

開集合・閉集合： $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  と  $r > 0$  について

$$U(\mathbf{x}; r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\}$$

を、中心が  $\mathbf{x}$  の半径が  $r$  開円盤とよぶ（ここで  $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  について  $|\mathbf{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ ）。

- $U \subseteq \mathbb{R}^2$  が開集合とは、 $\forall \mathbf{x} \in U, \exists r > 0, U(\mathbf{x}; r) \subseteq U$
- $C \subseteq \mathbb{R}^2$  が閉集合とは、 $\mathbb{R}^2 \setminus C$  が開集合

（注）これから  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  で定義された 2 変数関数  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  の、 $\mathbf{x} \in S$  における連続性や微分可能性を考えるが、普通は  $\exists r > 0, U(\mathbf{x}; r) \subseteq S$  という状況で考える（このことを、ここでは「 $f$  は  $\mathbf{x}$  のまわりで定義された」とぼかして表現する）。こうなっていないと気持ちわるいからである。

連続性： $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  のまわりで定義された  $f$  が、 $\mathbf{x}$  で連続とは

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}).$$

（注） $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  として、 $\varepsilon$ - $\delta$  論法で明示的に書き下すと：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (z_1, z_2) \in S, \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(z_1, z_2) - f(x_1, x_2)| < \varepsilon.$$

微分可能性： $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  のまわりで定義された  $f$  が、 $\mathbf{x}$  で微分可能とは（ここで  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}$  は内積である）

$$\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = 0. \quad (1)$$

（注）微分可能であることは、偏微分可能性と区別するため、しばしば全微分可能ともよばれる。

偏微分可能性： $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  のまわりで定義された  $f$  が、 $\mathbf{x}$  で第  $i$  方向に偏微分可能とは（ $i = 1, 2$ ）

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}$$

が存在することで、この値を  $\partial_i f(\mathbf{x})$  と書く。ここで  $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$  である。

（注） $\partial_i f(\mathbf{x})$  はもちろん「 $\partial_i f$  の  $\mathbf{x}$  での値」という意味である（ $f(\mathbf{x})$  はただの数なので、これの  $\partial_i$  は変である）。 $i = 1, 2$  に応じて、 $\partial_i f$  は  $\partial_x f, \partial_y f$  や  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$  とも書かれる。以下、第 1 方向と第 2 方向共に偏微分可能なことを、単に偏微分可能と略記する。

授業で示したこと： $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  のまわりで定義された  $f$  について：

1.  $\mathbf{x}$  で全微分可能ならば、 $\mathbf{x}$  で連続である
2.  $\mathbf{x}$  で全微分可能ならば、 $\mathbf{x}$  で偏微分可能で  $\partial_i f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i$  ((1) の記法を用いた)
3.  $f$  が  $\mathbf{x}$  で連続偏微分可能 ( $C^1$  級) ならば、 $f$  は  $\mathbf{x}$  で全微分可能である

(注) このうち 3 は重要である (連続偏微分可能は「連続かつ偏微分可能」ではなく, 「偏微分可能で偏微分が連続」である). 証明の要点は,

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = (f(x+h, y+k) - f(x+h, y)) + (f(x+h, y) - f(x, y))$$

と変形し, 平均値の定理を用いることであった:

$$\begin{aligned} 0 < \exists \theta_1 < 1, f(x+h, y) - f(x, y) &= \partial_x f(x + \theta_1 h, y)h \\ 0 < \exists \theta_2 < 1, f(x+h, y+k) - f(x+h, y) &= \partial_y f(x+h, y + \theta_2 k)k. \end{aligned}$$

ここまでで偏微分可能性は用いているが, 偏微分の連続性は用いていないことに注意しよう.

(A1) 上の「証明の要点」の残りを完成せよ.

(A2) 次の方程式を求めよ.

1. 曲面  $z = x^2 + y^2$  の点  $(1, 2, 5)$  における接平面
2. 曲面  $z^2 = xy$  の点  $(1, 4, 2)$  における接平面

(A3)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  として

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \log(x^2 + y^2) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考える. これが  $\mathbf{0}$  で微分可能かどうか調べよ.

(A4)  $f$  は  $\mathbf{x}$  のまわり  $U$  で定義されており, 偏微分可能で, 偏微分は  $U$  で有界 (i.e.,  $\forall i = 1, 2, \exists K_i > 0, \forall \mathbf{x} \in U, |\partial_i f(\mathbf{x})| < K_i$ ) とする.  $f$  は  $\mathbf{x}$  で連続であることを示せ.

(A5) 単に偏微分可能だけでは, 全微分可能性は従わない. 授業で挙げた例  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は, 次のようなものだった:

- $f$  は  $\mathbf{0}$  で偏微分可能
- $f$  は  $\mathbf{0}$  で連続ではない (ので, 全微分不可能である)

授業で挙げた例の他に, 次のような関数  $f$  が欲しい:

- $f$  は  $\mathbf{0}$  で連続でかつ偏微分可能
- $f$  は  $\mathbf{0}$  で全微分可能ではない

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  として

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考えると, そのような例になっていることを示せ.

(A6) 開集合や閉集合に関連して, 以下を示せ:

1.  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$  と  $r > 0$  について, 開円盤  $U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq \mathbb{R}^2$  は開集合である (自明ではない!)
2.  $\mathbb{R}^2$  の列  $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots$  を考え,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$  であるとする. 今, 閉集合  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  について  $\forall n \geq 1, \boldsymbol{a}_n \in C$  となっているとすると,  $\boldsymbol{a} \in C$  を示せ.

