

高階偏微分 : $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について, 高階偏微分が $\partial_1 \partial_2 f = \partial_1 (\partial_2 f)$ といった具合に定義される (存在するならば). ∂_* の個数を, この高階偏微分の階数とよぶ ($\partial_1 \partial_2$ は 2 階). $\partial_1 \partial_2$ などを「関数についてその高階偏微分を返す対応」とみなし, 微分作用素とよぶことがある.

C^n 級 : $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について, すべての n 階の偏微分が存在し, かつ連続のとき, f は U で C^n 級という.

偏微分の交換可能性 : $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について, f が C^2 級ならば $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$.

(注) これから例えば C^3 級の f について, $\partial_1 \partial_2 \partial_1 f = \partial_1 \partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 \partial_1 f$ といったことも従う.

2 変数のテイラーの定理 : $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された C^n 級関数 f を考える. $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{h} = (s, t)$ について, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ を結ぶ線分が U に含まれるとき

$$0 < \exists \theta < 1, f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)f(\mathbf{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)^2 f(\mathbf{a})/2! \\ + \cdots + (s\partial_1 + t\partial_2)^{n-1} f(\mathbf{a})/(n-1)! + (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})/n!$$

が成り立つ. ここで $(s\partial_1 + t\partial_2)^m f(\mathbf{a})$ は $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (\partial_1^k \partial_2^{m-k} f(\mathbf{a})) s^k t^{m-k}$ の意味である. 微分作用素として $(s\partial_1 + t\partial_2)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} s^k t^{m-k} \partial_1^k \partial_2^{m-k}$ と思うとよいだろう.

(A1) 以下の f について $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 \partial_1 f, \partial_1 \partial_2 f, \partial_2 \partial_1 f, \partial_2 \partial_2 f$ を求めよ.

1. $f(x, y) = xe^{xy}$

2. $f(x, y) = \log(1 + 2x + 3y)$

(A2) 以下の $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ について :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f は C^1 級であることを示せ.

2. $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$ を示せ.

(A3) $f(\mathbf{a}) + (x\partial_1 + y\partial_2)f(\mathbf{a}) + (x\partial_1 + y\partial_2)^2 f(\mathbf{a})/2! + \cdots + (x\partial_1 + y\partial_2)^n f(\mathbf{a})/n!$ を $\mathbf{a}$ における f の n 次テイラー多項式とよぶ. 以下の f の $\mathbf{0}$ における 3 次テイラー多項式を求めよ.

1. $f(x, y) = \sin(xy)$

2. $f(x, y) = 1/\sqrt{(1+x)(1+y)}$

(A4) 2019 年 12 月 13 日の演習問題 (A5) は以下のようなものであった :

$x = a$ のまわり $U(\subseteq \mathbb{R})$ で定義された n 回微分可能な関数 f について, 以下の関数を考える (これは $U \setminus \{a\}$ で定義されている).

$$H(x) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) / (x-a)^n.$$

1. $f^{(n)}$ が連続であれば $\lim_{x \rightarrow a} H(x) = 0$ を示せ.

2. 「 $f^{(n)}$ が連続」 という仮定を外し、単に「 n 回微分可能」のとき、どうだろうか？
これを思い出しつつ、 f を $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ のまわりで定義された C^n 級関数とすると

$$\lim_{\mathbf{h}=(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \sum_{k=0}^n (s\partial_1 + t\partial_2)^k f(\mathbf{a})/k!}{\sqrt{s^2 + t^2}^n} = 0.$$

(A5) 偏微分の交換可能性について、実際は以下のことが成り立つ：

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数で、 U において $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_2 \partial_1 f$ が存在し、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ において $\partial_2 \partial_1 f$ は連続とする。このとき $\partial_1 \partial_2 f(\mathbf{a})$ も存在し、 $\partial_1 \partial_2 f(\mathbf{a}) = \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{a})$ である。

証明は授業と同じである：

1. $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ を (小さく) とり、 $(a_1, a_2), (a_1 + h_1, a_2), (a_1, a_2 + h_2), (a_1 + h_1, a_2 + h_2)$ を頂点とする長方形 Q が U に含まれるとする (U が開集合という仮定より $\mathbf{h}$ を小さくとれば可能である)。

$$\Delta := f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2)$$

について、 Q の内部 (つまり Q の境界以外) に $\Delta = h_1 h_2 \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{s})$ を満たす点 $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ が存在することを示せ。

