1 一様連続性

各点での連続性：$A \subseteq \mathbb{R}$ について，関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が $a \in A$ で連続であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

連続性：$A \subseteq \mathbb{R}$ について，関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が連続であるとは，任意の $a \in A$ で連続であること

一様連続性：$A \subseteq \mathbb{R}$ について，関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が一様連続であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in A, \forall a' \in A, |a - a'| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(a')| < \varepsilon$$

定理：$I = [a, b]$ を閉区間とする（$a < b$）．連続関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は一様連続である．

2 演習問題

(A1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ は一様連続であることを示せ．

(A2) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x^2)$ が一様連続かどうか調べよ．

(A3) $I = [a, b], (a, b], [a, b), (a, b)$ を区間とし，端点を除いた開区間を J とする．$f : I \to \mathbb{R}$ が連続で，J で微分可能かつ，f' が J で有界ならば，f は I で一様連続であることを示せ．

(A4) $I, J \subseteq \mathbb{R}$ について，関数 $f : I \to J, g : J \to \mathbb{R}$ は共に一様連続であるとする．このとき $g \circ f$ も一様連続であることを示せ．

(A5)
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が一様連続のとき，$f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が一様連続かどうか調べよ
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，f^2 が一様連続のとき，$|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が一様連続かどうか調べよ

3 リーマン積分の定義 （以下 $a < b$ とする）

分割：$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ を $[a, b]$ の分割という．

分割の幅：$\Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ の幅 $|\Delta|$ を以下で定義する．

$$|\Delta| := \max\{x_j - x_{j-1} \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

リーマン積分：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が区間 $[a, b]$ でリーマン積分可能であるとは

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n) : [a, b] \text{ の分割},$$

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \forall (\xi_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n [x_{j-1}, x_k], \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - A \right| < \varepsilon$$

と定義され，このとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = A$ と書く．

（注）上で A は存在するなら一意的である（あたりまえ）．

（注）リーマン積分可能性は上のようにリーマン和の収束で定義する流儀と，以下のように上積分・下積分を用いて $s(f) = S(f)$ となるとき，リーマン可積分と定義する流儀とがある．非自明な事実だが，有界関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について 2 つの可積分性の定義は同値である（そもそも $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が有界でなければ，リーマン和は収束せず，f は $[a, b]$ でリーマン積分不可能）．

過剰和・不足和：有界な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と分割 $\Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ について，

$$M_j := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}, \quad m_j := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

とおき（実数の連続性より $m_j, M_j \in \mathbb{R}$），過剰和 $U_\Delta(f)$ と不足和 $L_\Delta(f)$ を以下で定義する．

$$U_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \quad L_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}).$$

分割の細分：$\Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$, $\Delta' = (y_0 < y_1 < \cdots < y_m)$ を $[a, b]$ の分割とする．$0 \leq \forall i \leq n, 1 \leq \exists j \leq m, x_i = y_j$ となるとき Δ' は Δ の細分であるという．このとき $L_\Delta(f) \leq L_{\Delta'}(f) \leq U_{\Delta'}(f) \leq U_\Delta(f)$ が成り立つ．

下積分・上積分：有界な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ の下積分と上積分を以下で定義する．

$$s(f) = \sup\{L_\Delta(f) \mid \Delta : [a, b] \text{ の分割 }\}, \quad S(f) = \inf\{U_\Delta(f) \mid \Delta : [a, b] \text{ の分割 }\}.$$

Darboux の定理：$\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} L_\Delta(f) = s(f), \lim_{|\Delta| \to 0} U_\Delta(f) = S(f).$

（注）：正確な意味は $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta : [a, b]$ の分割,$|\Delta| < \delta \Rightarrow s(f) - L_\Delta(f) < \varepsilon$ など．

定理：連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a, b]$ でリーマン積分可能である．

4　演習問題

(B1)　以下の関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は $[0, 1]$ でリーマン積分不可能であることを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

(B2)　関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能ならば，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right)$$

が存在して，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に等しいことを示せ．

(B3) 有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン可積分であるための必要十分条件は $S(f)=s(f)$ であることを示せ．さらにこのとき $S(f)=s(f)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ である．

(B4) 有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン可積分であるための必要十分条件は，$\forall\varepsilon>0,\exists\Delta:$ $[a,b]$ の分割,$U_\Delta(f)-L_\Delta(f)<\varepsilon$（Cauchy の判定基準）