(A1)  $\Delta(h, k) = f(x+h, y+k) - f(x, y) - \partial_x f(x, y)h - \partial_y f(x, y)k$  として,  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \Delta(h, k)/\sqrt{h^2 + k^2} = 0$  を示せばよい. 「証明の要点」より

$$0 < \exists \theta_1, \exists \theta_2 < 1, \Delta(h, k) = (\partial_x f(x + \theta_1 h, y) - \partial_x f(x, y))h + (\partial_y f(x + h, y + \theta_2 k) - \partial_y f(x, y))k$$

なので, 三角不等式より

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &\leq |\partial_x f(x + \theta_1 h, y) - \partial_x f(x, y)| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |\partial_y f(x + h, y + \theta_2 k) - \partial_y f(x, y)| \cdot \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq |\partial_x f(x + \theta_1 h, y) - \partial_x f(x, y)| + |\partial_y f(x + h, y + \theta_2 k) - \partial_y f(x, y)|. \end{aligned}$$

$(h, k) \rightarrow (0, 0)$  のとき,  $\theta_1 h \rightarrow 0, \theta_2 k \rightarrow 0$  で  $\partial_x f, \partial_y f$  は  $\mathbf{x}$  で連続だから,  $\partial_x f(x + \theta_1 h, y) \rightarrow \partial_x f(x, y), \partial_y f(x + h, y + \theta_2 k) \rightarrow \partial_y f(x, y)$ . よって  $\Delta(h, k)/\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$  がわかった.

(A2) 1.  $\partial_x z = 2x, \partial_y z = 2y$  より,  $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$ .

2.  $z = \pm\sqrt{xy}$  であるが, 今問題になっているのは  $z = \sqrt{xy}$  のほうなので,  $\partial_x z = \sqrt{y/x}/2, \partial_y z = \sqrt{x/y}/2$  である. よって  $z = 2 + (x - 1) + (y - 4)/4$ .

(A3) 微分可能である.  $\lim_{h \rightarrow +0} h \log h = 0$  (詳細略) に注意すると,  $\partial_x f(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \log(h^2)}{h} = 0 = \partial_y f(\mathbf{0})$ . さらに  $f(\mathbf{0}) = 0$  なので,  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{h})/|\mathbf{h}| = 0$  を示せばよい.  $\mathbf{h} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  とおくと ( $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ),  $x^2 + y^2 = r^2, xy \leq r^2$  より,  $|f(\mathbf{h})|/|\mathbf{h}| \leq 2r^2 \log(r^2)/r = 4r \log r$ .  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  は  $r \rightarrow +0$  と同値なので,  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  とすると  $f(\mathbf{h})/|\mathbf{h}| \rightarrow 0$  となる.

(A4)  $K = \max\{K_1, K_2\}, \Delta(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y)$  とする. 「証明の要点」より

$$0 < \exists \theta_1, \exists \theta_2 < 1, \Delta(h, k) = \partial_x f(x + \theta_1 h, y)h + \partial_y f(x + h, y + \theta_2 k)k$$

なので, 三角不等式より  $|\Delta(h, k)| \leq K(|h| + |k|)$ . よって  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \Delta(h, k) = 0$  をえる.

(A5)  $(x, y) \neq (0, 0)$  であれば  $\partial_x f = x^2(x^2 + 3y^2)/(x^2 + y^2)^2, \partial_y f = -2x^3y/(x^2 + y^2)^2$  はやさしい.  $h \neq 0$  のとき  $f(h, 0) = h, f(0, h) = 0$  から,  $\partial_x f((1, 0)) = 1, \partial_y f((0, 1)) = 0$  もわかる. したがって  $f$  は偏微分可能である.  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とすると ( $r > 0$ ),  $|\partial_x f| = |1 + 2 \sin^2 \theta| \leq 3, |\partial_y f| = |-2 \cos^3 \theta \sin \theta| \leq 2$  より,  $\partial_x f, \partial_y f$  は  $\mathbb{R}^2$  で有界である. よって (A4) が適用できて ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}, U = \mathbb{R}^2$  とする),  $f$  は  $\mathbf{0}$  で連続であることが従う.

(A6) 1.  $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x}; r)$  について,  $\exists r' > 0, U(\mathbf{y}; r') \subseteq U(\mathbf{x}; r)$  を示せばよい. そのためには  $r' = r - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$  ととれることを示せば十分である ( $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x}; r)$  なので  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$  より  $r' > 0$  に注意). そのためには, 任意の  $\mathbf{z} \in U(\mathbf{y}; r')$  について,  $\mathbf{z} \in U(\mathbf{x}; r)$  であることを言えばよく, つまり  $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < r$  を言えばよい. 三角不等式より

$$|\mathbf{z} - \mathbf{x}| \leq |\mathbf{z} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r' + |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = r$$

と, 望みどおり示された.

2.  $\mathbf{a} = (x, y), \mathbf{a}_i = (x_i, y_i)$  とする.  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus C$  とすると,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  は開集合だから  $\exists r > 0, U(\mathbf{a}; r) \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus C)$ . 一方で  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$  なので,  $\exists N > 0, \forall n > N, |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| < r$ . これは  $n > N$  ならば  $\mathbf{a}_n \in U(\mathbf{a}; r) \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus C)$  を導き,  $\forall n \geq 1, \mathbf{a}_n \in C$  に矛盾する.