

商環と環準同型写像

前回主に扱ったこと ・可換環の定義

・idealの定義

記法 R : 可換環, $a_1, \dots, a_n \in R$ について

$$\left\{ \sum_{i=1}^n x_i a_i \mid x_i \in R \right\} (= \{ a_1 \sim a_n \text{ の } R\text{-線形結合} \})$$

は R の ideal である。これを $(a_1, \dots, a_n)$ と書く。

Remark $(0_R) = \{0_R\}$ (常置)

$$(1_R) = R$$

$$() = \{0_R\}$$

$I \subseteq R$: ideal

$$I = R \Leftrightarrow I \ni 1_R$$

Ex $R = \mathbb{Z}$ のとき $(2) = 2\mathbb{Z} = \{\text{偶数}\}$,

$$a, b \in \mathbb{Z}_n \text{ が互いに素のとき } (a, b) = \mathbb{Z}$$

Def R : 整域が単項 ideal 整域 (PID) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall I \subseteq R$: ideal $\exists a \in R$

Ex $\mathbb{Z}$ は PID

principal ideal s.t. $I = (a)$

$\mathbb{C}[x]$ は PID だが $\mathbb{C}[x, y]$ は PID ではない domain

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} (\subseteq \mathbb{C})$ は PID (ガウス整数環)

Rem R : 可換環がネーター環 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall I \subseteq R$: ideal $\exists a_1 \in R, \dots, \exists a_n \in R$
s.t. $I = (a_1, \dots, a_n)$

“たいていの”可換環はネーター環である。

商環について

outline: R : 可換環 について R/I : 商環を定義する
 $I \subseteq R$: ideal

prop $a, b \in R$ について, $a \equiv b \pmod{I} \stackrel{\text{def}}{\iff} a-b \in I$ とすると,
 $\equiv$ は R 上の同値関係である。

(!) $a \equiv a \pmod{I}$
 $a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow b \equiv a \pmod{I}$
 $a \equiv b \pmod{I}, b \equiv c \pmod{I} \Rightarrow a \equiv c \pmod{I}$ } 3条件を check する //

記法 $a \in R$ について $[a] := \{ b \in R \mid b \equiv a \pmod{I} \}$ (同値類)
 $R/I := \{ [a] \mid a \in R \}$ (同値類の集合)

Ex $R = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z} = (2)$

$$[0] = [-4] = \dots = \{\text{偶数}\} =: \text{偶}$$

$$[1] = [-101] = \dots = \{\text{奇数}\} =: \text{奇}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\text{偶}, \text{奇}\}$$

$$a \equiv b \pmod{I}$$

$$[0] = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{2\mathbb{Z}} \}$$

Ex $R = \mathbb{C}[x], I = (x^2) = \{ f(x) \cdot x^2 \mid f(x) \in \mathbb{C}[x] \} = \{ x^2 \text{ 以上の "多項式"} \}$

$$R/I = \mathbb{C}[x]/(x^2) = \{ [ax+b] \mid a, b \in \mathbb{C} \}$$

(!) $\forall [g(x)] \in R/I$ ($g(x) \in \mathbb{C}[x]$) について $g(x) = x^2 \cdot Q(x) + Ax + B$ とすると
 $[g(x)] = [Ax+B]$. $Ax+B \equiv A'x+B' \pmod{x^2}$ ならば $A=A', B=B'$ である。

prop $+_{R/I} : R/I \times R/I \rightarrow R/I$, $\times_{R/I} : R/I \times R/I \rightarrow R/I$
 $([a], [b]) \mapsto [a+b]$ $([a], [b]) \mapsto [ab]$

is well-defined

「与えられた」

$$[ab] = [cd]$$

($\because$) $a, b, c, d \in R$ に対し, $a \equiv c \pmod{I}$ かつ $b \equiv d \pmod{I}$ ならば $a+b \equiv c+d \pmod{I}$ $ab \equiv cd \pmod{I}$

を示せばよい。 $[a] = [c], [b] = [d] \Rightarrow [a+b] = [c+d]$

$a+b \equiv c+d \pmod{I}$ であること : $(a+b) - (c+d) = (a-c) + (b-d) \in I$

$ab \equiv cd \pmod{I}$ であること : $ab - cd = (a-c)b + c(b-d) \in I //$

prop $(R/I, +_{R/I}, \times_{R/I}, [0_R], [1_R])$ は可換環の公理を満たす

($\because$) 全部はやらないが、例えば加法の結合法則を示すには

$$([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c]) \quad \text{for all } a, b, c \in R$$

