準同型定理　$R \quad I \quad R/I$

前回主に扱ったこと　・可換環とそのidealから商環が構成できること

・環準同型写像

準同型thm

普遍性について

Recall　零環$\{0\}$は次の性質をもつ：

『任意の可換環Rについて，ただ1つの環準同型写像$R \to \{0\}$が存在する』

このような"全体における立ち位置"による特徴付けを普遍性と呼ぶ

(正確な議論はしない。気になる人は『表現可能関手の表現（米田の補題）』をキーワードに調べてみること)

構造主義

prop　可換環$\mathbb{Z}$は次の性質をもつ：

『任意の可換環Rについて、ただ1つの環準同型写像$\mathbb{Z} \to R$が存在する』

$\because$ 環準同型 $f : \mathbb{Z} \to R$ は $f(1) = 1_R$ なので，$n \geq 1$ について

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{コ}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{n\text{コ}} = \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n\text{コ}}$$

でなければならない。

又，$0 = n + (-n)$ in $\mathbb{Z}$ より $f(0) = f(n) + f(-n)$

$f(0) = 0_R$ だったので $f(-n) = -(\underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{n\text{コ}})$ でなければならない。

つまり f はあったとするとただ1つである。逆に，上のように定義した f は環準同型になっていることがcheckできる //

Remark　上のことを$\mathbb{Z}$は可換環の圏CRingにおける始対象と言う。

普遍性と同型

prop 可換環 X が次の性質をもつとき, $X \cong \{0\}$ (環同型)

『任意の可換環 R について, ただ1つの環準同型写像 $R \to X$ が存在する』

∵ 仮定よりただ1つの環準同型 $\{0\} \xrightarrow{\alpha} X$ が存在する ($R = \{0\}$ とした)

一方 $\{0\}$ も同じ『』をみたすので環準同型 $X \xrightarrow{\beta} \{0\}$ が存在する (もちろんただ1つ)

今, 合成 $X \xrightarrow{\beta} \{0\} \xrightarrow{\alpha} X$ は環準同型だが,

もちろん $id_X : X \to X$ も環準同型である。

"ただ1つの" より $\alpha \circ \beta = id_X$ でなければならない。同様に $\beta \circ \alpha = id_{\{0\}}$ もわかる //

prop 可換環 X が次の性質をもつとき, $X \cong \mathbb{Z}$ (環同型)

『任意の可換環 R について, ただ1つの環準同型写像 $X \to R$ が存在する』

∵ 同様

以上のように、普遍性によって、同型を除いて、定義することが可能。

これを普遍性による定義という。

Remark 『この証明は, 環の特殊性をほとんど使っておらず、実際はより高次の一般性に依拠している』 (『ベーシック圏論』の序論より引用)

例 任意の集合 R について, 1点集合 $\{*\}$ へただ1つの写像 $R \to \{*\}$ が存在する

例 任意の集合 R について, 空集合からただ1つの写像 $\phi \to R$ が存在する

これらは集合の圏 Set における普遍性の例であり, $\{*\}$ や ϕ を全単射を除いて決定する。

普遍性の例

prop 集合XとYについて直積集合$X\times Y$は次の性質をもつ

「任意の集合Zと任意の写像 $\alpha: Z\to X$ について
$\beta: Z\to Y$

$\alpha=pr_X\circ f$ となるただ1つの写像 $f: Z\to X\times Y$
$\beta=pr_Y\circ f$

が存在する」

$$\begin{tikzcd}
 & X\times Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

ここで $pr_X: X\times Y\to X$ は射影である。
$(x,y)\mapsto x$

$pr_Y: X\times Y\to Y$
$(x,y)\mapsto y$

proof $f: Z\to X\times Y$ がそのような写像であることがcheckできる //
$z\mapsto(\alpha(z),\beta(z))$

Def 可換環 $(R, +_R, \times_R, 0_R, 1_R)$ と $(S, +_S, \times_S, 0_S, 1_S)$ について
直積集合 $R\times S$ は可換環の構造 $\left(R\times S, \underset{R\times S}{+}, \underset{R\times S}{\times}, (0_R, 0_S), (1_R, 1_S)\right)$ を
もつことがcheckできる。これをRとSの直積環といって，単に$R\times S$と書く。
ここで $\underset{R\times S}{+}: (R\times S)\times(R\times S)\to(R\times S)$, $\underset{R\times S}{\times}: (R\times S)\times(R\times S)\longrightarrow(R\times S)$
$((r,s),(r',s'))\mapsto(r+_R r', s+_S s')$ $((r,s),(r',s'))\longmapsto(r_R r', s\, s')$
と定義する。

Remark 集合X,Yの直積$X\times Y$の普遍性に現れる"集合"と"写像"を
"可換環"と"環準同型写像"に変えると，直積環$R\times S$の普遍性になっている。

商集合の普遍性

prop 集合Xとその上の同値関係$\sim$による商集合$X/\sim$は次の性質をもつ:

任意の集合Zと任意の写像$\alpha: X \to Z$について

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\alpha"'] & X/\sim \arrow[d, dashed, "f(=\overline{\alpha})"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X \quad x_1 \sim x_2 \Rightarrow \alpha(x_1) = \alpha(x_2)$

