（全）微分可能性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f が，$\boldsymbol{x}$ で微分可能とは（以下 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}$ は内積）

$$\exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} = 0. \tag{1}$$

性質：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f について：

1. $\boldsymbol{x}$ で全微分可能ならば，$\boldsymbol{x}$ で連続である
2. $\boldsymbol{x}$ で全微分可能ならば，$\boldsymbol{x}$ で偏微分可能で $\partial_i f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i$（(1) の記法を用いた）
3. f が $\boldsymbol{x}$ で連続偏微分可能（C^1 級）ならば，f は $\boldsymbol{x}$ で全微分可能である

勾配ベクトル：f を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された**偏**微分可能な関数とする．$\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (\partial_1 f(\boldsymbol{x}), \partial_2 f(\boldsymbol{x}))$$

を f の $\boldsymbol{x}$ での勾配ベクトル，あるいはグラディエントとよぶ．

連鎖律：f を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわり U で定義された**全**微分可能な関数とする．γ が $t_0 \in \mathbb{R}$ のまわり I で定義された微分可能な関数で，$\forall t \in I, \gamma(t) \in U$ であれば，合成関数 $f \circ \gamma$ も I で微分可能で

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=t_0} = \operatorname{grad} f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

連鎖律の系 1：f を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわり U で定義された全微分可能な関数とする．$\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ について，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ を結ぶ線分が U に含まれるとき

$$0 < \exists \theta < 1, f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{h}.$$

（証明）$\gamma : [0,1] \to U, t \mapsto \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}$ として，$g = f \circ \gamma$ を考える．連鎖律より g は $(0,1)$ で微分可能で，$\forall t \in (0,1), g'(t) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{h}$ である．g に平均値の定理を適用して，$0 < \exists \theta < 1, g(1) - g(0) = g'(\theta)$ だが，これを書き直したものが主張そのものである．

方向微分：f を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された関数とする．$|u| = 1$ なるベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ について

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

が存在するとき，これを $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{u}$ 向きの f の方向微分とよび $\partial_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ とかく．

連鎖律の系 2：f を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわり U で定義された全微分可能な関数とする．このとき $|u| = 1$ なる任意のベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ について，$\partial_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ が存在し

$$\partial_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

(A1) 以下の f について $\mathrm{grad}\, f$ を求めよ．

1. $f(x,y)=x^2+y^2$
2. $f(x,y)=ax+by+c$
3. $f(x,y)=xy(x+y-3)$

(A2) 以下の f について，指定された点と向きにおける方向微分を求めよ．

1. $f(x,y)=x^2y$，点 $(2,-1)$，向き $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$
2. $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$，点 $(-1,1)$，向き $(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$
3. $f(x,y)=(x+y)^2$，点 $(2,2)$，向きは最大増加の向き

(A3) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{R}$ を微分可能とする．$f(x,y)$ を極座標で $g(r,\theta)$ と書いたとき：

1. $(\partial_r g)^2+(\partial_\theta g/r)^2=(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2$.
2. f が C^1級 ならば g は微分可能

(A4) f は $U(\mathbf{0};1)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\mid |\boldsymbol{x}|<1\}$ で定義された微分可能な関数とする．$\forall\boldsymbol{x}\in U(\mathbf{0};1), \mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ ならば，f は $U(\mathbf{0};1)$ で定数であることを示せ．

(A5) 前回の演習で $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ として

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

を考えると

- f は $\mathbf{0}$ で連続でかつ偏微分可能
- f は $\mathbf{0}$ で全微分可能ではない

なる例になっている，という問題だったが「f は $\mathbf{0}$ で全微分可能ではない」の解答を書き忘れていました．今回，方向微分を考えることで，f が $\mathbf{0}$ で全微分可能でないことを示せ．

(A6) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は

$$\forall t\in\mathbb{R},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2, f(t\boldsymbol{x})=t^m f(\boldsymbol{x})$$

となるとき，m 次同次関数とよばれる（簡単のため $m\geq 1$ は自然数とする）．f が微分可能であれば $x_1\partial_1 f+x_2\partial_2 f=mf$ を示せ．

(A1) 1. $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$.

2. $\operatorname{grad} f = (a, b)$.

3. $\operatorname{grad} f = (y(2x+y-3), x(x+2y-3))$.

(A2) f が微分可能であることの確認は省略する．

1. $\operatorname{grad} f = (2xy, x^2)$ より $\operatorname{grad} f(2,-1)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 0$.

2. $\operatorname{grad} f = (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2))$ より $\operatorname{grad} f(-1,1)\cdot(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 1/2\sqrt{5}$.

3. $\operatorname{grad} f = (2(x+y), 2(x+y))$ より $\operatorname{grad} f(2,2) = (8,8)$ で，最大増加の向きはこの向きなので向きは $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$．この向きの方向微分は $(8,8)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$.

(A3) 1. θ を固定する．$\gamma : \mathbb{R}_{>0} \to (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}), r \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ に $t_0 = 1$ として連鎖律を適用すると，$\partial_r g = \operatorname{grad} f(x,y)\cdot(\cos\theta, \sin\theta)$．同様に $\partial_\theta g = \operatorname{grad} f(x,y)\cdot(-r\sin\theta, r\cos\theta)$．よって

$$(\partial_r g)^2 + (\partial_\theta g/r)^2 = (\partial_x f\cos\theta + \partial_y f\sin\theta)^2 + (-\partial_x f\sin\theta + \partial_y f\cos\theta)^2 = (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2.$$

2. $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ は連続なので，f が C^1 級ならば $g(r,\theta)$ は C^1 級である．よって g は微分可能である．

(A4) 任意の $\boldsymbol{x} \in U(\mathbf{0};1)$ について，$\mathbf{0}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分は $U(\mathbf{0};1)$ に含まれることに注意しておく．連鎖律の系 1 より $0 < \exists\theta < 1, f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) = \operatorname{grad} f'(\theta\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ なので，$\forall\boldsymbol{x} \in U(\mathbf{0};1), f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0})$ が示された．

(A5) 方向微分の向き $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ を固定する（$u_1^2 + u_2^2 = 1$）．$f(h\boldsymbol{u}) = hu_1^3$ より（ちなみにこれは $h = 0$ でも正しい），$\partial_{\boldsymbol{u}} f(\mathbf{0}) = u_1^3$ である．もしも f が微分可能とすると，$\operatorname{grad} f(\mathbf{0}) = (1,0)$ より（これは $\boldsymbol{u} = (1,0), (0,1)$ のときをそれぞれ考えるとえられる），連鎖律の系 2 より $\partial_{\boldsymbol{u}} f(\mathbf{0}) = (1,0)\cdot(u_1,u_2) = u_1$ となる．よって矛盾が生じた．

(A6) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を固定して $g(t) = f(t\boldsymbol{x}) - t^m f(\boldsymbol{x})$ とおく．$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto t\boldsymbol{x}$ として $f(t\boldsymbol{x})$ の微分を計算するために連鎖律を適用すると

$$g' = \operatorname{grad} f(t\boldsymbol{x}) - mt^{m-1} f(\boldsymbol{x}) = 0$$

なので $t = 1$ とすると $(\partial_x f, \partial_y f)\cdot\boldsymbol{x} - mf(\boldsymbol{x}) = 0$．つまり $x_1\partial_1 f + x_2\partial_2 f - mf = 0$.