

前回主に扱ったこと

- R 加群と R 準同形写像 (a.k.a. R 線形写像)
- R 部分加群, R 商加群, R 同型, ~~準同型写像~~

Def k : 体, V : k 線形空間, $v_1, \dots, v_n \in V$ かつ

① (k 線形)独立 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_V \Rightarrow \forall i, a_i = 0_k \quad (a_1, \dots, a_n \in k)$

② V を (k -)生成 $\stackrel{\text{def}}{\iff} V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in k \right\}$

(i.e., $\forall v \in V, \exists a_1 \in k, \dots, \exists a_n \in k, \text{ s.t. } v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$)

③ (k -)基底 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{① かつ ②}$

$\exists \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in k^n \quad \exists \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in k^n$

常識的事実 ③ $\iff \forall v \in V \exists a_1 \in k, \dots, \exists a_n \in k \text{ s.t. } v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$

③ $\Leftarrow$ ② は明らか。 $0_V = 0_k v_1 + \dots + 0_k v_n$ から ① が従う。

$(\Rightarrow)$ $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n b_i v_i \quad (a_i, b_i \in k)$ かつ $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i = 0_V$

① より $\forall i, a_i - b_i = 0_k$. かつ $\exists$ が言えれば $\exists!$ が言える ($\exists$ は ② から言える) //

Remark 上の定義を $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: 元族に拡張することは形式的に容易 (この講義ではしない)

Def k : 体, V : k 線形空間 かつ (k -)有限生成

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \geq 0, \exists v_1 \in V, \dots, \exists v_n \in V, \text{ s.t. } V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Remark $n=0$ のとき, 空な元族 $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ は形式的に ① かつ

② $\iff V = \{0_V\}$. かつ 零線形空間 $\{0\}$ は空な基底をもつ (この講義では)

Ex $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ -有限生成だが, $\mathbb{C}[x]$ は $\mathbb{C}$ -有限生成でない

Thm K : 体, V : K -有限生成な線形空間は基底をもつ。

より正確に, $V = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$ とき, 線形独立な $w_1, \dots, w_m$

に $\exists$ して, $v_1 \sim v_\ell$ から $\llcorner$ つか $v_{i_1}, \dots, v_{i_j}$ をとて ($1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq \ell$)

$w_1, \dots, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_j}$ を V の基底にできる

($\odot$) $V = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ なら $j=0$ とする。 $V \neq \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ なら

$\exists p$ s.t. $v_p \notin \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ 。 とき $w_1, \dots, w_m, v_p$ は 1 次独立である

ことを check できる。これを繰り返すと仮定より高々 ℓ 回で止まる //

Thm 上の Thm において, 基底の数は一意の (これを $\dim V$ とか $\dim_K V$ と書く)

($\odot$) $u_1 \sim u_a$ を共に V の基底とし, $a \leq b$ とする。任意の $0 \leq i < a$ に $\exists$ して, $u'_i \sim u'_b$

$u_1 \sim u_i, u'_{i+1} \sim u'_b$ が基底のとき, 必要なら $u'_{i+1} \sim u'_b$ を並べかえて

$u_1 \sim u_{i+1}, u'_{i+2} \sim u'_b$ も基底になることをいふ。

言えたとして $u'_i \sim u'_b$: 基底

$\downarrow$ 必要なら並べかえて

$u_1, u'_i \sim u'_b$: 基底 $\rightarrow \dots \rightarrow u_1 \sim u_a, u'_{a+1} \sim u'_b$: 基底

$V = \langle u_1, \dots, u_a \rangle$ だからから, $a=b$ でなければならぬ。

$u'_{i+1} = c_1 u_1 + \dots + c_i u_i + d_{i+1} u'_{i+1} + \dots + d_b u'_b$ と (仮定より) 一意に展開できるが

