前回主に扱ったこと ・基底と線形写像の行列表示
・基底変換と行列表示の関係

Lemma k：体，V：有限生成（i.e.，有限次元）
$\cup|$
① W：部分空間も有限生成（i.e. 有限次元）

② $\dim W \leq \dim V$ で，$\begin{cases} \dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V \\ \dim V/W = \dim V - \dim W \end{cases}$

Remark $\mathbb{R}$ 加群の"次元"について，この講義では扱わないが，

$\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$ は"1次元の"$\mathbb{Z}$加群の狭義減小列である。

(∵) ① $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ とする。Wが有限生成でないとすると，$^\exists w_1 \neq 0$ in W

で $\langle w_1 \rangle \subsetneq W$ より $^\exists w_2 \in W \setminus \langle w_1 \rangle, \cdots$ とくり返すと，これは無限に続けられて

$^\forall r \geq 1$ について $w_1 \sim w_r$ は線形独立であることがcheckできる。

つまり $^\forall r \geq 1$，$\dim V \geq r$ となってしまう。

② Wの基底をVの基底に延長できることから明らか（上の①の最後でも用いている）//

Cor k：体，$V \xrightarrow{f} W$：k-線形，V, W：有限生成（$\Leftrightarrow$ 有限次元）

① fが単射 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$ で $\dim V = \dim W$ なら fは同型

② fが全射 $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$ で $\dim V = \dim W$ なら fは同型

(∵) $V/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$ より $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

① fが単射 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$ は環と同様。これから分かる。

② fが全射 $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = W$。これから分かる。//

Thm (ランク標準形)

k: 体, $\forall A \in M_{m,n}(k)$, $\exists! r \geq 0$, $\exists P \in GL_m(k)$, $\exists Q \in GL_n(k)$ s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

☺ A に対応する $k^n \xrightarrow{F_A} k^m$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ において, $k^n / \ker F_A \xrightarrow[\overline{F_A}]{\sim} \operatorname{Im} F_A \subseteq k^m$, $[\vec{v}] \longmapsto F_A(\vec{v})$

$\dim \operatorname{Im} F_A = r$ とし, $\operatorname{Im} F_A$ の基底 $w_1, \cdots, w_r$ をとり, k^m の基底に延長する。

$\ker F_A$ の基底 $v_1', \cdots, v_{n-r}'$ をとり, さらに $v_1, \cdots, v_r$ を $F_A(v_i) = w_i$ ととる。 "$F_A([v_i])$"

claim $v_1, \cdots, v_r, v_1', \cdots, v_{n-r}'$ は k^n の基底である。

(☺ 線形独立であることを示せばよい。 $\sum_{i=1}^{r} c_i v_i + \sum_{j=1}^{n-r} d_j v_j' = 0$ とする。

F_A すると, $\sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0 \ (\text{in } k^m)$。よって $\forall i, c_i = 0_k$

すると $\sum_{j=1}^{n-r} d_j v_j' = 0$ だが, $v_1', \cdots, v_{n-r}'$ は基底なのだった。 //)

k^n の基底 $v_1, \cdots, v_r, v_1', \cdots, v_{n-r}'$ に関する F_A の行列表示は $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ になっている。

k^m の基底 $w_1, \cdots, w_r$, + 延長分

rの一意性について $\exists P', \exists Q'$ について $P'AQ' = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすると

$\dim \ker F_A = n - r'$ は明らか。 //

Cor $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} F_A$

応用

prop k:体, $A \in M_n(k)$ について

① $\exists B \in M_n(k)$, $AB = E_n \Rightarrow BA = E_n$

② $\exists B \in M_n(k)$ $BA = E_n \Rightarrow AB = E_n$

(つまり, 片側逆の存在から逆元の存在が分かる。)

☺ 対応する $k^n \xrightarrow{F_A} k^n$ を考える。

① $k^n \xrightarrow{F_B} k^n \xrightarrow{F_A} k^n$ なら F_B は単射 が容易に分かる。

($F_{AB} = id_{k^n}$, F_A は全射)

