

1 ベキ級数

上限：数列 $(a_n)_{n \geq 0}$ の上限 $A = \sup_n a_n$ とは，以下の 2 条件を満たすものである（最小上界． $(a_n)_{n \geq 0}$ が上に有界でないときは $A = +\infty$ と定義する）．

1. $\forall n \geq 0, a_n \leq A$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, A - \varepsilon < a_N$

上極限：数列 $(a_n)_{n \geq 0}$ の上極限 $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ とは，以下の 2 条件を満たすものである（ $(a_n)_{n \geq 0}$ が上に有界でないときは $A = +\infty$ と定義する）．

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, a_n < A + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0, \{n \geq 0 \mid a_n > A - \varepsilon\}$ は無限集合

コーシー・アダマールの定理による収束半径：ベキ級数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ において

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad R = \frac{1}{\alpha}$$

とする（ $\alpha = 0$ のときは $R = +\infty$ とし， $\alpha = +\infty$ のときは， $R = 0$ とする）．このとき

1. $|x| < R$ で $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ は絶対収束する．
2. $0 < R' < R$ について， $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ は $|x| \leq R'$ で一様収束する．
3. $|x| > R$ ならば $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ は発散する

ダランベールの比判定法による収束半径：ベキ級数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ において $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ が存在す

ると仮定すると，収束半径 R は $R = \frac{1}{\alpha}$ で与えられる（ $\alpha = 0$ のときは $R = +\infty$ とし， $\alpha = +\infty$ のときは， $R = 0$ とする）．

ベキ級数の微積分：ベキ級数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ の収束半径 R の内側で，その微分・積分が項別に行える．

すなわち $|x| < R$ の関数としての以下の等式が成り立つ．

1. $\int \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$
2. $\frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$

ワイエルシュトラス M 判定法（優級数定理）： $(f_n)_{n \geq 0}$ を $A \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数族で，「 $\forall n \geq 0, \forall x \in A, |f_n(x)| \leq M_n$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が存在する」ような $(M_n)_{n \geq 0}$ が存在するとき， $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は A で（絶対）一様収束する．

2 演習問題

(A1) 次の級数の収束半径を求めよ.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n+1}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}, \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n, \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}$$

(A2) 1. 関数 $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ を, $x=0$ のまわりでべき級数展開せよ. また, その収束半径 R を求めよ.

2. $|a| < R$ となる a について, 関数 $f(x)$ を $x=a$ のまわりでべき級数展開せよ. その級数が収束するような x の範囲を求めよ.

(A3) $f(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^x$ のべき級数展開を用いて, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ を求めよ.

(A4) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ の収束半径を r とし, 开区間 $(-r, r)$ で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ で定める.

1. 収束半径 r を求めよ.

2. 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

3. $f(x)$ を求めよ.

4. $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を求めよ.

(A5) ライブニッツの公式を示したい. そのため $|t| < 1$ で

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$

に注目する (絶対収束). $|x| < 1$ について, 0 から x まで項別積分して

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

をえる. 右辺は $x=1$ でも収束し (何故か?), $\arctan x$ が $x=1$ で連続であることより, 以下 (アーベルの定理) を示せば十分である:

べき級数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ を考える. $x=1$ とした $\sum_{n \geq 0} a_n$ は収束すると仮定する (注:

これから $f(x)$ の収束半径 R について $R \geq 1$ がわかる) と, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n$.

1. $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ (部分和) について, 以下を示せ.

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (1-x)(s_0 + s_1 x + \cdots + s_{n-1} x^{n-1}) + s_n x^n.$$

2. アーベルの定理を示せ.

3 一様収束と項別微積分

各点収束： $E \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ と関数 f について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (各点収束) とは、 $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つことである。すなわち

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

一様収束： $E \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ と関数 f について、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるとき、 $(f_n)_{n \geq 0}$ は f に一様収束するという。

連続性の遺伝： $E \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数列 $(f_n)_{n \geq 0}$ と関数 f について、 $(f_n)_{n \geq 0}$ は f に一様収束し、各 f_n が E で連続であれば、 f も E で連続である。

項別微分 (その 1)： f_n を区間 (a, b) 上の C^1 級関数列とする。さらに

1. 導関数列 $(f'_n)_n$ が関数 g に (a, b) で一様収束し
2. 関数列 $(f_n)_n$ が関数 f に (a, b) で一様収束する

と仮定する。このとき f は (a, b) で微分可能であり、かつ $f' = g$ が成り立つ。

項別積分 (その 1)：区間 $[a, b]$ で f_n がリーマン積分可能で、 f に一様収束するとき、 f も $[a, b]$ でリーマン積分可能で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成り立つ。

(注)：「関数列 $(f_n)_n$ が関数 f に一様収束するとき、 f_n の「良い性質」が f にも遺伝する」というタイプの定理を上記に 3 つまとめた。実際には、より緩い仮定 (いくつも微妙な variation があるので注意しよう) で十分であり、実用上も重要である。

項別微分 (その 2)： f_n を区間 (a, b) 上の微分可能関数列とする。さらに

1. 導関数列 $(f'_n)_n$ が関数 g に (a, b) で一様収束し
2. ある 1 点 $c \in (a, b)$ において点列 $(f_n(c))_n$ が収束する

と仮定する。このとき $(f_n)_n$ はある関数 f に一様収束し、 f は (a, b) で微分可能で、さらに $f' = g$ 。

(注)：次はルベグの有界収束定理の原始形と思える。

項別積分 (その 2, アルツェラの定理)： $[a, b]$ でリーマン積分可能な関数の列 $(f_n)_n$ が、 f に各点収束し、さらに

1. 関数列 $(f_n)_n$ は一様有界 (つまり $\exists C > 0, \forall x \in [a, b], \forall n, |f_n(x)| < C$)
2. f は $[a, b]$ でリーマン積分可能

と仮定する。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成り立つ。

4 演習問題

(B1) 以下の例をつくれ.