(B5) 以下の関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ はリーマン積分可能かどうか調べよ．

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & (0<x\le 1)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

(B6) 単調関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ でリーマン積分可能であることを示せ．

(B7) 連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ でリーマン積分可能であることを示せ．

(C1) 次の不定積分を計算せよ．

1. $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$
2. $\displaystyle\int\frac{1}{2-x^2}dx$
3. $\displaystyle\int(\log x)^2dx$
4. $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx$
5. $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

(C2) 次の積分を計算せよ．

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\tan x}{1+\cos^2 x}dx$
3. $\displaystyle\int_1^3\frac{x^2}{x^2-4x+5}dx$

(C3) 次の極限値を積分を用いて表し，その値を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{1}{k}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$

(A1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $|\sin x| \le |x|$ なので，

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \le |x-a|$$

よって $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$ が成り立つ．

(A2) 一様連続ではない．実際，$x_k = \sqrt{(2k+1/2)\pi}, x'_k = \sqrt{(2k+3/2)\pi}$ とすると（$k \ge 0$），$f(x_k) = 1, f(x'_k) = -1$ だが，

$$x'_k - x_k = \frac{\pi}{\sqrt{(2k+3/2)\pi} + \sqrt{(2k+1/2)\pi}}$$

は $k \to \infty$ とするといくらでも 0 に近づく．

(A3) $M > 0$ を $\forall x \in J, |f'(x)| < M$ ととる．平均値の定理より $\forall x \in I, \forall a \in I, \exists\theta \in (0,1), f(x) - f(a) = f'(a+\theta(x-a))(x-a)$ なので，$\forall\varepsilon > 0, \forall x \in I, \forall a \in I, |x-a| < \varepsilon/M \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．

(A4) 仮定より $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta_1(\varepsilon) > 0, \forall x \in I, \forall a \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ と $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta_2(\varepsilon) > 0, \forall x \in J, \forall a \in J, |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon$ だが，$\delta = \delta_1(\delta_2(\varepsilon))$ とすると，$\forall x \in I, \forall a \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ が成り立つ．

(A5)
1. 一般には一様連続ではない．実際 $f(x) = x$ は一様連続だが，f^2 は一様連続ではない（詳細はお任せします）．
2. 一様連続である．まず $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{|x|}$ は一様連続である（証明はお任せします）．よって $|f| = g \circ f^2$ は仮定と (A4) によって一様連続である．

(C3)
1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{6}.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1\log(1+x)dx = \log(4) - 1$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} = \int_2^3\frac{dx}{x} = \log 3 - \log 2.$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \int_0^1\log(1+x^2)dx = \log 2 - 2 + \pi/2$ なので，求める極限値は $\exp(\log 2 - 2 + \pi/2)$.

(B1) $[0,1]$ の分割 Δ について，$U_\Delta(f)=1, L_\Delta(f)=0$ である．

(B2) $d=(b-a)/n$ とおく．$[a,b]$ の分割 $\Delta_n=(a,a+d,a+2d,\cdots,b=a+nd)$ を考え，$\xi_j\in[a+(j-1)d,a+jd]$ を $\xi_j=a+jd$ ととったリーマン和が $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^n f\left(a+\frac{j(b-a)}{n}\right)$ である．$n\to\infty$ とすると $|\Delta_n|=d\to 0$ なので，f がリーマン積分可能であれば，このリーマン和は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に収束する．