よって F_A は同型。よって $F_A^{-1} = F_B$ で $BA = E_n$

② 同様

$B = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

分かったら lucky

prop k:体 $A \in M_{m,n}(k)$, $B \in M_{n,\ell}(k)$ について

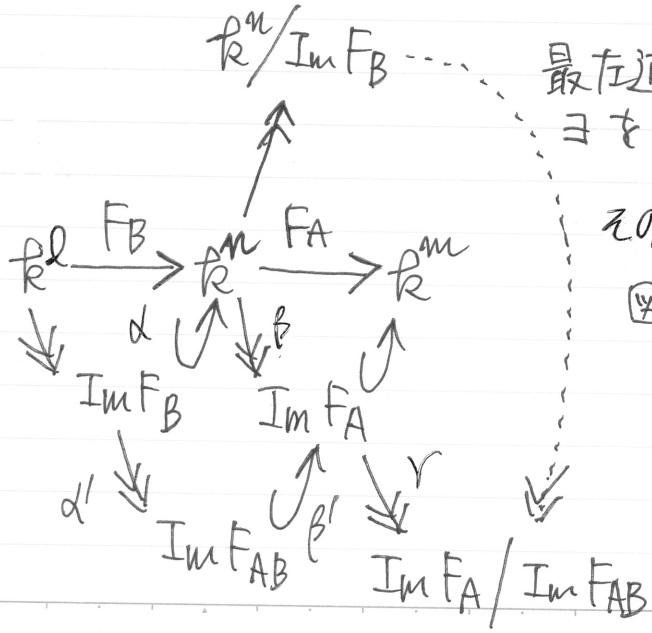
$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$

☺ 最右辺は明らか。

($\mathrm{Im}(F_{AB}) = F_A(F_B(k^\ell)) \subseteq F_A(k^n) = \mathrm{Im} F_A$

$\| $

$F_A(\mathrm{Im} F_B) \xleftarrow[F_A]{} \mathrm{Im} F_B$ から従う)



最右辺は $\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(AB) \leq n - \mathrm{rank}(B)$ を示すため

$\exists$ を確認する。

そのためには $\gamma \circ \beta \circ \alpha = 0$ を見ればよいが

図式の可換性より明らか。

($\beta' \alpha' = \beta \alpha$)

$\gamma \circ \beta$ は全射なので $\xrightarrow{\exists}$ は全射

(上でもやった) //

Def V: k線形空間 $\supseteq V_1, \cdots, V_r$: 部分空間

$\sum_{i=1}^{r} V_i := \left\{ \sum_{i=1}^{r} v_i \mid v_i \in V_i \ (1 \leq \forall i \leq r) \right\} \subseteq V$ は部分空間だが、

これが直和 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v \in \sum_{i=1}^{r} V_i, \exists! v_1 \in V_1, \cdots, \exists! v_r \in V_r$ s.t. $\sum_{i=1}^{r} v_i = v$

Remark $\bigcap_{i=1}^{r} V_i \subseteq V$ は部分空間だが、$\bigcup_{i=1}^{r} V_i$ は部分空間とは限らない。

prop $\sum_{i=1}^{r} V_i$ は直和 $\Leftrightarrow 1 \leq \forall j \leq r,\ \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq r}} V_i \cap V_j = \{0\}$

☺ $(\Rightarrow)$ $\exists j$, $0 \neq \exists w \in \sum_{i \neq j} V_i \cap V_j$ とする。 $w = \sum_{i \neq j} v_i$ $\exists v_i \in V_i$

だが、$\sum_{i \neq j} v_i - w = 0 = \sum_{i \neq j} 0_k \cdot v_i + 0_k \cdot w$ で矛盾が生じた

(☺ $0_k \neq 1_k$ in 体)

$(\Leftarrow)$ $v = \sum_{i=1}^{r} v_i = \sum_{i=1}^{r} v_i'$ $(v_i, v_i' \in V_i)$ のとき、

$\forall j$, $v_j - v_j' = \sum_{i \neq j} v_i' - v_i \in \{0\}$ より. $v_j = v_j'$ //

"**Cor**" さらに $\forall i$, V_i: 有限生成 を仮定すると 次とも同値

$v_1^{(i)}, \cdots, v_{N_i}^{(i)}$: V_iの基底 $(1 \leq i \leq r) \Rightarrow v_1^{(1)}, \cdots, v_{N_1}^{(1)}, \cdots, v_1^{(r)}, \cdots, v_{N_r}^{(r)}$ は $\sum_{i=1}^{r} V_i$の基

☺ $(\Rightarrow)$ $v_1^{(1)}, \cdots, v_{N_r}^{(r)}$ が $\sum_{i=1}^{r} V_i$ を生成することは明らか。 $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_i} c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$

とすると、$\forall i$ $\sum_{j} c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ から $\forall i, \forall j,\ c_j^{(i)} = 0$

$(\Leftarrow)$ $\exists j$ $\sum_{i \neq j} V_i \cap V_j \ni w \neq 0$ とし、 $w = \sum_{l=1}^{N_j} c_l^{(j)} v_l^{(j)} = \sum_{i \neq j} \sum_{l=1}^{N_i} c_l^{(i)} v_l^{(i)}$

と書く。$\forall l,\ c_l^{(j)} = 0$ でなく、$\forall i \neq j, \forall l,\ c_l^{(i)} = 0$ でない。一方 (中辺)$-$(右辺)$=0$ 矛盾

