rrbracket, \llbracket \gamma \rrbracket) \right) \\ o &= \left( \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\Lambda(\text{id})} \mathbb{I}^\circ(\llbracket \delta \rrbracket, \llbracket \delta \rrbracket) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}(\llbracket \delta \rrbracket, \llbracket \delta \rrbracket) \xrightarrow{[\text{op}]_{[\delta]}} \mathcal{A}(\llbracket \gamma \rrbracket, \llbracket \delta \rrbracket) \right) \end{aligned}$$

図 4 アロー計算の圏論的意味論

に起因している。そこで、パラメータとして集合  $S$  を追加することで解釈を「膨らませる」ことを考える。

型  $A$  と集合  $S$  に対して解釈  $\llbracket A \rrbracket^S \in \mathbf{Set}$  を  $\llbracket - \rrbracket : BType \rightarrow \mathbf{Set}$  の拡張として以下のように定める。

$$\llbracket \beta \rrbracket^S = \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \text{Unit} \rrbracket^S = \{\star\}$$

$$\llbracket A \times B \rrbracket^S = \llbracket A \rrbracket^S \times \llbracket B \rrbracket^S$$

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket^S = \llbracket A \rrbracket^S \Rightarrow \llbracket B \rrbracket^S$$

$$\llbracket A \rightsquigarrow B \rrbracket^S = \mathcal{A}_\Sigma(\llbracket A \rrbracket^S \times S, \llbracket B \rrbracket^S)$$

型環境  $\Gamma$  に対して、その解釈  $\llbracket \Gamma \rrbracket^S$  は

$$\llbracket \diamond \rrbracket^S = 1, \quad \llbracket \Gamma, x : A \rrbracket^S = \llbracket \Gamma \rrbracket^S \times \llbracket A \rrbracket^S$$

で定める。

このパラメータ付きの型の解釈を用いて、項  $\Gamma \vdash$

$M : A$  の解釈  $\llbracket M \rrbracket^S : \llbracket \Gamma \rrbracket^S \rightarrow \llbracket A \rrbracket^S$  とコマンド  $\Gamma ; \Delta \vdash P ! A$  の解釈  $\llbracket P \rrbracket^S : \llbracket \Gamma \rrbracket^S \rightarrow \mathcal{A}_\Sigma(\llbracket \Delta \rrbracket^S \times S, \llbracket A \rrbracket^S)$  を定めたい。 $e \in \llbracket \Gamma \rrbracket^S$  とする。

項の解釈は以下のように定義する。

$$\llbracket \Gamma, y : A \vdash y : A \rrbracket^S(e, a) = a \quad (a \in \llbracket A \rrbracket^S)$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \langle L, N \rangle : A \times B \rrbracket^S(e) = (\llbracket L \rrbracket^S(e), \llbracket N \rrbracket^S(e))$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \text{fst } M : A \rrbracket^S(e) = \pi_1(\llbracket M \rrbracket^S(e))$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \text{snd } M : A \rrbracket^S(e) = \pi_2(\llbracket M \rrbracket^S(e))$$

$$\llbracket \Gamma \vdash MN : B \rrbracket^S(e) = \llbracket M \rrbracket^S(e)(\llbracket N \rrbracket^S(e))$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \lambda y : A. M : A \rightarrow B \rrbracket^S(e) = \llbracket M \rrbracket^S(e, -)$$

$$\llbracket \Gamma \vdash \lambda^* y : A. P : A \rightsquigarrow B \rrbracket^S(e) = \llbracket P \rrbracket^S(e)$$



コマンドの解釈は以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
& \llbracket \Gamma ; \Delta \vdash [M] ! A \rrbracket^S(e) \\
&= \text{arr} \left( \llbracket \Delta \rrbracket^S \times S \xrightarrow{\pi_1} \llbracket \Delta \rrbracket^S \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket^S(e, -)} \llbracket A \rrbracket^S \right) \\
& \llbracket \Gamma ; \Delta \vdash L \bullet M ! B \rrbracket^S(e) \\
&= \text{first}_S \left( \text{arr} \left( \llbracket M \rrbracket^S(e, -) \right) \right) \gg \llbracket L \rrbracket^S(e) \\
& \llbracket \Gamma ; \Delta \vdash \text{op}(M) ! \delta \rrbracket^S(e) \\
&= \text{arr} \left( \llbracket \Delta \rrbracket^S \times S \xrightarrow{\pi_1} \llbracket \Delta \rrbracket^S \xrightarrow{\llbracket M \rrbracket^S(e, -)} \llbracket \gamma \rrbracket^S \right) \gg \text{op} \\
& \llbracket \Gamma ; \Delta \vdash \text{let } y \leftarrow P \text{ in } Q ! B \rrbracket^S(e) \\
&= \text{arr}(d) \gg \text{first} \left( \llbracket P \rrbracket^S(e) \right) \gg \llbracket Q \rrbracket^S(e)
\end{aligned}$$

