商環と環準同型写像

<u>前回主に扱ったこと</u>
- 可換環の定義
- idealの定義

<u>記法</u> R：可換環，$a_1, \cdots, a_n \in R$ について

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \,\middle|\, x_i \in R \right\} \left(= \{ a_1 \sim a_n \text{のR-線形結合} \}\right)$$

は R の ideal である。これを $(a_1, \cdots, a_n)$ と書く。

<u>Remark</u>
$$(0_R) = \{0_R\}$$
$$(1_R) = R$$
$$(\ ) = \{0_R\}$$

<u>Ex</u> $R = \mathbb{Z}$ のとき $(2) = 2\mathbb{Z} = \{\text{偶数}\}$，

$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が互いに素のとき $(a, b) = \mathbb{Z}$

<u>Def</u> R：整域が単項ideal整域(PID) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall I \subseteq R$: ideal ${}^\exists a \in R$ s.t. $I = (a)$

<u>Ex</u> $\mathbb{Z}$ はPID

$\mathbb{C}[x]$ はPIDだが $\mathbb{C}[x, y]$ はPIDではない

$\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ $(\subseteq \mathbb{C})$ はPID（ガウス整数環）

<u>Rem</u> R：可換環がネーター環 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall I \subseteq R$: ideal ${}^\exists a_1 \in R, \cdots, {}^\exists a_n \in R$ s.t. $I = (a_1, \cdots, a_n)$

“たいていの”可換環はネーター環である。

商環について

outline：R：可換環
$I \subseteq R$：ideal
について R/I：商環を定義する

prop $a, b \in R$ について，$a \equiv b \pmod{I} \overset{\text{def}}{\iff} a-b \in I$ とすると，
$\equiv$ は R 上の同値関係である。

(:)
$$\left.\begin{aligned} &a \equiv a \pmod{I} \\ &a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow b \equiv a \pmod{I} \\ &a \equiv b \pmod{I},\ b \equiv c \pmod{I} \Rightarrow a \equiv c \pmod{I} \end{aligned}\right\}$$
の3条件をcheckする //

記法 $a \in R$ について $[a] := \{ b \in R \mid b \equiv a \pmod{I} \}$（同値類）
$R/I := \{ [a] \mid a \in R \}$（同値類の集合）

Ex $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z} = (2)$

$[0] = [-4] = \cdots = \{偶数\} =: 偶$

$[1] = [-101] = \cdots = \{奇数\} =: 奇$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{偶, 奇\}$

Ex $R = \mathbb{C}[x]$, $I = (x^2) = \{ f(x) \cdot x^2 \mid f(x) \in \mathbb{C}[x] \} = \{$"$x^2$以上の"多項式$\}$

$R/I = \mathbb{C}[x]/(x^2) = \{ [ax+b] \mid a, b \in \mathbb{C} \}$

((:) $\forall [g(x)] \in R/I$ （$g(x) \in \mathbb{C}[x]$）について $g(x) = x^2 \cdot Q(x) + Ax + B$ とすると
$[g(x)] = [Ax+B]$。$Ax+B \equiv A'x+B' \pmod{x^2}$ なら $A=A'$, $B=B'$ である。)

prop $+_{R/I} : R/I \times R/I \to R/I$, $\times_{R/I} : R/I \times R/I \to R/I$

$([a],[b]) \mapsto [a+b]$　　$([a],[b]) \mapsto [ab]$

は well-defined

∵ $a,b,c,d \in R$ について、$a \equiv c \pmod{I}$, $b \equiv d \pmod{I}$ ならば $a+b \equiv c+d \pmod{I}$, $ab \equiv cd \pmod{I}$

を示せばよい。

<u>$a+b \equiv c+d \pmod{I}$ であること</u>：$(a+b)-(c+d) = (a-c)+(b-d) \in I$

<u>$ab \equiv cd \pmod{I}$ であること</u>：$ab-cd = (a-c)b + c(b-d) \in I$ //

prop $(R/I, +_{R/I}, \times_{R/I}, [0_R], [1_R])$ は可換環の公理をみたす

∵ 全部はやらないが、例えば加法の結合法則を示すには

$([a]+[b])+[c] = [a]+([b]+[c])$ for all $a,b,c \in R$

を言えばよい。

$(\text{左辺}) = [a+b]+[c] = [(a+b)+c]$

$(\text{右辺}) = [a]+[b+c] = [a+(b+c)]$

$(a+b)+c = a+(b+c)$ in R なので $(\text{左辺}) = (\text{右辺})$。他も同様 //

記法 $(R/I, +_{R/I}, \times_{R/I}, [0_R], [1_R])$ を R の I による商環と言い、単に R/I と書く

Rem $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ で $\varepsilon := [x] \in \mathbb{C}[x]/(x^2)$ とすると、$\varepsilon^2 = [x^2] = [0]$ である。