Remark V_1+V_2 が直和 $\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

prop $V_1, V_2 \subseteq V$：有限生成

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1+V_2)$$

① $V_1\cap V_2$ の基底 $u_1,\cdots u_r$ を V_1：延長して $v_1\sim v_s$、V_2：延長して $w_1\sim w_t$ をそれぞれ追加して基底が与えられるとする。

claim $u_1\sim u_r, v_1\sim v_s, w_1\sim w_t$ は V_1+V_2 の基底

② 生成することは明らか。$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_iu_i+\sum_{j=1}^{s} d_jv_j}_{\in V_1}+\underbrace{\sum_{l=1}^{t} e_lw_l}_{\in V_2}=0$

とすると、$\sum_{l=1}^{t} e_lw_l\in V_1\cap V_2$ より、$\forall l, e_l=0$。よって $\forall i. c_i=0$ かつ $\forall j. d_j=0$ //

Remark $V_1\hookrightarrow(V_1+V_2)\twoheadrightarrow\frac{V_1+V_2}{V_2}$ の合成を φ とすると、

φ は全射で、$\ker\varphi=V_1\cap V_2$。よって $\frac{V_1}{V_1\cap V_2}\xrightarrow{\sim}\frac{V_1+V_2}{V_2}$（準同型定理）

これから $\dim V_1-\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1+V_2)-\dim V_2$ と導出してもよい

$\dim\left(\frac{V_1}{V_1\cap V_2}\right)$　　$\dim\left(\frac{V_1+V_2}{V_2}\right)$

記法 $\sum_{i=1}^{r} V_i$ が直和のとき、$\bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ とも書く

数 $=$　　同型 $\sim$

Def V：有限次元線形空間
$f: V \to V$：自己有限線形　部分空間 $W \subseteq V$ が f 不変 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(W) \subseteq W$

Remark V：有限生成のとき，W の基底を延長して $v_1, \dots, v_s$ を追加して
V の基底が与えられたとすると，この基底に関する f の表現行列は

$$\left(\begin{array}{c|c} f|_W \text{の表現行列} & * \\ \hline 0 & f \text{の表現行列} \end{array}\right)$$

という形をしている。

ここで $V \xrightarrow{f} V \twoheadrightarrow V/W$　$\overline{f}: V/W \to V/W$ は $\overline{f}([v]) = [f(v)]$

$V \twoheadrightarrow V/W$，$\overline{f}: V/W \to V/W$

と定まる自己有限線形で，$[v_1], \dots, [v_s]$：V/W の基底を選んでいる。

Remark 同様に $W_1, \dots, W_r \subseteq V$：$f$ 不変 s.t. $\bigoplus_{i=1}^{r} W_i = V$ なら

f のある表現行列は

$$\left(\begin{array}{c|c|c} f|_{W_1} \text{の表現行列} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & f|_{W_r} \text{の表現行列} \end{array}\right)$$

となっている。

特に $W_i = \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\}$ となるとき，

f の表現行列は

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 \ddots \alpha_1 \ (\dim W_1) & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \alpha_r \ddots \alpha_r \ (\dim W_r) \end{array}\right)$$

となる。

事実 V：有限生成な線形空間

$f: V \to V$：自己な線形 が 対角化可能 (i.e. $\exists V$の基底 s.t. この基底に関するfの表現行列は対角行列)

$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \cdots, \exists \alpha_r \in k$ s.t. $V = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$ 固有空間の直和

(ここで $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$ で $W_i := \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\}$)

∵ $\Leftarrow$：前で Remark した

$\Rightarrow$ $f(v_j^{(i)}) = \alpha_i v_j^{(i)}$ $i=1,\cdots,r$, $j=1,\cdots,N_i$ となるVの基底が

とれたとすると，$v_1^{(i)}, \cdots, v_{N_i}^{(i)} \in W_i$ は1次独立である。

以下のLemmaより $\dim \bigoplus_{i=1}^{r} W_i = \sum_{i=1}^{r} \dim W_i \geq \sum_{i=1}^{r} N_i = \dim V$

なので $\bigoplus_{i=1}^{r} W_i = V$ //

異なる固有値の固有ベクトルは1次独立

Lemma $\sum_{i=1}^{r} W_i = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$

∵ $0 = v := \sum_{i=1}^{r} w_i$ $(w_i \in W_i)$ のとき，$\forall i, w_i = 0$ を言う。

$f(v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i$

$f^2(v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 w_i$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} v \\ f(v) \\ \vdots \\ f^{r-1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \cdots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}$$

$\det \sim = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$ より $\forall i, w_i = 0$ //

Ex $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_A: k^2 \to k^2$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ は 対角化不可能な自己な線形