ここで  $z \in \llbracket \Delta \rrbracket^S \times S$  に対して  $d(z) = (z, z)$  である。

ハンドリング  $\Gamma ; \Delta \vdash \text{handle } R \text{ with } H ! D$  を解釈するためにハンドラ  $H = \{ ; x : C \mapsto P \} \cup \{ \text{op}, k : \delta \rightsquigarrow D ; z : \gamma \mapsto Q_{\text{op}} \}_{\text{op} \in \Sigma}$  から  $\mathcal{A}_\Sigma$  代数 (式 6) を構成する。ハンドリング  $\Gamma ; \Delta \vdash \text{handle } R \text{ with } H ! D$  の導出は

$$\frac{\begin{array}{c} \diamond ; y : C \vdash P ! D \\ (k : \delta \rightsquigarrow D ; c : \gamma \mapsto Q_{\text{op}} ! D)_{\text{op} \in \Sigma} \end{array}}{\Gamma ; \Delta \vdash R ! C \quad \vdash H : C \Rightarrow D} \Gamma ; \Delta \vdash \text{handle } R \text{ with } H ! D$$

となっている。  $C$  と  $D$  は原始的である。ゆえに  $\llbracket C \rrbracket^S = \llbracket C \rrbracket^1$  かつ  $\llbracket D \rrbracket^S = \llbracket D \rrbracket^1$  である。各  $\text{op} : \gamma \rightarrow \delta \in \Sigma$  ごとに射

$\llbracket Q_{\text{op}} \rrbracket^S : \mathcal{A}_\Sigma^\circ(\llbracket \delta \rrbracket \times S, \llbracket D \rrbracket^1) \rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ(\llbracket \gamma \rrbracket \times S, \llbracket D \rrbracket^1)$  がある。この射の族  $(\llbracket Q_{\text{op}} \rrbracket^S)_{\text{op} \in \Sigma}$  は前層  $\mathcal{A}_\Sigma^\circ(-, \llbracket D \rrbracket^1)$  上の  $\mathcal{A}_\Sigma$  代数  $\alpha$  を図 5 に示されているように誘導する。また、  $\llbracket P \rrbracket^S \in \mathcal{A}_\Sigma(\llbracket C \rrbracket^1, \llbracket D \rrbracket^1)$  である。ゆえに定理 6 より、準同型射  $h : \mu \rightarrow \alpha$  が存在し次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc}
\text{Set}(-, \llbracket C \rrbracket^1) & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{A}_\Sigma^\circ(-, \llbracket C \rrbracket^1) \\
\searrow [(-) \gg \llbracket P \rrbracket^1] & & \downarrow h \\
& & \mathcal{A}_\Sigma^\circ(-, \llbracket D \rrbracket^1)
\end{array}$$

この準同型射  $h$  を用いて  $\text{handle } R \text{ with } H$  の解釈を、各  $e \in \llbracket \Gamma \rrbracket^S$  に対して、

$$\begin{aligned}
& \llbracket \Gamma ; \Delta \vdash \text{handle } R \text{ with } H ! D \rrbracket^S(e) \\
&= h_{\llbracket \Delta \rrbracket^S}(\llbracket R \rrbracket^S(e))
\end{aligned}$$

と定める。

### 5.3 健全性と妥当性

健全性定理と妥当性定理は、操作的意味論と表示的意味論が整合的であることを主張する定理である。これらの定理をオペレーションとハンドラを持ったアロー計算の操作的意味論と表示的意味論について証明できる。