ならば、$\alpha = f \circ p$となるただ1つの写像$f: X/\sim \to Z$が存在する。ここで、$p: X \to X/\sim$ は自然な全射。以下fを$\overline{\alpha}$とも書く。

$x \mapsto C_x := \{ y \in X \mid y \sim x \}$

(∵) $\alpha = f \circ p$とすると、$\forall x \in X \quad \alpha(x) = f(C_x)$でなければならないので$f$は存在するとするとただ1つ。$f(C_x) = \alpha(x)$で$f: X/\sim \to Z$がwell-definedであることを言えばよい。つまり $C_x = C_{x'} \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(x')$ for $x, x' \in X$ を言う。$C_x = C_{x'} \Leftrightarrow x \sim x'$ なのでOK //

pが全射を用いている

系(集合での"準同型定理")

集合A, Bと写像$h: A \to B$について、A上の同値関係$\underset{h}{\sim}$を

$$a_1 \underset{h}{\sim} a_2 \iff h(a_1) = h(a_2)$$

と定めると、単射$\overline{h}: A/\underset{h}{\sim} \to B$は全単射$\overline{h}: A/\underset{h}{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, h$を誘導する。

(∵) $\overline{h}: A/\underset{h}{\sim} \to B$は構成より単射である。(実際 $\overline{h}(C_a) = \overline{h}(C_b)$ $(a, b \in A)$ は$h(a) = h(b)$と同値で、定義よりこれは$a \underset{h}{\sim} b$(つまり$C_a = C_b$)と同値。)

よって$\overline{h}: A/\underset{h}{\sim} \to \mathrm{Im}\, h$は全単射である //

商環の普遍性

prop 可換環 R とその ideal I による商環 R/I は次の性質をもつ:

任意の可換環 Z と任意の環準同型写像 $\alpha : R \to Z$ について

$\forall r \in R\ \forall r' \in R\quad r \equiv r' \pmod{I} \Rightarrow \alpha(r) = \alpha(r')$

ならば、$\alpha = \bar{\alpha} \circ p$ となるただ1つの

環準同型写像 $\bar{\alpha} : R/I \to Z$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\alpha"'] & R/I \arrow[d, dashed, "\bar{\alpha}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

∵ 写像 $\bar{\alpha} : R/I \to Z$ で $\alpha = \bar{\alpha} \circ p$ となるものがただ1つ存在するので(すぐ前でやった)

$\bar{\alpha}$ が環準同型であることを言えばよいが、$\bar{\alpha}([x]) = \alpha(x)\quad (x \in R)$

から容易にcheckできる //

Def 可換環 R の部分集合 $S \subseteq R$ が以下の条件をみたすとき、

S は可換環になる。これを R の部分環という。

① $1_R \in S$

② $\forall s \in S\ \forall s' \in S,\quad s+s' \in S,\ ss' \in S$

Ex. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (部分環)

$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ は ②は成り立つが①が成り立たないのでこの講義では部分環でない。

~~Prop $f : R \to R'$: 可換環の準同型写像 について~~

~~① $\mathrm{Im}\, f$ は R' の部分環~~

~~② $f^{-1}(0_{R'}) = \{x \in R \mid f(x) = 0_{R'}\}$ は R の ideal~~

Prop $f: R \to R'$：可換環の環準同型写像について，

① $\mathrm{Im}\, f$ は R' の部分環

② $f^{-1}(0_{R'})$ $(=\{x \in R \mid f(x) = 0_{R'}\})$ は R の ideal

∵ 容易

記法 $f^{-1}(0_{R'})$ を f の核と呼び，$\mathrm{Ker} f$ と書く。

Thm (環準同型定理) $f: R \to R'$：可換環の環準同型写像について，
単射環準同型写像 $\bar{f}: R/\mathrm{Ker} f \to R'$ は環同型 $\bar{f}: R/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$
を誘導する。

∵ $x, x' \in R$ について，$x \underset{f}{\sim} x' \Leftrightarrow x \equiv x' \mod \mathrm{Ker} f$

を check すればよい。

$(\Rightarrow)$ $f(x) = f(x')$ ならば $f(x - x') = 0_{R'}$ よって $x - x' \in \mathrm{Ker} f$

$(\Leftarrow)$ 逆にたどればよい。//

Cor (中国剰余定理の一部) R：可換環，$I, J \subseteq R$：ideals について，
環準同型 $f: R \to (R/I) \times (R/J)$ は単射環準同型 $\bar{f}: R/_{I \cap J} \to (R/I) \times (R/J)$
$r \mapsto ([r]_I, [r]_J)$

を誘導する。

∵ $\mathrm{Ker} f = I \cap J$ を示せばよいが，f の定義から明らか。

EX $R = \mathbb{Z}$，$I = 2\mathbb{Z}$，$J = 3\mathbb{Z}$ とすると，$I \cap J = 6\mathbb{Z}$ で
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ が単射環準同型と言っている
$[r]_{6\mathbb{Z}} \mapsto ([r]_{2\mathbb{Z}}, [r]_{3\mathbb{Z}})$

(この例ではもちろん環同型。次回詳しく扱う)