を言えばよい。

$$(\text{左辺}) = [a+b] + [c] = [(a+b)+c]$$

$$(\text{右辺}) = [a] + [b+c] = [a+(b+c)]$$

$$(a+b)+c = a+(b+c) \text{ in } R \text{ である}$$

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺})。 \text{他も同様} //$$

記法 $(R/I, +_{R/I}, \times_{R/I}, [0_R], [1_R])$ を R の I による商環と言ひ、単に R/I と書く

Rem $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ について $\varepsilon := [x] \in \mathbb{C}[x]/(x^2)$ とおくと, $\varepsilon^2 = [x^2] = [0]$ である。

つまり $\varepsilon (\neq [0])$ は「無限小」の一例と思える。

環準同型写像と環同型

Def $(R, +_R, \times_R, 0_R, 1_R), (S, +_S, \times_S, 0_S, 1_S)$: 可換環

写像 $f: R \rightarrow S$ が環準同型写像とは、以下の3条件がみたされること

$$\textcircled{1} \forall a \in R \forall b \in R, f(a +_R b) = f(a) +_S f(b)$$

$$\textcircled{2} \forall a \in R \forall b \in R, f(a \times_R b) = f(a) \times_S f(b)$$

$$\textcircled{3} f(1_R) = 1_S$$

$$\textcircled{4} f(0_R) = 0_S \quad (\text{homomorphism})$$

Remark $f(0_R) = 0_S$

$$\textcircled{!} 0_R = 0_R + 0_R \text{ と } \textcircled{1} \text{ より } f(0_R) = f(0_R) + f(0_R) \text{ 両辺に } -f(0_R) \text{ を加える //}$$

prop R : 可換環, $\text{id}_R: R \rightarrow R$ は環準同型写像 (明か)

prop R, S, T : 可換環

$R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$: 環準同型写像

$g \circ f: R \rightarrow T$ は環準同型写像 (容易)

Remark 上の2つの prop は “可換環のあつち CRing は、環準同型写像を射と可圏をなす” と表現される。

prop R : 可換環

$I \subseteq R$: ideal

に於いて写像 $\pi: R \rightarrow R/I$ は環準同型写像

$$a \mapsto [a]$$

$\textcircled{!} R/I$ の構成の際に示した //

prop 1点集合 $\{*\}$ は、ただ1通りの可換環の構造をもつ(零環)が、

零環は以下 α の性質をもつ:

□ 任意の可換環 R に関して、ただ1つの環準同型写像 $f: R \rightarrow \{*\}$ が存在する

Remark □ □ を $\forall R \in \text{CRing} \exists! f: R \rightarrow \{*\} \in \text{CRing}$ 略記することがある

prop は "図 CRing において、零環(ふつう $\{0\}$ と書く)は終対象である" と表現される。

proof 1つ1つの写像 $f: R \rightarrow \{*\}$ が環準同型であることが check できる
 $a \mapsto *$

Def $f: R \rightarrow S$: 可換環の環準同型写像が環同型写像であるとは、

$f \circ g = \text{id}_S$, $g \circ f = \text{id}_R$ となるような環準同型写像 $g: S \rightarrow R$ が存在すること

Rem このとき g も環同型写像である(あたり前)

記法 可換環 R, S に関して、環同型写像 $f: R \rightarrow S$ が存在するとき

R と S は環同型と言って、 $R \cong S$ と書く。

f も同型を強調するときは、 $f: R \xrightarrow{\sim} S$ のように書くことがある。

prop 環同型は"同値関係"である。つまり、可換環 R, S, T に関して

$$\textcircled{1} R \cong R$$

$$\textcircled{2} R \cong S \Rightarrow S \cong R \quad (\text{容易})$$

$$\textcircled{3} R \cong S \text{ かつ } S \cong T \Rightarrow R \cong T$$

Prop $f: R \rightarrow S$: 可換環の環準同型写像は、環同型写像

$\Leftrightarrow f$ は全単射

① $(\Rightarrow)$ 明らか

$(\Leftarrow)$ f の (集合論的) 逆写像 $g: S \rightarrow R$ が環準同型であることを示せる

例えば $g(a+b) = g(a) + g(b)$ (for all $a, b \in S$) を示そう。

今、 f は全単射だから $\exists! A \in R$ s.t. $a = f(A)$ かつ $\exists! B \in R$ s.t. $b = f(B)$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= g(f(A) + f(B)) = g(f(A+B)) = A+B \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad f \text{ は準同型} \qquad \qquad g \text{ は逆写} \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = g(f(A)) + g(f(B)) = A+B \quad \text{といた具合である} //$$

Rem $f: X \rightarrow Y$: 位相空間の連続写像が同相 $\Rightarrow f$ は全単射

は明らかだが、逆は言えない (例: $\begin{array}{ccc} 0 & 1 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ & [0, 1] & \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} S^1 \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \bullet \\ \downarrow \\ e^{2\pi i t} \end{array}$)