**定理 12** (健全性). 次が成り立つ。

- もし  $\diamond \vdash M : A$  かつ  $M \rightarrow M'$  ならば任意の  $S$  について  $\llbracket M \rrbracket^S = \llbracket M' \rrbracket^S$  である。
- もし  $\diamond ; \diamond \vdash P ! A$  かつ  $P \rightarrow P'$  ならば任意の  $S$  について  $\llbracket P \rrbracket^S = \llbracket P' \rrbracket^S$  である。

**定理 13** (妥当性). もし  $\diamond ; \diamond \vdash P ! \text{Unit}$  かつ  $\llbracket P \rrbracket = \text{arr}(\star) \in \mathcal{A}_\Sigma(1, \llbracket \text{Unit} \rrbracket)$  ならば  $P \rightarrow^* \llbracket \diamond \rrbracket$  である。

**証明.** 論理関係を定義することで証明できる。  $\square$

## 6 形式化・応用・実装

### 6.1 定理証明支援系 Agda による形式化

定理証明支援系 Agda を用いて構文、型付け規則、簡約規則を形式化し、進行定理 (命題 7) を形式的に証明した。Agda コードは <https://github.com/sndtkrh/arrow-effect-handler> で公開している。本論文では Curry 流の方法で項およびコマンドを定義しているが、Agda での形式化では、扱いやすい Church 流の方法 (つまり型の付かない項やコマンドをそもそも考えない方法) で定義した。そのため簡約規則が形式的に記述できた時点で型保存定理 (命題 8) は実質的に証明できたことになる。

### 6.2 ニューラルネットワークへの応用と実装

オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算を使ったニューラルネットワークに対する新しいプログラミング手法を提案する。シグネチャを  $\Sigma_{\text{NN}} = \{\text{input}, \text{layer}_1, \text{layer}_2, \dots\}$  とする。

基本的なアイデアはニューラルネットワークの層の設計をアロー項  $a \in \mathcal{A}_{\Sigma_{\text{NN}}}(A, C)$  の構成だとみなすことである。ネットワークに対する初期化、訓練、推論の各処理はそれぞれ (自由でない)  $\mathcal{A}_{\Sigma_{\text{NN}}}$  代数たちをプログラマが定義することで実現する。すなわち、

$$\begin{aligned}
\alpha : \mathcal{A}_\Sigma^\circ(A, B) \times \mathcal{A}_\Sigma^\circ(B, [D]^1) &\rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ(A, [D]^1) \\
(\text{arr}(f), a) &\mapsto \text{arr}(f) \ggg a \\
\alpha : \mathcal{A}_\Sigma^\circ(A, B) \times \mathcal{A}_\Sigma^\circ(B, [D]^1) &\rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ(A, [D]^1) \\
(b_1 \ggg b_2, a) &\mapsto \alpha(b_1, \alpha(b_2, a)) \\
\alpha : \mathcal{A}_\Sigma^\circ([\gamma], [\delta]) \times \mathcal{A}_\Sigma^\circ([\delta], [D]^1) &\rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ([\gamma], [D]^1) \\
(\text{op}, a) &\mapsto [Q_{\text{op}}]^1(a) \\
\alpha : \mathcal{A}_\Sigma^\circ([\gamma] \times S, [\delta] \times S) \times \mathcal{A}_\Sigma^\circ([\delta] \times S, [D]^1) &\rightarrow \mathcal{A}_\Sigma^\circ([\gamma] \times S, [D]^1) \\
(\text{first}_S(\text{op}), a) &\mapsto [Q_{\text{op}}]^S(a)
\end{aligned}$$

図5 ハンドラによって誘導される  $\mathcal{A}_\Sigma$  代数  $\alpha$

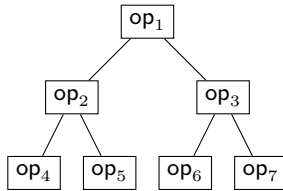


図6 モナドに対応する代数の要素の例。オペレーションの引数  $\delta$  に対して「 $\delta$  個」分の分岐を持つ。

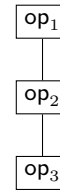


図7 アローに対応する代数の要素の例。オペレーションの引数  $\delta$  に対して  $\delta$  でラベル付けられたワイヤを持つ。

適当なハンドラによってネットワークをハンドルすることでネットワークに対する処理を実現する。

例えば訓練における誤差逆伝播処理は、ハンドラ内の処理において継続の結果を利用できることを使って、偏微分を計算するための値をネットワークの逆方向に渡すことで実現する。

