- 内積空間，正規直交基底，実対称行列の実直交行列による対角化，二次形式を扱います．

双線形形式：$\mathbb{F}$ を体，V を $\mathbb{F}$ 線型空間とする．$I : V \times V \to \mathbb{F}$ が $\mathbb{F}$ 双線形形式とは

$$I(\lambda \boldsymbol{v}_1 + \mu \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \lambda I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}), I(\boldsymbol{w}, \lambda \boldsymbol{v}_1 + \mu \boldsymbol{v}_2) = \lambda I(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1) + \mu I(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_2)$$

となることをいう（$\lambda, \mu \in \mathbb{F}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \in V$）．

対称双線形形式：さらに $\forall \boldsymbol{v}_1 \in V, \forall \boldsymbol{v}_2 \in V, I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)$ となるとき，I は対称という．

内積：V を $\mathbb{R}$ 線形空間とする．V の内積とは，対称 $\mathbb{R}$ 双線形形式 $I : V \times V \to \mathbb{R}$ であって，さらに以下の正値性 (positivity) をみたすものをいう（$||\boldsymbol{v}|| := \sqrt{I(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ を $\boldsymbol{v}$ の長さという）：

$$\forall \boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}, I(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$$

内積空間：$\mathbb{R}$ 線形空間 V と，その内積 I の組 (V, I) を内積空間とよぶ．

直交補空間：内積空間 (V, I) と部分線形空間 $W \subseteq V$ について

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, I(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

を W の V における直交補空間とよぶ．$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V, (W^{\perp})^{\perp} = W$ が成り立つ．

コーシー・シュワルツの不等式：内積空間 (V, I) において，以下の不等式が成立する．

$$\forall \boldsymbol{v}_1 \in V, \forall \boldsymbol{v}_2 \in V, |I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)| \leq ||\boldsymbol{v}_1|| ||\boldsymbol{v}_2||$$

$\mathbb{R}^n$ の標準内積：数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に，$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ によって $\mathbb{R}$ 双線形形式を定義すると，これは $\mathbb{R}^n$ の内積になる．ここで $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ である．

正規直交系：内積空間 (V, I) において，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ は，$1 \leq \forall i, \forall j \leq n, I(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{i,j}$ となるとき，正規直交系であるという．ここで $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである．

（注）：正規直交系は線形独立である．

グラム・シュミット直交化法：(V, I) を内積空間，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in V$ が線形独立のとき，$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i / ||\boldsymbol{b}_i||$ でえられる $\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_r$ は正規直交系になる．特に $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が基底であれば，$\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_r$ は正規直交基底（ONB, orthonormal basis）になる．

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{I(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{I(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{I(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{I(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1 - \frac{I(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{I(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)} \boldsymbol{b}_2, \cdots$$

実直交行列：$n \times n$ 実行列 P は $P^{-1} = {}^tP$ となるとき，実直交行列とよばれる．$A = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ と列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{R}^n$ を用いて表示すると，P が実直交行列であることと，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の ONB であることは同値である．

実対称行列の実直交行列による対角化：実対称行列 A の固有値は実数になり，さらに実直交行列 P により対角化可能である．

（注）：実対称行列 A の固有値が実数になるのは，$A = {}^tA$ であるからというよりも，$A = \overline{{}^tA}$（エルミート行列）であることが本質的である．

（注）：上で P は次のようにして求めればよい．

1. A は対角化可能なので，$Q^{-1}AQ$ が対角行列になるような実可逆行列 $Q = (\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$ が存在する
2. $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ にグラム・シュミット直交化を施して，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ をえたとすると $P = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ とすればよい

正定値：$n \times n$ 実対称行列 A は

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}, {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} > 0$$

をみたすとき正定値 (positive definite) とよばれる．

正定値判定法：$n \times n$ 実対称行列 A について以下はすべて同値である．

1. A は正定値
2. A の固有値がすべて正
3. $1 \leq \forall k \leq n, \det A_k > 0$（ここで A_k は A の 1〜k 行・列からなる $k \times k$ 部分行列である）

1　演習問題

(A1) $\mathbb{R}^4$ に標準的な内積を入れる。V を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間とする。このとき V の $\mathbb{R}^4$ における直交補空間 W の基底を 1 組求めよ（平成 25 年度京大大学院入試より）。さらにそれを ONB にせよ。

(A2) 標準的なユークリッド内積 $\langle , \rangle$ が与えられた実線型空間 $\mathbb{R}^4$ において，次のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ で張られる部分線型空間を W とする．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. W とその直交補空間 $W^{\perp}$ の基底をそれぞれ 1 組求めよ（2008 年度名大大学院入試より）．

2. W とその直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底をそれぞれ 1 組求めよ．

(A3) 2×2 の実直交行列 P は，適当な $\theta \in \mathbb{R}$ を用いて $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ または $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(A4) 2 次曲線 $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$ は楕円・双曲線のいずれになるか論じなさい．

(A5) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列を 1 つ求めよ（2008 年度名大大学院入試より）．

(A6) 以下の問に答えよ．

1. 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列を 1 つ求めよ（2008 年度名大大学院入試より）．

2. 3 変数関数

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 4xz - 4yz = (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に対して，$\dfrac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$（$(x,y,z) \neq (0,0,0)$）の上限および下限

$$\sup\left\{ \frac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \mid x,y,z \in \mathbb{R}, (x,y,z) \neq (0,0,0) \right\}$$
$$\inf\left\{ \frac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \mid x,y,z \in \mathbb{R}, (x,y,z) \neq (0,0,0) \right\}$$

を求めよ（2008 年度名大大学院入試より）．

(A7) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ において

$$a > 0, b > 0, a + b = 1$$

とする．

1. 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

2. 任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{v} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ（2007 年度名大大学院入試より）.

(A8) 行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す．$n \geq 2$ を整数として，n 次の実対称行列 A が正値であるとは，任意の列ベクトル $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して ${}^tuAu > 0$ が成り立つことをいう．以下の問に答えよ．

1. B を実正則行列とするとき，$A = {}^tBB$ は正定値実対称行列であることを示せ.
2. A を正値実対称行列とするとき，$A = {}^tBB$ となる実正則行列が存在することを示せ（2014 年度名大大学院入試より）.

(A9) 行列，ベクトルは実数成分であるものとし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさを $||\boldsymbol{v}||$ で表す．以下の問に答えよ．

1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとし，第一成分は非負とする.

2. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なら $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となることを示せ.
3. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ のとき

$$F(\boldsymbol{x}) = \frac{A\boldsymbol{x}}{||A\boldsymbol{x}||}$$

とする．(a) で求めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$（$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$），対応する単位固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする．$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し

$$\boldsymbol{x}_0 = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = F(\boldsymbol{x}_n)$$

でベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に定義する．$\boldsymbol{x}_n$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の一次結合として表示し，係数を a_1, a_2, a_3 で表せ.

4. (c) で与えた $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し極限 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ が存在し，A の固有ベクトルになることを示せ（2011 年度名大大学院入試より）.

(A10) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ という条件のもとで，実 2 次形式 $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ の最大値を M とすれば，M は λ に関する方程式

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の解になっていることを証明せよ（2017 年度阪大大学院入試より）.