体　集合 $\mathbb{F}$ が体であるとは

- （加法と呼ばれる）写像 $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (a, b) \mapsto a + b$ と
- （乗法と呼ばれる）写像 $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (a, b) \mapsto a \cdot b$

が定まっていて，以下の 10 個の公理を満たすことを言う．

1. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, \forall c \in \mathbb{F}, (a + b) + c = a + (b + c)$,
2. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, a + b = b + a$,
3. $\exists 0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}, \forall a \in \mathbb{F}, 0_{\mathbb{F}} + a = a = a + 0_{\mathbb{F}}$,
4. $\forall a \in \mathbb{F}, \exists b \in \mathbb{F}, a + b = 0_{\mathbb{F}} = b + a$,
5. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, \forall c \in \mathbb{F}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
6. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, a \cdot b = b \cdot a$,
7. $\exists 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}, \forall a \in \mathbb{F}, 1_{\mathbb{F}} \cdot a = a = a \cdot 1_{\mathbb{F}}$,
8. $\forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}, \exists b \in \mathbb{F}, a \cdot b = 1_{\mathbb{F}} = b \cdot a$,
9. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, \forall c \in \mathbb{F}, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$,
10. $0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}}$.

線型空間　集合 V が $\mathbb{F}$ 線型空間であるとは，

- （加法と呼ばれる）写像 $+ : V \times V \to V, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$ と
- （スカラー倍と呼ばれる）写像 $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, (\lambda, \boldsymbol{v}) \mapsto \lambda \cdot \boldsymbol{v}$

が定まっていて，以下の 8 つの公理を満たすことを言う．

1. $\forall \boldsymbol{v} \in V, \forall \boldsymbol{v}' \in V, \forall \boldsymbol{v}'' \in V, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') + \boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'')$,
2. $\forall \boldsymbol{v} \in V, \forall \boldsymbol{v}' \in V, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}$,
3. $\exists \mathbf{0}_V \in V, \forall \boldsymbol{v} \in V, \mathbf{0}_V + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0}_V$,
4. $\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists \boldsymbol{v}' \in V, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \mathbf{0}_V = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}$,
5. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mu \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{v} \in V, (\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{v})$,
6. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{v} \in V, \forall \boldsymbol{v}' \in V, \lambda \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = (\lambda \cdot \boldsymbol{v}) + (\lambda \cdot \boldsymbol{v}')$,
7. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mu \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{v} \in V, (\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{v} = (\lambda \cdot \boldsymbol{v}) + (\mu \cdot \boldsymbol{v})$,
8. $\forall \boldsymbol{v} \in V, 1_{\mathbb{F}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

基底　以下の 2 条件が成り立つとき，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d \in V$ を $\mathbb{F}$ 線型空間 V の $\mathbb{F}$ 基底という．

線型独立性　$\forall (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{F}^d, \left(\sum_{i=1}^d c_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}_V \Rightarrow 1 \leq \forall i \leq d, c_i = 0 \right)$,

V を生成すること　$V = \mathbb{F}[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d] := \left\{ \sum_{i=1}^d c_i \boldsymbol{v}_i \middle| (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{F}^d \right\}$.

有限生成　$V = \mathbb{F}[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d]$ となる（有限個の）$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d \in V$ が存在するような $\mathbb{F}$ 線型空間 V は $\mathbb{F}$ 有限生成とよばれる．V が $\mathbb{F}$ 有限生成であれば，V に $\mathbb{F}$ 基底が存在することが選択公理を用いずに証明できる．

次元　V を $\mathbb{F}$ 線型空間とする．V に d 個の元からなる $\mathbb{F}$ 基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d$ が存在するとき $\dim_{\mathbb{F}} V = d$ と定める（このとき他の基底も d 個の元からなることが証明できる）．

部分線型空間　V を $\mathbb{F}$ 線型空間とする．V の部分集合 W が V の $\mathbb{F}$ 部分線型空間であるとは

1. $\mathbf{0}_V \in W$,
2. $\forall \boldsymbol{v} \in W, \forall \boldsymbol{v}' \in W, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{v} \in W, \lambda \cdot \boldsymbol{v} \in W$.