$u_1 \sim u'_{i+1}$ は線形独立なので, $d_{i+1} u'_{i+1} + \dots + d_b u'_b \neq 0_V$

$d_{i+1} \neq 0_K$ とおけるように $u'_{i+1} \sim u'_b$ が並べかえられているとすると,

$u_1 \sim u'_{i+1}, u'_{i+2} \sim u'_b$ が基底になっていることを check できる //

prop R : 体, V : 基底 $v_1, \dots, v_n$ をもつ線形空間。任意の線形空間 W について

$$\text{Hom}_R(V, W) := \{ f: V \rightarrow W \mid f \text{ は } R\text{-線形} \} \rightarrow W^n \quad \text{は全単射。}$$

$$f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_n))$$

Remark このことを「線形写像を与えることと、基底の行先を決めることは同じ」と表現する

① $(w'_1, \dots, w'_n) \in W^n$ について, $\varphi: V \rightarrow W$ を次のように定めると,

これは R -線形で、prop の写像と互いに逆対応になっていることが check できる //

$$\left(\forall v \in V \exists! c_1 \in R, \dots, \exists! c_n \in R \text{ s.t. } v = \sum_{i=1}^n c_i v_i \text{ なる } v \text{ に対し, このとき } \varphi(v) := \sum_{i=1}^n c_i w'_i \right)$$

Remark $\text{Hom}_R(V, W)$ に自然に R -線形空間の構造があり, prop は R 同型 にもなる。

Cor 対応 $\text{Hom}_R(V, W) \rightarrow M_{m,n}(R)$ は全単射 (ここで $w_1 \sim w_m$ は W の基底)

$$f \mapsto (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{s.t.} \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Remark $(a_{ij})_{i,j}$ を f の基底 $v_1 \sim v_n$, $w_1 \sim w_m$ に関する表現行列と言う。

行列表示

$$\text{prop } V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$

V : 基底 $v_1 \sim v_n$, f の表現行列 $B \in M_{m,n}(R)$
 W : 基底 $w_1 \sim w_m$, g の表現行列 $A \in M_{m,n}(R)$
 U : 基底 $u_1 \sim u_m$, gf の表現行列 $C \in M_{m,n}(R)$

$$\Rightarrow C = AB$$

$$\text{①} \quad \text{これこれの成分は } f(v_p) = \sum_{i=1}^m b_{ip} w_i, g(w_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} u_j, (g \circ f)(v_p) = \sum_{k=1}^m c_{kp} u_k$$

$$\text{これを定義すれば } g(f(v_p)) = \sum_{i=1}^m b_{ip} g(w_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ip} a_{ji} u_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ji} b_{ip} \right) u_j$$

$$\text{展開の一意性より } c_{kr} = \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{ir} \quad \text{つまり } C = AB //$$

"Cor" 行列積に関し結合則が成立する。i.e., $P \in M_{a,b}(K)$
 $Q \in M_{b,c}(K) \Rightarrow (PQ)R$
 $R \in M_{c,d}(K) \Rightarrow P(QR)$

① $K^d \xrightarrow{F_R} K^c \xrightarrow{F_Q} K^b \xrightarrow{F_P} K^a$ で "写像の合成に" $(F_P \circ F_Q) \circ F_R = F_P \circ (F_Q \circ F_R)$ //

(一般に $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ に" $F_A: K^n \rightarrow K^m$ は K 線形"で、
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$
 K^m, K^n の標準基底に関する F_A の表現行列は A である (定義より明らか))

Def V : 基底 $v_1 \sim v_n$ の変換行列 $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ を $v'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i$ と定める
 基底 $v'_1 \sim v'_n$

prop P は可逆行列

② $v'_1 \sim v'_n$ の変換行列を Q とすると, $PQ = E_n = QP$ だ check できる //

prop $V \xrightarrow{f} W$: K -線形, V : 基底 $v_1 \sim v_n$ の変換 $P \in GL_n(K)$
 基底 $v'_1 \sim v'_n$

W : 基底 $w_1 \sim w_m$ の変換 $Q \in GL_m(K)$
 基底 $w'_1 \sim w'_m$

$A \in M_{m,n}(K)$: 基底 $v_1 \sim v_n, w_1 \sim w_m$ に関する表現行列 $\Rightarrow B = Q^{-1}AP$
 $B \in M_{m,n}(K)$: " $v'_1 \sim v'_n, w'_1 \sim w'_m$ " //

③ これも"と同様

Remark ① $A \in M_{m,n}(K)$ に" $P \in GL_n(K)$ をうまく選んで $Q^{-1}AP$ を"キリ"に $\rightarrow$ ランク
 $Q \in GL_m(K)$ 標準形

② $V=W$ のとき, $A \in M_n(K)$ に" $P \in GL_n(K)$ をうまく選んで $P^{-1}AP$ を"キリ"に $\rightarrow$ Jordan
 標準形