環上の加群

目標1： $A \in M_{m,n}(k)$, $B \in M_{n,l}(k)$ $\Rightarrow \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$

(k：体)

目標2： Jordan標準形

<u>Recall</u> k：体，k上の線形空間とは，以下をみたす4つ組 $(V, +, \cdot, 0_V)$

(ここで V：集合
$+ : V\times V \to V$：写像
$\cdot : k\times V \to V$：写像
$0_V \in V$：元)

① $(V, +, 0_V)$ は可換群

(i.e. (1A) ${}^\forall a\in V, {}^\forall b\in V, {}^\forall c\in V$, $(a+b)+c = a+(b+c)$

(1B) ${}^\forall a\in V, {}^\forall b\in V$, $a+b=b+a$

(1C) ${}^\forall a\in V$, $0_V+a=a=a+0_V$

(1D) ${}^\forall a\in V, {}^\exists b\in V$, $a+b=0_V=b+a$)

② ${}^\forall \lambda\in k\, {}^\forall \mu\in k, {}^\forall v\in V$, $(\lambda\cdot\mu)\cdot v = \lambda\cdot(\mu\cdot v)$

③ ${}^\forall \lambda\in k\, {}^\forall \mu\in k, {}^\forall v\in V$, $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$

④ ${}^\forall \lambda\in k\, {}^\forall v\in V\, {}^\forall w\in V$, $\lambda(v+w) = \lambda v+\lambda w$

⑤ ${}^\forall v\in V$, $1_k\cdot v = v$

上で 体kを形式的に環Rに変えたものが左R加群Vの定義である。

<u>Ex</u> k線形空間＝k加群

常識的なこと

- (1C) をみたす 0_V は unique。$\forall v \in V,\ 0_k \cdot v = 0_V$
- (1D) をみたす b は unique で $b=-a$ と書く。$\forall v \in V,\ (-1_k)\cdot v = -v$
  $-(-v) = v$ など

Recall k：体，V, W：k線形空間

写像 $f: V \to W$ が k線形写像 $\iff$ ① $\forall v \in V, \forall v' \in V,\ f(v+v') = f(v) + f(v')$
② $\forall \lambda \in k, \forall v \in V,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

上で体kを環Rに変えたものが，左R加群準同形の定義である。
(左R線形ともいう)

常識的なこと

- $f(0_V) = 0_W$
- id_V は線形写像で，線形写像の合成も線形写像
- ①,② は $\forall \lambda \in k, \forall \mu \in k, \forall v \in V, \forall v' \in V,\ f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v')$
  に変えても同じ，など

この講義では，環Rが可換環の場合のみ扱い，"左"という言葉をつけない。

Ex $(2\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$ は $\mathbb{Z}$加群 で $2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$線形 $(\mathrm{Im} f = 4\mathbb{Z})$
$x \mapsto 2x$

ここで $\cdot: \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$
$(a, b) \mapsto ab$

Ex $\left.\begin{array}{l} k：体 \\ f: V \to V：自己k線形 \end{array}\right\}$ について V は $k[x]$-加群。ここで $\cdot: k[x] \times V \to V$
は $(a_0 x^n + \cdots + a_n, v) \mapsto a_0 f^n(v) + \cdots + a_n v$

部分加群, 商加群, 同型

Def V : R加群, 部分集合$W \subseteq V$ が VのR部分加群とは

① $W \neq \phi$

② $\forall v \in W, \forall v' \in W, v+v' \in W$

③ $\forall a \in R, \forall v \in W, av \in W$

常識的なこと ・①,②,③ $\Leftrightarrow$ ①',②,③　ここで ①' $W \ni 0_V$

・②,③ $\Leftrightarrow$ $\forall a \in R \ \forall a' \in R \ \forall v \in W \ \forall v' \in W, \ av + a'v' \in W$

Ex $(R, +, \cdot, 0_R, 1_R)$: 可換環について, $(R, +, \cdot, 0_R)$ はR加群

RのR部分加群Iと, Rの ideal Iは 同じ概念である。

Def V : R加群

$\cup$|

W : R部分加群

について, $v \sim v' \overset{def}{\Leftrightarrow} v - v' \in W$ は V上の同値関係になるが, ((注) $v \equiv v' \bmod W$ とも書く)

この商集合 $V/W = \{ C_u \mid u \in V \}$ は, 以下でR加群になる。

$[u] = C_u := \{ v \in V \mid u \sim v \}$ (VのWによる商加群)

$$\begin{cases} [u] + [u'] := [u+u'] \\ a \cdot [u] := [au] \\ 0_{V/W} := [0_V] \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u, u' \in V \\ a \in R \end{pmatrix}$$

Def $V \xrightarrow{f} W$: R加群準同形が同型 (R同型) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists g : W \to V$: R加群準同形

s.t. $g \circ f = id_V$, $f \circ g = id_W$

prop $V \xrightarrow{f} W$: R加群準同型について，fがR同型 $\Longleftrightarrow$ fは全単射

∵ 環のときと同様。//

prop（商加群の普遍性）R加群の部分R加群Wによる商R加群V/Wは以下をみたす：

$\forall Z$: R加群

$\forall f : V \to Z$: R線形 で $v \equiv v' \bmod W \Rightarrow f(v) = f(v')$ $(v, v' \in V)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & V/W \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

となるものについて，$\bar{f} \circ p = f$ なる $\bar{f} : V/W \to Z$: R線形がただ1つ存在する。

ここで $p : V \to V/W$ は自然なR線形。
$u \mapsto [u]$

∵ 環のときと同様。商集合の普遍性より，ただの写像$\bar{f}$で$\bar{f} \circ p = f$となるものがただ1つ存在する。$\bar{f}$がR線形であることが，$\bar{f}([u]) = f(u)$ $(u \in V)$から容易にcheckできる。//

Thm（加群の準同型定理）$V \xrightarrow{f} W$: R線形について，$V/\mathrm{Ker} f \overset{\bar{f}}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Im} f$ はR同型

常識的なこと　$\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0_W)$ はVのR部分加群

$\mathrm{Im} f := f(V)$ はWのR部分加群

∵ 環のときと同様。$\forall u, \forall u' \in V$，$f(u) = f(u') \Longleftrightarrow u \equiv u' \bmod \mathrm{Ker} f$ をcheckすれば単射R線形 $V/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\bar{f}} W$ が普遍性から得られる。よって一番上のpropから全単射R線形 $V/\mathrm{Ker} f \underset{\bar{f}}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Im} f$ はR同型 //