線型写像　V, W を $\mathbb{F}$ 線型空間とする．写像 $f : V \to W$ が $\mathbb{F}$ 線型写像であるとは，以下が成り立つことである（スカラー倍の記号 $\cdot$ は省略した）．

1. $\forall \boldsymbol{v} \in V, \forall \boldsymbol{v}' \in V, f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{v} \in V, f(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})$.

行列で表現される線型写像　A を $\mathbb{F}$ 成分 $m \times n$ 行列とするとき，写像

$$F_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \quad \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

が定まるが，これは $\mathbb{F}$ 線型写像になっている（任意の $\mathbb{F}$ 線型写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ について，唯 1 つの $\mathbb{F}$ 成分 $m \times n$ 行列 A が存在して，$f = F_A$ となることが証明できる）．

線型写像の核と像　V, W を $\mathbb{F}$ 線型空間，$\mathbb{F}$ 線型写像 $f : V \to W$ について

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\} \\ \operatorname{Im} f &= \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\} (= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\}) \end{aligned}$$

を f の核，像という．これらはそれぞれ V, W の $\mathbb{F}$ 部分線型空間であり，以下が成立する．

- f が単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$,
- f が全射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$,
- $f = F_A$ のとき，$\operatorname{rank} A = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} f$.

次元定理　V, W を $\mathbb{F}$ 線型空間，$f : V \to W$ を $\mathbb{F}$ 線型写像とする．V が $\mathbb{F}$ 有限生成であれば，

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

線型同型　W_1, W_2 を $\mathbb{F}$ 線型空間とする．写像 $f : W_1 \to W_2$ が $\mathbb{F}$ 線型同型であるとは，f が $\mathbb{F}$ 線型写像でかつ全単射であることを言う（f が全単射であれば逆写像 $f^{-1} : W_2 \to W_1$ が存在するが，f が $\mathbb{F}$ 線型同型であれば f^{-1} も $\mathbb{F}$ 線型写像（よって $\mathbb{F}$ 線型同型）であることが証明できる．圏論的には，f が $\mathbb{F}$ 線型同型であることを「$\mathbb{F}$ 線型写像 $g : W_2 \to W_1$ が存在して $f \circ g = 1_{W_2}, g \circ f = 1_{W_1}$」と定義するのが自然だが，すぐ前の注意により 2 つの定義は同値になる）．

正則行列との関係　A を $\mathbb{F}$ 成分 $m \times n$ 行列とするとき，F_A が線型同型 $\Leftrightarrow$「$m = n$ で $\det A \neq 0$」．

(B1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とする．以下の行列を A とするとき，F_A が単射か全射か同型か判定しなさい．

$$\text{(a).} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c).} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(B2) 次の $\mathbb{R}^5$ のベクトルが一次従属になるような a の値を求めよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ a-2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ a-3 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ a-4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(B3) 線型写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 \end{pmatrix}$$

について，像 $\operatorname{Im} f$ と核 $\operatorname{Ker} f$ の基底をそれぞれ 1 組求めよ．また $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ となる線型写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を 1 つ求めよ．

(B4) $f : V \to W$ を $\mathbb{F}$ 線型同型とする．以下を証明せよ（ヒント：$g = f^{-1}$ を考える）．

1. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が線型独立ならば，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n) \in W$ も線型独立である．
2. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が V を生成するならば，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n) \in W$ も W を生成する．

(B5) 実数からなる数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^\infty$ は，任意の $n \geq 0$ について漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成立するとき，good であると言うことにする．good な数列の集合 V を考えよう．

$$V = \{\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^\infty \mid \forall n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}.$$

V は加法とスカラー倍を以下のように定義でき，$\mathbb{R}$ 線型空間になる（ここでは認めてよい）．

加法 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq 0}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n \geq 0} \in V$ について，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_n + b_n)_{n \geq 0}$,

スカラー倍 $\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in V$ について，$c \cdot \boldsymbol{a} = (ca_n)_{n \geq 0}$.