つまり $\varepsilon (\neq [0])$ は"無限小"の一例と思える。

環準同型写像と環同型

Def $(R, +_R, \times_R, 0_R, 1_R)$, $(S, +_S, \times_S, 0_S, 1_S)$：可換環

写像 $f: R \to S$ が環準同型写像とは、以下の3条件がみたされること

① $\forall a \in R\ \forall b \in R,\ f(a +_R b) = f(a) +_S f(b)$

② $\forall a \in R\ \forall b \in R,\ f(a \times_R b) = f(a) \times_S f(b)$

③ $f(1_R) = 1_S$

Remark $f(0_R) = 0_S$

∵ $0_R = 0_R + 0_R$ と ①より $f(0_R) = f(0_R) + f(0_R)$ 両辺に $-f(0_R)$ を加える //

prop R：可換環, $id_R: R \to R$ は環準同型写像 (明らか)

prop R, S, T：可換環
$R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$：環準同型写像 ｝ $g \circ f: R \to T$ は環準同型写像 (容易)

Remark 上の2つの prop は "可換環のあつまり CRing は、環準同型写像を射とする圏をなす" と表現される。

prop R：可換環, $I \subseteq R$：ideal について 写像 $\pi: R \to R/I,\ a \mapsto [a]$ は環準同型写像

∵ R/I の構成の際に示した //

prop 1点集合$\{*\}$は、ただ1通りの可換環の構造をもつ(零環)が、
零環は以下の性質をもつ：
「任意の可換環Rについて、ただ1つの環準同型写像$f: R \to \{*\}$が存在」

Remark 「」を $\forall R \in CRing \ \exists! f: R \to \{*\} \in CRing$ 略記することがある。
propは"圏CRingにおいて、零環(ふつう$\{0\}$と書く)は終対象である"
と表現される。

proof ただ1つの写像$f: R \to \{*\}$が環準同型であることがcheckできる //
$a \mapsto *$

Def $f: R \to S$：可換環の環準同型写像が環同型写像であるとは、
$f \circ g = id_S$, $g \circ f = id_R$ となるような環準同型写像$g: S \to R$が存在すること

Rem このときgも環同型写像である(あたり前)

記法 可換環R, Sについて、環同型写像$f: R \to S$が存在するとき
RとSは環同型と言って、$R \cong S$と書く。
fも同型を強調するときは、$f: R \xrightarrow{\sim} S$のように書くことがある。

prop 環同型は"同値関係"である。つまり、可換環R, S, Tについて
① $R \cong R$
② $R \cong S \Rightarrow S \cong R$ (容易)
③ $R \cong S$ かつ $S \cong T \Rightarrow R \cong T$

Prop $f: R \to S$：可換環の環準同型写像が，環同型写像

$\Leftrightarrow$ fは全単射

∵ ($\Rightarrow$) 明らか

($\Leftarrow$) fの(集合論的)逆写像 $g: S \to R$ が環準同型であることを示せる。

例えば $g(a+b) = g(a) + g(b)$ (for all $a, b \in S$) を示そう。

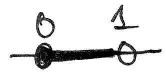
今，fは全単射なので $\exists! A \in R$ s.t. $a = f(A)$ かつ $\exists! B \in R$ s.t. $b = f(B)$

$$(\text{左辺}) = g(f(A)+f(B)) \underset{\uparrow\ f\text{は準同型}}{=} g(f(A+B)) \underset{\uparrow\ g\text{は逆写}}{=} A+B$$

$$(\text{右辺}) = g(f(A)) + g(f(B)) = A+B$$ といった具合である。//

Rem $f: X \to Y$：位相空間の連続写像が同相 $\Rightarrow$ fは全単射

は明らかだが，逆は言えない (例：



f: $[0, 1) \longrightarrow S^1$

$t \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}$)