前回主に扱ったこと ・R加群とR準同形写像(a.k.a. R線形写像)
・R部分加群, R商加群, R同型, 準同型写像

Def k:体, V:k線形空間, $v_1, \cdots, v_n \in V$ が

① (k-)線形独立 $\overset{}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}}$ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_V \Rightarrow \forall i, a_i = 0_k$ $(a_1, \cdots, a_n \in k)$

② Vを(k-)生成する $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle := \{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_i \in k \}$

(i.e., $\forall v \in V, \exists a_1 \in k, \cdots, \exists a_n \in k$, s.t. $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$)

③ (k-)基底 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ①かつ②

常識的事実 ③ $\Longleftrightarrow$ $\forall v \in V\ \exists! a_1 \in k, \cdots, \exists! a_n \in k$ s.t. $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$\because$ ($\Leftarrow$) ②は明らか。$0_V = 0_k \cdot v_1 + \cdots + 0_k \cdot v_n$ から①が従う。

($\Rightarrow$) $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ $(a_i, b_i \in k)$ なら $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i = 0_V = \sum_{i=1}^{n} 0_k v_i$

よって $\forall i, a_i - b_i = 0_k$。よって$\exists$が言えれば$\exists!$が言える($\exists$は②から言える) //

Remark 上の定義を$\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$:元の族に拡張することは形式的に容易 (この講義ではしない)

Def k:体, V:k線形空間が(k-)有限生成

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists n \geq 0, \exists v_1 \in V, \cdots, \exists v_n \in V$, s.t. $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$

Remark $n = 0$のとき, 空な元の族$(v_i)_{1 \leq i \leq n}$は形式的に①で,

② $\Leftrightarrow$ $V = \{0_V\}$。つまり零線形空間$\{0\}$は空な基底をもつ (この講義では)

Ex $\mathbb{C}^n$は$\mathbb{C}$-有限生成だが, $\mathbb{C}[x]$は$\mathbb{C}$-有限生成でない

Thm k：体，V：k-有限生成なk線形空間は基底をもつ。

より正確に，$V=\langle v_1,\dots,v_l\rangle$のとき，線形独立な $w_1,\dots,w_m$ について，$v_1\sim v_l$ からいくつか $v_{i_1},\dots,v_{i_j}$ をとって $(1\leq i_1<\dots<i_j\leq l)$ $w_1,\dots,w_m,\ v_{i_1},\dots,v_{i_j}$ を Vの基底にできる。

$\because$ $V=\langle w_1,\dots,w_m\rangle$ なら $j=0$ とする。$V\supsetneq\langle w_1,\dots,w_m\rangle$ なら $\exists p$ s.t. $v_p\notin\langle w_1,\dots,w_m\rangle$。このとき $w_1,\dots,w_m,v_p$ は1次独立であることがcheckできる。これを繰返すと仮定より高々l回で止まる //

Thm 上のThmにおいて，基底の数は一意的（これを $\dim V$ とか $\dim_k V$ と書く）

$\because$ $u_1\sim u_a$，$u'_1\sim u'_b$ を共にVの基底とし，$a\leq b$ とする。任意の $0\leq i<a$ について，

$u_1\sim u_i\ u'_{i+1}\sim u'_b$ が基底のとき，必要なら $u'_{i+1}\sim u'_b$ を並びかえて $u_1\sim u_{i+1},\ u'_{i+2}\sim u'_b$ も基底になることが言えればよい。

（言えたとすると $u'_1\sim u'_b$：基底

↓ 必要なら並びかえて

$u_1,u'_2\sim u'_b$：基底 $\to\cdots\to$ $u_1\sim u_a,\ u'_{a+1}\sim u'_b$：基底

$V=\langle u_1,\dots,u_a\rangle$ だったから，$a=b$ でなければならない）

$u_{i+1}=c_1u_1+\dots+c_iu_i+d_{i+1}u'_{i+1}+\dots+d_bu'_b$ と仮定より一意に展開できるが，$u_1\sim u_{i+1}$ は線形独立なので $d_{i+1}u'_{i+1}+\dots+d_bu'_b\neq 0_V$