1. V の次元 d を求めよ．
2. $\mathbb{R}^d$ と V の間の写像の向き（すなわち $\mathbb{R}^d \to V$ または $V \to \mathbb{R}^d$）を好きに 1 つ選んで，$\mathbb{R}^d$ と V の間の線型同型を 1 つ与えよ．

(B6)
1. 空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{R}$ 線型空間になりえるか？
2. 1 つの元からなる集合 $X = \{*\}$ を考える．X は $\mathbb{R}$ 線型空間になりえるか？
3. 2 つの元からなる集合 $X = \{*_1, *_2\}$ を考える．X は $\mathbb{R}$ 線型空間になりえるか？
4. 整数の集合 $W = \mathbb{Z}$ を考え，加法として通常の整数の足し算 $+$ を採用する．これにうまくスカラー倍を定義して，W を $\mathbb{R}$ 線型空間にすることはできるか？

V を順序付き基底 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ を持つ n 次元 $\mathbb{F}$ 線型空間とし，W を順序付き基底 $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$ を持つ m 次元 $\mathbb{F}$ 線型空間とする．

$\mathbb{F}$ 線型写像 $f : V \to W$ を決めることと，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots f(\boldsymbol{v}_n) \in W$ を決めることは同じである．そして $f(\boldsymbol{v}_1), \cdots f(\boldsymbol{v}_n) \in W$ を決めることと，$j = 1, \cdots, n$ について

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{w}_i$$

なる $a_{ij} \in \mathbb{F}$ たち（ここで $1 \leq i \leq m$）を決めることは同じである．このようにして得られた行列

$$R_f = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

を，f の順序基底対 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に関する**行列表示**（representation）とよぶ．

A が $\mathbb{F}$ 成分の $m \times n$ 行列で，$V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, f = F_A$ のとき，

$$R_f = Q^{-1}AP$$

となる．ここで $P = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n), Q = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$ は，それぞれの行列を並べて得られる正則行列である（P は $n \times n$ で，Q は $m \times m$）．

$V = W, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ のときは，R_f を f の順序基底対 $\boldsymbol{v}$ に関する行列表示と呼ぶ．また $\boldsymbol{v}$ をうまく選んで，R_f を対角行列にすることを，f の**対角化**（diagonalization）と呼ぶ．

(C1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とし，$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ で定まる $\mathbb{R}$ 線型写像 $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．$\mathbb{R}^2$ の順序基底 $\boldsymbol{v} = (\binom{1}{1}, \binom{1}{2})$ に関する F_A の行列表示を求めよ．

(C2) 線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ について，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に関する行列表示を求めよ．

(C3) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる $\mathbb{R}$ 線型写像 $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．$\mathbb{R}^2$ の任意の順序基底 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ について，$\boldsymbol{v}$ に関する F_A の行列表示は対角行列ではないことを示せ．

(C4) 高々 2 次の実数係数多項式のなる $\mathbb{R}$ 線型空間 $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ は順序基底 $\boldsymbol{v} = (1, x, x^2)$ を持つ 3 次元 $\mathbb{R}$ 線型空間である．今，以下の写像 T を考える：

$$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad f(x) \mapsto f(1 + 2x)$$

1. T は $\mathbb{R}$ 線型写像であることを示せ．
2. T の順序基底 $\boldsymbol{v}$ に関する行列表示を求めよ．

(C5) 2 次の複素正方行列のなす $\mathbb{C}$ 線型空間 V から V への写像 f を

$$f(X) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき次の問いに答えよ（京大の大学院入試より）．

1. f が線型写像であることを示せ．
2. V の基底 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する f の行列表示 A を求めよ．
3. A の行列式 $\det A$ を求めよ．