

行基本変形 (basic row operation) 以下の 3 つの操作のこと

1. i 行と j 行を入れ替える ($i \neq j$)
2. i 行に, K の非ゼロ元 c をかける ($c \neq 0$)
3. i 行に, j 行の K の元 c 倍を加える ($i \neq j, c \in K$)

連立方程式の拡大係数行列に行基本変形を施しても, 同値な連立方程式が得られる.

置換 (permutation) n 点集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ からそれ自身への全単射 $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim}$

$\{1, 2, \dots, n\}$ のこと. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ のように 2 行表示される.

行列式 (determinant) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ について

$$\det A = \sum_{\sigma: n \text{ の置換}} \text{sign}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

転倒数 (number of transpositions) $\text{trans}(\sigma) = |\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

符号 (signature) $\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{\text{trans}(\sigma)}$.

サラスの方法 (Sarrus's rule) 2×2 行列と 3×3 行列の行列式を定義通り求めること.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

余因子 (cofactor) $n \times n$ 行列 A の i 行 j 列を削除し, $(n-1) \times (n-1)$ 行列 B を得たとする.

$(-1)^{i+j} \det B$ を A の (i, j) 余因子と呼び, $\tilde{a}_{ij}$ と書く.

余因子行列 (cofactor matrix) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ について,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられる $n \times n$ 行列 (転置に注意). $\det A \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

余因子展開 (cofactor expansion) $n \times n$ 行列 A の $\det A$ を再帰的に求める方法.

(i 行) $\det A = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in} \tilde{a}_{in}$

(j 列) $\det A = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + \cdots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$

以下は, 4×4 行列の 1 列に関する余因子展開である.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

(C1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式と余因子行列は何か？

(C2) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ のとき、余因子行列を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(C3) $n \times n$ 行列 A の行列式 $\det A$ と余因子行列 $\tilde{A}$ の定義を述べなさい。

(C4) 全単射 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を $1, 2, \dots, n$ の置換と呼び、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$

と 2 行表示するのであった。 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とす

るとき、符号数 $\text{sign}(\sigma), \text{sign}(\tau), \text{sign}(\sigma\tau), \text{sign}(\tau\sigma\tau)$ を求めよ。

(C5) 以下の 4×4 行列の行列式を求めよ。

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

(C6) 連立方程式
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
 を考える。今

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と置く。 $\det((\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) \neq 0$ と仮定するとき、クラメルの公式

$$x_1 = \frac{\det((\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n))}{\det((\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n))}$$

を示せ (ヒント 1: 元の連立方程式は $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ と等価である。ヒント 2: 行列式の列に関する多重線形性と交代性を思い出す)。

(C7) クラメルの公式を用いて、次の連立方程式を解け。
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(C8) $n \times n$ 行列 A の成分がすべて整数であるとする。このとき $\det A = \pm 1$ であることと、 A^{-1} が存在してかつ A^{-1} の成分もすべて整数であることは同値であることを示せ。

1 行列の対角化

$n \times n$ 行列 A が対角化可能であるとは、ある可逆 $n \times n$ 行列 P が存在して、 $D := P^{-1}AP$ が対角化行列になることをいう。対角化は可能だったりそうでなかったりする。以下がその判定方法と、対角化可能な場合の P と D の計算手順である（注：証明は授業でそのうちやと思います）：

1. A の固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ を列挙する。これは固有多項式 $\det(tE_n - A) = 0$ という方程式を解くことで達せられる。
2. 固有値 α_i の線型独立な固有ベクトル $\mathbf{p}_{i,1}, \dots, \mathbf{p}_{i,d_i}$ を計算する ($i = 1, 2, \dots, s$)。これは $(A - \alpha_i E_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ という連立方程式を解くことで達せられる。
3. $\sum_{i=1}^s d_i = n$ であるときに限って A は対角化可能である。 P として

$$P = (\mathbf{p}_{1,1}, \dots, \mathbf{p}_{1,d_1}, \mathbf{p}_{2,1}, \dots, \mathbf{p}_{2,d_2}, \dots, \mathbf{p}_{s,1}, \dots, \mathbf{p}_{s,d_s})$$

が取れ（固有ベクトルを並べた行列）、このとき $D = P^{-1}AP$ は、対角線に

$$\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{d_1 \text{ 個}}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{d_2 \text{ 個}}, \dots, \underbrace{\alpha_s, \dots, \alpha_s}_{d_s \text{ 個}}$$

が、この順に並んだ対角行列になる。

よく使う事実として、「 A の固有多項式が 1 次式に分解し、重根をもたなければ、 A は対角化可能」がある。

2 対角化の練習

(A1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化不可能であることを示せ。

(A2) 以下の行列の固有値を求めよ。

$$(a). \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b). \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad (c). \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A3) (A2) の行列の固有ベクトルを求めよ。

(A4) (A2) の行列のうち、対角化可能なものはどれか？

(A5) (A4) の行列 A について $P^{-1}AP$ が対角行列になるような可逆行列 P を求めよ。

(A6) (A5) について、それぞれ $P^{-1}AP$ を求めよ（注意：逆行列と行列積の計算は不要）。

(A7) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$ が対角化可能かどうか調べよ。

固有多項式 (eigen polynomial, characteristic polynomial) $n \times n$ 行列 A の固有多項式 $\chi_A(t)$ は $\chi_A(t) = \det(tE_n - A)$ と定義される. 実は固有値は固有多項式の解と同じである.

固有値・固有ベクトル (eigenvalue, eigenvector) $n \times n$ 行列 A について, $\lambda \in K$ が A の固有値であるとは, $Av = \lambda v$ かつ $v \neq 0$ なる $v \in K^n$ が存在することを言う. このとき v を固有値 λ の固有ベクトルと呼ぶ.

対角化 (diagonalization) $n \times n$ 行列 A について, 可逆行列 P をうまく選んで, $P^{-1}AP$ を対角行列にすること.

3 宿題

[1] 以下の行列 A, B について, それぞれ対角化可能かどうか調べ, 対角化可能な場合は $D := P^{-1}AP, D' := Q^{-1}BQ$ が対角行列になるような可逆行列 P, Q と対角行列 D, D' を求めよ.

$$(a). A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b). B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & -4 & 4 \\ 5 & -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

[2] 複素数 a に対して, 3 次の複素正方行列 A を次のように定める. A が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ (東大数理の院試の一部).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 \end{pmatrix}.$$

4 おまけ (解答なし)

- (X1) 対角化可能な $n \times n$ 行列 A, B が, $AB = BA$ ならば, $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ が対角行列になるような可逆な $n \times n$ 行列 P が存在することを示せ (解けることは想定されていません).
- (X2) $1, 2, \dots, n$ の置換の集合を S_n と書こう (当然 $|S_n| = n!$ である). 置換 $\sigma \in S_n$ の転倒数を $\text{trans}(\sigma)$ とすると, $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{\text{trans}(\sigma)}$ なのであった. 多項式 $\sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{trans}(\sigma)}$ を積表示せよ (ヒント: $n = 2, 3, 4$ で答えのあたりをつける).
- (X3) 実行列 $n \times n$ 行列 A, B について, $AB - BA = E_n$ となることはないことを示せ (ヒント: $n = 1, 2$ のときは証明できるだろうか?).
- (X4) A, B を $n \times n$ の正方行列とするとき (ここで $n \geq 2$), $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ と $\widetilde{\widetilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$ を示せ (注: A, B が可逆行列のときはやさしい).