2. 冒頭に挙げた命題を証明せよ。

$$(A1) \quad 1. \partial_1 f = e^{xy} + xye^{xy}, \partial_2 f = x^2 e^{xy}, \partial_1 \partial_1 f = 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy}, \partial_2 \partial_2 f = x^3 e^{xy}, \partial_1 \partial_2 f = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy} = \partial_2 \partial_1 f.$$

$$2. \partial_1 f = 2/(1+2x+3y), \partial_2 f = 3/(1+2x+3y), \partial_1 \partial_1 f = -4/(1+2x+3y)^2, \partial_2 \partial_2 f = -9/(1+2x+3y)^2, \partial_1 \partial_2 f = -6/(1+2x+3y)^2 = \partial_2 \partial_1 f.$$

$$(A2) \quad 1. (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき,}$$

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2 y)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{(x(x^2 - y^2) - 2x^2 y)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

また

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \partial_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

である. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_1 f(x, y) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_2 f(x, y)$ を い え ば よ い が, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと

$$|\partial_1 f(x, y)| \leq 6r, \quad |\partial_2 f(x, y)| \leq 6r$$

となるので, $r \rightarrow 0$ のとき $\partial_1 f(x, y) \rightarrow 0$ かつ $\partial_2 f(x, y) \rightarrow 0$ となる.

$$2. \partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(h, 0)}{h} = 1, \partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_1 f(0, h)}{h} = -1 \text{ となっている.}$$

(A3) 明示的に書くと, 以下が求める多項式である.

$$f(\mathbf{0}) + \partial_1 f(\mathbf{0})x + \partial_2 f(\mathbf{0})y + \frac{\partial_1^2 f(\mathbf{0})}{2}x^2 + \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{0})xy + \frac{\partial_2^2 f(\mathbf{0})}{2}y^2$$

$$+ \frac{\partial_1^3 f(\mathbf{0})}{6}x^3 + \frac{\partial_1^2 \partial_2 f(\mathbf{0})}{2}x^2 y + \frac{\partial_1 \partial_2^2 f(\mathbf{0})}{2}xy^2 + \frac{\partial_2^3 f(\mathbf{0})}{6}y^3$$

1. xy

$$2. 1 - (x + y)/2 + (3x^2 + 2xy + 3y^2)/8 - (5x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 5y^3)/16$$

(A4) 2変数のテイラーの定理より

$$0 < \exists \theta < 1, f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)f(\mathbf{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)^2 f(\mathbf{a})/2!$$

$$+ \cdots + (s\partial_1 + t\partial_2)^{n-1} f(\mathbf{a})/(n-1)! + (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h})/n!.$$

よって求める極限は

$$\lim_{\mathbf{h}=(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{(s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\mathbf{a})}{n! \sqrt{s^2 + t^2}^n}$$

$$= \lim_{\mathbf{h}=(s,t) \rightarrow (0,0)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{s^k}{\sqrt{s^2 + t^2}^k} \frac{t^{n-k}}{\sqrt{s^2 + t^2}^{n-k}} (\partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\mathbf{a}))$$

f は C^n 級なので $\partial_1^k \partial_2^{n-k} f$ は連続だから $\lim_{\mathbf{h}=(s,t) \rightarrow (0,0)} \partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\mathbf{a}) = 0$

であり, $\left| \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{s^k}{\sqrt{s^2 + t^2}^k} \frac{t^{n-k}}{\sqrt{s^2 + t^2}^{n-k}} \right| \leq 1$ より, 求める極限は 0 である.

- (A5) 1. $g(x) = f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2)$ とすると $\Delta = g(a_1 + h_1) - g(a_1)$ だが, g は微分可能なので ($\because g'(x) = \partial_1 f(x, a_2 + h_2) - \partial_1 f(x, a_2)$. ここに $\partial_1 f$ の存在を用いた) 平均値の定理より

$$\exists \theta \in (0, 1), \Delta = h_1(\partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) - \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2)).$$

$h(y) = \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, y)$ に同じ考えを適用して (ここに $\partial_2 \partial_1 f$ の存在を用いている)

$$\exists \theta' \in (0, 1), \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) - \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2) = h_2 \partial_2 \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta' h_2).$$

まとめると $(s, t) = (a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta' h_2)$ がもとめるものである.

2. $A = \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{a})$ とする. $\partial_2 \partial_1 f$ は $\mathbf{a}$ で連続なので

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h_1, \forall h_2, (0 < |h_1|, |h_2| < \delta \Rightarrow |\partial_2 \partial_1 f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - A| < \varepsilon).$$

1 より $\left| \frac{\Delta}{h_1 h_2} - A \right| < \varepsilon$ だが

$$\frac{\Delta}{h_1 h_2} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)}{h_2} - \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2} \right)$$

に注意する. h_1 を固定して $h_2 \rightarrow 0$ とすると

$$\left| \frac{\partial_2 f(a_1 + h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)}{h_1} - A \right| \leq \varepsilon$$

をえる (ここに $\partial_2 f$ の存在を用いた). これが任意の $0 < |h_1| < \delta$ について成り立つのだから, 定義より $\partial_1 \partial_2 f(a_1, a_2) = A$ ということである.