(B3) $S(f)=s(f)$ であれば，Darboux の定理より $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\Delta:[a,b]$ の分割,$|\Delta|<\delta\Rightarrow s(f)-L_\Delta(f)<\varepsilon, U_\Delta(f)-S(f)<\varepsilon$．一般に $\Delta=(x_0<x_1<\cdots<x_n)$ と $(\xi_j)_{j=1}^n\in\prod_{j=1}^n[x_{j-1},x_k]$ について $L_\Delta(f)\le\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})\le U_\Delta(f)$ なので，$|\Delta|<\delta$ ならば $\forall(\xi_j)_{j=1}^n\in\prod_{j=1}^n[x_{j-1},x_k], s(f)-\varepsilon<\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})<S(f)+\varepsilon$．よって $A=S(f)=s(f)$ ならば $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン可積分で $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=A$．
逆に $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン可積分とする．つまり $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\Delta:[a,b]$ の分割,$|\Delta|<\delta\Rightarrow\forall(\xi_j)_{j=1}^n\in\prod_{j=1}^n[x_{j-1},x_k],|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})-A|<\varepsilon$ とする．$\Delta=(x_0<x_1<\cdots<x_n)$ が $|\Delta|<\delta$ のとき，$M_j=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{j-1},x_j]\}$ について $\exists\xi'_j\in[x_{j-1},x_j], M_j-f(\xi'_j)<\varepsilon/(b-a)$ なので，$\Theta=\sum_{j=1}^n f(\xi'_j)(x_j-x_{j-1})$ について $U_\Delta(f)-\Theta=\sum_{j=1}^n(M_j-f(\xi'_j))(x_j-x_{j-1})<\varepsilon$．よって $|\Delta|<\delta$ ならば $|U_\Delta(f)-A|\le|U_\Delta(f)-\Theta|+|\Theta-A|<2\varepsilon$．つまり $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}U_\Delta(f)=A$．同様に $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}L_\Delta(f)=A$ が言えるので，Darboux の定理より $S(f)=s(f)=A$．

(B4) $[a,b]$ の分割 Δ について，$L_\Delta(f)\le s(f)\le S(f)\le U_\Delta(f)$ なので，$\forall\varepsilon>0,\exists\Delta:[a,b]$ の分割,$U_\Delta(f)-L_\Delta(f)<\varepsilon$ ならば，$s(f)=S(f)$ となり f は $[a,b]$ でリーマン可積分である．逆に f は $[a,b]$ でリーマン可積分であれば，$s(f)=S(f)=A$ で，$U_{\Delta_1}(f)<A+\varepsilon, L_{\Delta_2}(f)>A-\varepsilon$ となる $[a,b]$ の分割 Δ_1,Δ_2 が存在する．$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ とすると，$U_\Delta(f)-L_\Delta(f)\le U_{\Delta_1}(f)-L_{\Delta_2}(f)<2\varepsilon$ となる．

(B5) リーマン可積分である．実際 $[1/n,1]$ で f は連続なのでリーマン可積分なので，$U_{\Delta'}(f)-L_{\Delta'}(f)<1/n$ となる $[1/n,1]$ の分割 $\Delta'=(1/n=x_1<\cdots<x_n)$ が存在する．今 $\Delta=(0=x_0<x_1<\cdots<x_n)$ とすると $M_1=1,m_1=-1$ より（定義は 2 ページのとおり），$U_\Delta(f)-L_\Delta(f)=2/n+(U_{\Delta'}(f)-L_{\Delta'}(f))<3/n$ となる．

(B6) f は単調増加と仮定し，さらに $f(a)<f(b)$ の場合に示せば十分である．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\Delta=(x_0<x_1<\cdots<x_n)$ が $|\Delta|<\varepsilon/(f(b)-f(a))$ ならば，$U_\Delta(f)-L_\Delta(f)=\sum_{j=1}^n(f(x_j)-f(x_{j-1}))(x_j-x_{j-1})<\varepsilon/(f(b)-f(a))\sum_{j=1}^n(f(x_j)-f(x_{j-1}))=\varepsilon$ となるので，Cauchy の判定基準より f は $[a,b]$ でリーマン可積分である．

(B7) f は一様連続なので $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\forall x\in[a,b],\forall x'\in[a,b],|x-x'|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ である．分割 $\Delta=(x_0<x_1<\cdots<x_n)$ について $[x_{j-1},x_j]$ で f は連続なので $\exists y_j\in[x_{j-1},x_j],M_j=f(y_j)$ かつ $\exists z_j\in[x_{j-1},x_j],m_j=f(z_j)$ である（定義は 2 ページのとおり）．よって $|\Delta|<\delta(\varepsilon/(b-a))$ ならば，$U_\Delta(f)-L_\Delta(f)=\sum_{j=1}^n(f(y_j)-f(z_j))(x_j-x_{j-1})<\varepsilon/(b-a)\sum_{j=1}^n(x_j-x_{j-1})=\varepsilon$ となるので，Cauchy の判定基準より f は $[a,b]$ でリーマン可積分である．