

- (A1) 次の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ について, $f(x, y) = 0$ は与えられた (a, b) を通り $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ をもつことを示し, $\varphi'(a)$ を求めよ.
1. $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + x, (a, b) = (1, 2)$
 2. $f(x, y) = y + \cos(xy), (a, b) = (\pi, 1)$
 3. $f(x, y) = xe^{xy} - x^2, (a, b) = (1, 0)$
- (A2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y^5 + 16y - 32x^3 + 32x$ について,
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, f(x, y) = 0$ を示せ. これで陰関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y$ が定まる.
 2. φ は C^1 級であることを示し, $\varphi'(x) = 0$ となる x を求めよ.
- (A3) $\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上を動くとき,
1. xy の極値を求めよ.
 2. $x + y$ の極値を求めよ.
- (A4) 束縛条件 $ax + by = k$ のもとで, $x^2 + y^2$ の最小値を求めたい (ここで $(a, b) \neq (0, 0), k \neq 0$).
1. とりあえずラグランジュの未定乗数法を適用してみよ.
 2. それが本当に最小値であるかどうか考察せよ.
- (A5) 以下の証明の誤りを指摘せよ:
- 1 は最大の自然数である. 実際, 最大の自然数を M とすると, $M \geq 1$ だが ($\because 1$ は自然数), M^2 も自然数なので $M \geq M^2$ が従う. よって $1 \geq M$ である. ■
- (A6) この問題の目的は, 陰関数定理における C^1 級の仮定が外せないことを明らかにすることである. $0 < \alpha < 1$ を固定して, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \alpha y + y^2 \sin(1/y) - x & (y \neq 0) \\ -x & (y = 0) \end{cases}$$

を考える. このとき以下が成り立つ (と思うのですが, わかりませんでした. どなたか解いて教えてください. それなりに難しいと思います. 別の f を提示するのも OK です):

1. f は C^1 級でないが全微分可能で $f(0, 0) = 0, \partial_2 f(0, 0) = \alpha$. (これらはやさしい)
2. 以下は不成立: $\exists \delta > 0, \exists!$ 連続関数 $\varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, f(x, \varphi(x)) = 0$ かつ $\varphi(0) = 0$. (追記: $\exists!$ は $\exists$ に変えてもやはり不成立のまま)

- (A1) 1. f は C^∞ 級で $f(1, 2) = 0, \partial_2 f(1, 2) = -3$ なので陰関数定理が使える. $\varphi'(a) = -\partial_1 f(a, b)/\partial_2 f(a, b) = 5/3$
2. 上と同様である. $\varphi'(a) = -\partial_1 f(a, b)/\partial_2 f(a, b) = 0$.
3. 上と同様である. $\varphi'(a) = -\partial_1 f(a, b)/\partial_2 f(a, b) = 1$.
- (A2) 1. 固定された x について, $g(y) = f(x, y)$ とすると, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} g(y) = \pm\infty$ で ($g(y)$ の主要項が y^5 だから. 厳密な証明はお任せします). よって中間値の定理より $\exists y \in \mathbb{R}, g(y) = 0 (= f(x, y))$ だが, $g'(y) = 5y^4 + 16 > 0$ より g は狭義単調増加関数なので, この y はただ 1 つである.
2. $\partial_2 f(x, y) = 5y^4 + 16 \neq 0$ より, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $(x, \varphi(x))$ を通り $f = 0$ で定まる C^1 級の陰関数 ϕ が存在する. 1 より, ϕ は φ の制限である. よって φ は C^1 級で, $\varphi'(x) = \phi'(x) = -\partial_1 f(x, y)/\partial_2 f(x, y) = (96x^2 - 32)/(5y^4 + 16)$ (ここで $y = \varphi(x)$). よって $x = \pm 1/\sqrt{3}$ で $\varphi'(x) = 0$ となる.
- (A3) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とすると, $g = 0$ では $\text{grad } g = (2x, 2y) \neq \mathbf{0}$ であることに注意する.
1. $f(x, y) = xy$ とする. 連立方程式 $g(x, y) = 0, \text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ を解く. すなわち $x^2 + y^2 - 1 = 0, y = 2\lambda x, x = 2\lambda y$. これより $\lambda = \pm 1/2$ で $(x, y) = (\varepsilon_1/\sqrt{2}, \varepsilon_2/\sqrt{2})$ と求まる ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$). これらが本当に極値であることの考察はお任せします.
2. $f(x, y) = x + y$ とする. 連立方程式 $g(x, y) = 0, \text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ を解く. すなわち $x^2 + y^2 - 1 = 0, 1 = 2\lambda x, 1 = 2\lambda y$. これより $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ で $(x, y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ と求まる. これらが本当に極値であることの考察はお任せします.
- (A4) 1. $f(x, y) = x^2 + y^2, g(x, y) = ax + by - k$ とし, 連立方程式 $g(x, y) = 0, \text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ を解く. すなわち $ax + by = k, 2x = a\lambda, 2y = b\lambda$. よって $x = a\lambda/2, y = b\lambda/2$. ゆえに $\lambda = 2k/(a^2 + b^2)$ なので $x = ak/(a^2 + b^2), y = bk/(a^2 + b^2)$. これから $x^2 + y^2 = k^2/(a^2 + b^2)$ が最小値の候補としてもとまった.
2. 「求めるものは直線 $ax + by = k$ へ原点 $(0, 0)$ から下した垂線の長さの 2 乗である」と解釈すれば, 厳密ではないかもしれませんが図形的に考察可能です (他の方法もあるでしょう).
- (A5) 「最大の自然数 M 」の存在を仮定して証明しているが, この仮定は正しくない.
- (A6) できることを想定していません (発展問題).