モナドに対応する代数の要素が木構造を持つのに対して (図6)、アローに対応する代数の要素 (アロー項) は分岐を持たない (図7)。このことは、アローでは例えばニューラルネットワークの構造を層の出力する値に応じて動的に変更するという好ましくないプログラムを書けないということを意味する。そのため、代数的エフェクトとエフェクトハンドラを持ったアロー計算はニューラルネットワークに対する操作を実現するための言語としてふさわしい。

現在、オペレーションとエフェクトハンドラを持ったアロー計算に、ニューラルネットワークを実装するための行列計算に関する拡張と構文糖衣を加えた領域特化言語を実装している。

**謝辞** 本論文の草稿・準備中の版に対して有益なコメント・助言を与えてくださった浅田和之氏、長谷川真人氏、蓮尾一郎氏、内蔵理史氏、星野恵佑氏に感謝する。また、関係手に関する入門的な YouTube 動画 [4] を公開してくださった藤井宗一郎氏に感謝する。本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2123 の支援を受けたものである。

## 参考文献

- [1] Asada, K.: Arrows Are Strong Monads, *Proceedings of the Third ACM SIGPLAN Workshop on Mathematically Structured Functional Programming*, MSFP '10, New York, NY, USA, Association for Computing Machinery, 2010, pp. 33–42.
- [2] Asada, K. and Hasuo, I.: Categorifying Computations into Components via Arrows as Profunctors, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 264, No. 2(2010), pp. 25–45. Proceedings of the Tenth Workshop on Coalgebraic Methods in Computer Science (CMCS 2010).
- [3] Bénabou, J.: Distributors at Work, Lecture notes by Thomas Streicher, <https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/FIBR/DiWo>.

- pdf, 2000.
- [4] Fujii, S.: Introduction to Profunctors, <https://www.dropbox.com/s/183biws3qe11so4/Introduction%20to%20profunctors%207.pdf>, 2021.
- [5] Heunen, C. and Jacobs, B.: Arrows, like Monads, are Monoids, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 158(2006), pp. 219–236. Proceedings of the 22nd Annual Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS XXII).
- [6] Hughes, J.: Generalising monads to arrows, *Science of Computer Programming*, Vol. 37, No. 1(2000), pp. 67–111.
- [7] Hughes, J.: Programming with Arrows, *Advanced Functional Programming*, 2004.
- [8] Jacobs, B., Heunen, C., and Hasuo, I.: Categorical semantics for arrows, *J. Funct. Program.*, Vol. 19(2009), pp. 403–438.
- [9] Lindley, S.: Algebraic Effects and Effect Handlers for Idioms and Arrows, *Proceedings of the 10th ACM SIGPLAN Workshop on Generic Programming*, ACM, 2014, pp. 47–58.
- [10] Lindley, S., Wadler, P., and Yallop, J.: The arrow calculus, *Journal of Functional Programming*, Vol. 20, No. 1(2010), pp. 51–69.
- [11] Lindley, S., Wadler, P., and Yallop, J.: Idioms are Oblivious, Arrows are Meticulous, Monads are Promiscuous, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 229, No. 5(2011), pp. 97–117. Proceedings of the Second Workshop on Mathematically Structured Functional Programming (MSFP 2008).
- [12] Moggi, E.: Notions of computation and monads, *Information and Computation*, Vol. 93, No. 1(1991), pp. 55–92. Selections from 1989 IEEE Symposium on Logic in Computer Science.
- [13] Plotkin, G. and Power, J.: Adequacy for Algebraic Effects, *Foundations of Software Science and Computation Structures*, Honsell, F. and Miculan, M.(eds.), Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2001a, pp. 1–24.
- [14] Plotkin, G. and Power, J.: Semantics for Algebraic Operations, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 45(2001b), pp. 332–345. MFPS 2001.
- [15] Plotkin, G. D. and Pretnar, M.: Handling Algebraic Effects, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. Volume 9, Issue 4(2013).
- [16] Street, R.: The formal theory of monads, *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 2, No. 2(1972), pp. 149–168.
- [17] Wood, R. J.: Proarrows II, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, Vol. 26, No. 2(1985), pp. 135–168.