

## 1 復習：(行) 階段行列

掃出し法 (Gaussian elimination) とは, 3 つの行基本変形:

- ある行に, 0 でない数をかける
- ある行にある数 (0 でもよい) をかけて, 他の行に加える
- 2 つの行を入れ替える

によって, 与えられた行列を階段行列 (echelon matrix):

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \cdots & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

に変形することである (ここで  $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$  かつ  $a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{r,j_r} \neq 0$ ). ここで非ゼロな数  $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \dots, a_{r,j_r}$  は **pivot** (枢軸) と呼ばれる.

すなわち, 階段行列  $A$  とは次の様なものである: ある  $r$  が存在して (実は  $r = \text{rank}(A)$  である)

1.  $(r+1)$  行目から最終行までは, すべて 0
2. 1 行目から  $r$  行目の各行には, pivot が 1 つずつ存在して
  - pivot は「だんだん右に」分布する
  - どの pivot も「その左と下」の数 (ないかもしれない) は 0 になっている

例えば  $\begin{pmatrix} \circ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \circ 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  は階段行列である ( $r=2$  で, pivot には  $\circ$  をつけた).

## 2 復習：連立方程式の解法

掃出し法によって, 連立一次方程式を解くことができる. そのあらすじは以下のとおりである:

1. 連立方程式は,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の形に変形できる (ここで  $A$  は  $m \times n$  行列,  $\mathbf{x}$  は  $n$  次元ベクトル,  $\mathbf{b}$  は  $m$  次元ベクトル). この  $A$  を係数行列,  $m \times (n+1)$  行列  $(A, \mathbf{b})$  を拡大係数行列と呼ぶ.
2. 拡大係数行列に掃出し法を適用し, 階段行列  $(B, \mathbf{c})$  を得たとする (ここで  $B$  は  $m \times n$  行列,  $\mathbf{c}$  は  $m$  次元ベクトル) と, 与えられた連立方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  は  $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$  と同値になる.
3.  $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$  は,  $B$  が階段行列なので逆向きに解くことができる (後退代入).
4. できない場合, 解は存在しない. ちなみに解が存在する必要十分条件は  $\text{rank } A = \text{rank}(A, \mathbf{b})$  で, 解が存在する場合の解の自由度 (パラメータの数) は  $n - \text{rank } A$  である.

### 3 掃出し法の練習

(X1) 以下の行列が階段行列であることを, pivot に○をつけることで確認せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(X2) 次の行列を, 掃出し法によって階段行列に変形せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(X3) 係数行列が階段行列になっている

$$\begin{cases} 3x - 5y + 3z + w = 0 \\ -y - z + 2w = 0 \\ -7z + 7w = 0. \end{cases}$$

を後退代入によって解け.

(X4) 以下の連立方程式を, 掃出し法によって解け.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

(X5) 以下が解を持つような  $k$  の値を定め, 解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \\ 3x + 7y - 6z = k. \end{cases}$$

### 4 行列の対角化

$n \times n$  行列  $A$  が対角化可能であるとは, ある可逆  $n \times n$  行列  $P$  が存在して,  $D := P^{-1}AP$  が対角化行列になることをいう. 対角化は可能だったりそうでなかったりする. 以下がその判定方法と, 対角化可能な場合の  $P$  と  $D$  の計算手順である (注: 証明は授業でそのうちやと思います):

1.  $A$  の固有値  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  を列挙する. これは固有多項式  $\det(tE_n - A) = 0$  という方程式を解くことで達せられる.
2. 固有値  $\alpha_i$  の線型独立な固有ベクトル  $\mathbf{p}_{i,1}, \dots, \mathbf{p}_{i,d_i}$  を計算する ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). これは  $(A - \alpha_i E_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  という連立方程式を解くことで達せられる.
3.  $d_1 + \dots + d_s = n$  であるときに限って  $A$  は対角化可能である.  $P$  として

$$P = (\mathbf{p}_{1,1}, \dots, \mathbf{p}_{1,d_1}, \mathbf{p}_{2,1}, \dots, \mathbf{p}_{2,d_2}, \dots, \mathbf{p}_{s,1}, \dots, \mathbf{p}_{s,d_s})$$

が取れ (固有ベクトルを並べた行列), このとき  $D = P^{-1}AP$  は, 対角線に

$$\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{d_1 \text{ 個}}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{d_2 \text{ 個}}, \dots, \underbrace{\alpha_s, \dots, \alpha_s}_{d_s \text{ 個}}$$

が, この順に並んだ対角行列になる.

## 5 対角化の練習

(A1) 行列  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  は対角化不可能であることを示せ.

(A2) 以下の行列の固有値を求めよ.

$$(a). \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b). \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad (c). \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(A3) (A2) の行列の固有ベクトルを求めよ.

(A4) (A2) の行列のうち、対角化可能なものはどれか?

(A5) (A4) の行列  $A$  について  $P^{-1}AP$  が対角行列になるような可逆行列  $P$  を求めよ.

(A6) (A5) について、それぞれ  $P^{-1}AP$  を求めよ (注意: 逆行列と行列積の計算は不要).

(A7) 行列  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$  が対角化可能かどうか調べよ (時間が余った人向け).

(A8) 対角化可能な  $n \times n$  行列  $A, B$  が,  $AB = BA$  ならば,  $P^{-1}AP$  と  $P^{-1}BP$  が対角行列になるような可逆な  $n \times n$  行列  $P$  が存在することを示せ (解けることは想定されていません).