

環上の加群

目標1: $A \in M_{m,n}(R)$
 $B \in M_{n,l}(R) \Rightarrow \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
 $(R: \text{体})$

目標2: Jordan標準形

Recall $R: \text{体}$, R 上の線形空間とは, 1x下をみたす4つ組 $(V, +, \cdot, 0_V)$

① $(V, +, 0_V)$ は可換群

i.e. (1A) $\forall a \in V, \forall b \in V, \forall c \in V, (a+b)+c = a+(b+c)$
 $(1B) \forall a \in V, \forall b \in V, a+b = b+a$

(1C) $\forall a \in V, 0_V + a = a = a + 0_V$

(1D) $\forall a \in V, \exists b \in V, a+b = 0_V = b+a$

ここで $V: \text{集合}$

$+: V \times V \rightarrow V: \text{写像}$

$\cdot: R \times V \rightarrow V: \text{写像}$

$0_V \in V: \text{元}$

$R^X, R: \text{環}$

② $\forall \lambda \in R, \forall \mu \in R, \forall v \in V, (\lambda \mu)v = \lambda(\mu v)$

③ $\forall \lambda \in R, \forall \mu \in R, \forall v \in V, (\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$

④ $\forall \lambda \in R, \forall v \in V, \forall w \in V, \lambda(v+w) = (\lambda v) + (\lambda w)$

⑤ $\forall v \in V, 1_R \cdot v = v$

λ は線形

上で R 体 R を形式的に環 R に変えたものが左 R 加群 V の定義である

Ex R 線形空間 $= R$ 加群

R : 体 or 環

常識的なこと

- (1C) をみたす 0_V は unique。 $\forall v \in V, 0_R \cdot v = 0_V$
- (1D) をみたす b は unique で $b = -a$ と書く。 $\forall v \in V, (-1_R) \cdot v = -v$
 $-(-v) = v$ など

Recall R : 体, V, W : R 線形空間

写像 $f: V \rightarrow W$ が R 線形写像 $\Leftrightarrow$ ① $\forall v \in V, \forall v' \in V, f(v+v') = f(v) + f(v')$
 ② $\forall \lambda \in R, \forall v \in V, f(\lambda v) = \lambda f(v)$

上で "体" を環 R に変えたものが、左 R 加群準同形、 f 定義できる。

(左 R 線形ともいう)

常識的なこと

$$\bullet f(0_V) = 0_W$$

これは $R = R$: 環でも同じ

• id_V は線形写像で、線形写像の合成も線形写像

• ①, ② は $\forall \lambda \in R, \forall \mu \in R, \forall v \in V, \forall v' \in V, f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v')$
 に変えても同じ、など

この講義では、環 R が可換環の場合のみ扱い、"左" という言葉をつけない。

EX $(2\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 で $2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ 線形 ($\text{Im } f = 4\mathbb{Z}$)
 $x \mapsto 2x$

$$\text{ここで } \cdot: \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$$

$$(a, b) \mapsto ab$$

EX R : 体

$f: V \rightarrow V$: 自己 R 線形

について V は $R[x]$ -加群。ここで $\cdot: R[x] \times V \rightarrow V$
 は $(a_0 x^n + \dots + a_n, v) \mapsto a_0 f^n(v) + \dots + a_n v$

R: 可換環

部分加群, 商加群, 同型

Def $V: R$ 加群, 部分集合 $W \subseteq V$ が V の R 部分加群 とは

- ① $W \neq \emptyset$
- ② $\forall v \in W, \forall v' \in W, v+v' \in W$
- ③ $\forall a \in R, \forall v \in W, av \in W$

和
入行-係
2-階級
いふ

常識的なこと $\cdot$ ①, ②, ③ $\Leftrightarrow$ ①', ②, ③ $\because$ ①' $W \ni 0_V$
 $\cdot$ ②, ③ $\Leftrightarrow \forall a \in R \forall a' \in R \forall v \in W \forall v' \in W, av + a'v' \in W$
ideal a と v の関係

Ex $(R, +, \cdot, 0_R, 1_R):$ 可換環に於いて, $(R, +, \cdot, 0_R)$ は R 加群
 R の R 部分加群 I と, R の ideal I は 同一概念である

Def $V: R$ 加群
 $W: R$ 部分加群
 に於いて, $v \sim v' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} v - v' \in W$ は V 上の同値関係になるが、
 (注) $v \equiv v' \pmod{W}$ と書く

この商集合 $V/W = \{C_u \mid u \in V\}$ は、以下で R 加群になる。

$[u] = C_u := \{v \in V \mid u \sim v\}$ (V の W による商加群)

$$\begin{cases} [u] + [u'] := [u+u'] \\ a \cdot [u] := [au] \\ 0_{V/W} := [0_V] \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u, u' \in V \\ a \in R \end{pmatrix} \quad u \in V$$

$\Leftarrow$ well-defined

Def $V \xrightarrow{f} W: R$ 加群準同形が同型 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g: W \rightarrow V: R$ 加群準同形
 (R 同型) $\text{ s.t. } g \circ f = \text{id}_V, f \circ g = \text{id}_W$

prop $V \xrightarrow{f} W$: R 加群準同型について, f が R 同型 $\Leftrightarrow f$ は全単射

② 環 α と β と同様。//

prop (商加群の普遍性) R 加群の部分 R 加群 W による商 R 加群 V/W は以下を満たす:

$$\begin{aligned} \forall \Sigma: R \text{ 加群} \quad \forall f: V \rightarrow \Sigma: R \text{ 線形} \quad \exists! \bar{f}: V/W \rightarrow \Sigma: R \text{ 線形} \\ \text{such that } \bar{f} \circ p = f \end{aligned}$$

where $p: V \rightarrow V/W$ is the natural projection, $p(v) = v + W$.

となるものについて, $\bar{f} \circ p = f$ なる $\bar{f}: V/W \rightarrow \Sigma: R$ 線形がただ一つ存在する。

ここで $p: V \rightarrow V/W$ は自然な R 線形。
 $u \mapsto [u]$

② 環 α と β と同様。商集合の普遍性より, したがって写像 $\bar{f}$ で $\bar{f} \circ p = f$ となるものがただ一つ存在する。 $\bar{f}$ が R 線形であることから, $\bar{f}([u]) = f(u)$ ($u \in V$) から容易に check できる。//

Thm (加群の準同型定理) $V \xrightarrow{f} W$: R 線形について, $V/\ker f \xrightarrow{\bar{f}} \text{Im } f$ は R 同型

常識的なこと $\ker f := f^{-1}(0_W)$ は V の R 部分加群

$\text{Im } f := f(V)$ は W の R 部分加群 $u - u' \in \ker f$

② 環 α と β と同様。 $\forall u, u' \in V, f(u) = f(u') \Leftrightarrow u - u' \in \ker f$ を check すれば

単射 R 線形 $V/\ker f \xrightarrow{\bar{f}} \text{Im } f$ が普遍性からえられる。おて一番上の prop から

全単射 R 線形 $V/\ker f \xrightarrow[\bar{f}]{} \text{Im } f$ は R 同型 //