$d_{i+1}\neq 0_k$ となるように $u'_{i+1}\sim u'_b$ が並びかえられているとすると，

$u_1\sim u_{i+1},\ u'_{i+2}\sim u'_b$ が基底になっていることがcheckできる //

prop k：体，V：基底 $v_1, \cdots, v_n$ をもつ線形空間。任意の線形空間 W について

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) := \{f: V \to W \mid f \text{は} k \text{線形}\} \to W^n \quad \text{は全単射。}$$
$$f \longmapsto (f(v_1), \cdots, f(v_n))$$

Remark このことを"線形写像を与えることと，基底の行き先を決めることは同じ"と表現する

(:) $(w_1', \cdots, w_n') \in W^n$ について，$\varphi: V \to W$ を次のように定めると，
これは k-線形で，propの写像と互いに逆対応になっていることがcheckできる //
($\forall v \in V\ \exists! c_1 \in k, \cdots, \exists! c_n \in k$ s.t. $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ だが，このとき $\varphi(v) := \sum_{i=1}^{n} c_i w_i'$)

Remark $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ に自然に k 線形空間の構造が入り，propは k 同型にもなる。

Cor 対応 $\mathrm{Hom}_k(V, W) \to M_{m,n}(k)$ は全単射（ここで $w_1 \sim w_m$ は W の基底）

$$f \longmapsto (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{s.t.} \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Remark $(a_{ij})_{i,j}$ を f の基底 $v_1 \sim v_n$，$w_1 \sim w_m$ に関する表現行列と言う。

prop $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$

V：基底 $v_1 \sim v_l$，f の表現行列 $B \in M_{n,l}(k)$
W：基底 $w_1 \sim w_n$，g の表現行列 $A \in M_{m,n}(k)$
U：基底 $u_1 \sim u_m$，gf の表現行列 $C \in M_{m,l}(k)$
（これらの基底に関する）

$\Rightarrow C = AB$

(:) それぞれの成分は $f(v_p) = \sum_{i=1}^{n} b_{ip} w_i$，$g(w_q) = \sum_{j=1}^{m} a_{jq} u_j$，$(g \circ f)(v_r) = \sum_{k=1}^{m} c_{kr} u_k$
で定義されている。$g(f(v_p)) = \sum_{i=1}^{n} b_{ip}\, g(w_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ip} a_{ji} u_j = \sum_{j} \left(\sum_{i} a_{ji} b_{ip} \right) u_j$
展開の一意性より $c_{kr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ir}$ つまり $C = AB$ //

"Cor" 行列積に関して結合則が成立する。i.e. $P \in M_{a,b}(k)$, $Q \in M_{b,c}(k)$, $R \in M_{c,d}(k)$ $\Rightarrow$ $(PQ)R = P(QR)$

∵ $k^d \xrightarrow{F_R} k^c \xrightarrow{F_Q} k^b \xrightarrow{F_P} k^a$ で写像の合成について $(F_P \circ F_Q) \circ F_R = F_P \circ (F_Q \circ F_R)$ //

(一般に $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ について，$F_A : k^n \to k^m,\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ は k 線形で，
k^n, k^m の標準基底に関する F_A の表現行列は A である（定義より明らか）)

Def V : 基底 $v_1 \sim v_n$, 基底 $v_1' \sim v_n'$ の変換行列 $P = (p_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(k)$ を $v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$ と定める。

prop P は可逆行列

∵ $v_1' \sim v_n'$, $v_1 \sim v_n$ の変換行列を Q とすると，$PQ = E_n = QP$ が check できる。//

prop $V \xrightarrow{f} W$: k-線形，V : 基底 $v_1 \sim v_n$, 基底 $v_1' \sim v_n'$ ② 変換 $P \in GL_n(k)$

W : 基底 $w_1 \sim w_m$, 基底 $w_1' \sim w_m'$ ② 変換 $Q \in GL_m(k)$

$A \in M_{m,n}(k)$: 基底 $v_1 \sim v_n$, $w_1 \sim w_m$ に関する表現行列
$B \in M_{m,n}(k)$: 〃 $v_1' \sim v_n'$, $w_1' \sim w_m'$ 〃
$\Rightarrow B = Q^{-1}AP$

∵ これまでと同様

Remark ① $A \in M_{m,n}(k)$ について $P \in GL_n(k)$, $Q \in GL_m(k)$ をうまく選んで $Q^{-1}AP$ を"キレイ"に → ランク標準形

② $V = W$ のとき，$A \in M_n(k)$ について，$P \in GL_n(k)$ をうまく選んで $P^{-1}AP$ を"キレイ"に → Jordan 標準形