1. 各 f_n は連続で, ある f に各点収束しているが, f は連続でない
2. 各 f_n は微分可能で, ある微分可能な f に各点収束しているが, f'_n は収束しない
3. 各 f_n は $[0, 1]$ でリーマン積分可能で, ある f に各点収束しているが, f は $[0, 1]$ でリーマン積分可能でない

(B2) $\mathbb{R}$ で定義された関数列 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ を考える ($n \geq 0$).

1. $\mathbb{R}$ において, $(f_n)_{n \geq 0}$ はある関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に一様収束することを示せ.
2. $x \neq 0$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ が成り立つことを示せ.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) \neq f'(0)$ を示せ.

(B3) この問題の目的は $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ (オイラー) を示すことである. $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ とすると

$$S = \sum_{n \geq 1: \text{奇数}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1: \text{偶数}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq 1: \text{奇数}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}S$$

だから $(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2})$ が絶対収束級数であることを用いた, $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n \geq 1: \text{奇数}} \frac{1}{n^2}$ を示せばよい.

1. $k \in \mathbb{Z}$ について $c_k = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}kx} dx$ を求めよ.
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ を打ち切った $\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ は $\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = -\sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ であることを示せ.
3. $x - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ を, 以下に従って厳密に証明せよ.
 - (a) $\sum_{n=-N}^N e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$ を示せ
 - (b) 上の等式を $1/2$ から $x \in (0, 1)$ まで積分することによって, 以下を示せ: 「任意の $0 < \delta < 1/2$ について, $[\delta, 1-\delta]$ 上 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ は $x - \frac{1}{2}$ に一様収束する」
4. $x - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ を $1/2$ から $x \in (0, 1)$ まで積分すると, 3(b) より項別積分できて $\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$ だが, これに $x = 1$ を代入できれば $\frac{1}{8} = \sum_{n \geq 1: \text{奇数}} \frac{1}{\pi^2 n^2}$ がえられる. $x = 1$ を代入できることを正当化せよ.

- (A5) 1 は帰納法で証明できる. 2 は, まず $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ の場合に帰着できることに注意する. $|x| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n x^n = 0$ だから $f(x) = (1-x) \sum_{n \geq 0} s_n x^n$. $s_n \rightarrow 0$ を仮定しているから, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |s_n| < \varepsilon$ である. 今 $0 < x < 1$ において評価式 $|f(x)| \leq (1-x)(|\sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n| + \frac{\varepsilon x^N}{1-x})$ がえられるから, $x \rightarrow 1-$ のとき $|f(x)| \leq 2\varepsilon$.

- (B1) 1. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ (連続) とすると, 極限関数 f は存在して以下である (不連続).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

2. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ とすると, これは恒等的に 0 なる関数 f に収束する. 一方 $f'_n = n \cos(n^2 x)$ は $n \rightarrow \infty$ で収束しない.
3. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を以下で定めると, 極限関数は以下の f である. 不連続点は有限個だから f_n はリーマン積分可能だが, f はリーマン積分不可能である (ルベグ積分は可能).

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 1 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

- (B2) 1. f_n は $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ なる関数に一樣収束する. 実際 $|x| < \varepsilon$ ならば $|f_n(x)| < \varepsilon$ であり, $|x| \geq \varepsilon$ のときは $n \geq 1/\varepsilon^2$ ならば $|f_n(x)| < \frac{|x|}{nx^2} \leq \varepsilon$ となる.

- 2,3 $f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$ である. $x \neq 0$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0$ である (分子は n の 1 次式だが, 分母は n の 2 次式のため). 一方 $\forall n, f'_n(0) = 1$ だが $f'(0) = 0$ である.

- (B3) 1. $e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \cos(2\pi nx) + \sqrt{-1}\sin(2\pi nx)$ で愚直に計算すればよい. 詳細は省略するが $c_0 = 0, c_k = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}$ である ($k \neq 0$)

2. $n \neq 0$ であれば $c_{-n}e^{-2\pi\sqrt{-1}nx} + c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ である.

3. (a) $z^{-N} + \dots + z^N = \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1} = \frac{z^{N+1/2} - z^{-N-1/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}}$ に $z = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ を代入する.

- (b) $\sum_{n=-N}^N e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$ を $1/2$ から x まで積分する ($x \in (0, 1)$) と,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^N \frac{\sin(2\pi kx)}{\pi k} = \int_{1/2}^x \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx$$

ここで部分積分より右辺は

$$-\left[\frac{\cos((2N+1)\pi t)}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin(\pi t)}\right]_{1/2}^x + \int_{1/2}^x \frac{\cos((2N+1)\pi t)}{2N+1} \left(\frac{1}{\sin(\pi t)}\right)' dx$$

だが, $\frac{1}{\sin(\pi t)}, \left(\frac{1}{\sin(\pi t)}\right)'$ は $[\delta, 1-\delta]$ で有界だから, すぐ上の式は $N \rightarrow \infty$ で一樣に 0 に収束する.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$ は $[0, 1]$ で一樣に (絶対) 収束している (詳細略), 極限は x について連続である. 右辺は明らかに $x = 1$ で連続だから, $x = 1$ を代入したものは, $\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$ で $x \rightarrow 1-$ としたものに等しい.