準同型定理

前回主に扱ったこと ・可換環とそのidealから商環が構成できること
・環準同型写像

普遍性について

Recall 零環$\{0\}$は次の性質をもつ:

『任意の可換環Rについて,ただ1つの環準同型写像$R\to\{0\}$が存在する』

このような"全体における立ち位置"による特徴付けを普遍性と呼ぶ

(正確な議論はしない。気になる人は『表現可能関手の表現(米田の補題)』をキーワードに調べてみること)

prop 可換環$\mathbb{Z}$は次の性質をもつ:

『任意の可換環Rについて、ただ1つの環準同型写像$\mathbb{Z}\to R$が存在する』

(∵) 環準同型$f:\mathbb{Z}\to R$は$f(1)=1_R$なので、$n\geq 1$について

$$f(n)=f(\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{コ}})=\underbrace{f(1)+\cdots+f(1)}_{n\text{コ}}=\underbrace{1_R+\cdots+1_R}_{n\text{コ}}$$

でなければならない。

又, $0=n+(-n)$ in $\mathbb{Z}$ より $f(0)=f(n)+f(-n)$

$f(0)=0_R$だったので $f(-n)=-(\underbrace{f(1)+\cdots+f(1)}_{n\text{コ}})$ でなければならない。

つまりfはあったとするとただ1つである。逆に,上のように定義したfは環準同型になっていることがcheckできる //

Remark 上のことを$\mathbb{Z}$は可換環の圏CRingにおける始対象と言う。

普遍性と同型

prop 可換環 X が次の性質をもつとき，$X \cong \{0\}$（環同型）
「任意の可換環 R について，ただ1つの環準同型写像 $R \to X$ が存在する」

∵ 仮定よりただ1つの環準同型 $\{0\} \xrightarrow{\alpha} X$ が存在する（$R = \{0\}$ とした）
一方 $\{0\}$ も同じ「」をみたすので環準同型 $X \xrightarrow{\beta} \{0\}$ が存在する（もちろんただ1つ）
今，合成 $X \xrightarrow{\beta} \{0\} \xrightarrow{\alpha} X$ は環準同型だが，
もちろん $id_X : X \to X$ も環準同型である。
"ただ1つの" より $\alpha \circ \beta = id_X$ でなければならない。同様に $\beta \circ \alpha = id_{\{0\}}$ も分かる //

prop 可換環 X が次の性質をもつとき，$X \cong \mathbb{Z}$（環同型）
「任意の可換環 R について，ただ1つの環準同型写像 $X \to R$ が存在する」

∵ 同様

以上のように、普遍性によって、同型を除いて、定義することが可能。
これを普遍性による定義という。

Remark「この証明は，環の特殊性をほとんど使っておらず、実際はより高次の一般性に依拠している」（『ベーシック圏論』の序論より引用）

例 任意の集合 R について，1点集合 $\{*\}$ へただ1つの写像 $R \to \{*\}$ が存在する

例 任意の集合 R について，空集合からただ1つの写像 $\phi \to R$ が存在する

これらは集合の圏 Set における普遍性の例であり，$\{*\}$ や ϕ を全単射を除いて決定する。

普遍性の例

prop 集合XとYについて直積集合$X\times Y$は次の性質をもつ

「任意の集合Zと任意の写像 $\alpha : Z\to X$ について
$\beta : Z \to Y$

$\alpha = pr_X \circ f$
$\beta = pr_Y \circ f$
となるただ1つの写像 $f : Z\to X\times Y$ が存在する」

$$
\begin{tikzcd}
 & X\times Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

ここで $pr_X : X\times Y \to X$, $(x,y)\mapsto x$ は射影である。

$pr_Y : X\times Y \to Y$, $(x,y)\mapsto y$

proof $f : Z\to X\times Y$, $z\mapsto (\alpha(z), \beta(z))$ がそのような写像であることがcheckできる //

Def 可換環 $(R, +_R, \times_R, 0_R, 1_R)$ と $(S, +_S, \times_S, 0_S, 1_S)$ について
直積集合 $R\times S$ は可換環の構造 $\left(R\times S, +_{R\times S}, \times_{R\times S}, (0_R, 0_S), (1_R, 1_S)\right)$ を
もつことがcheckできる。これをRとSの直積環といって、単に$R\times S$と書く。

ここで $+_{R\times S} : (R\times S)\times(R\times S) \to (R\times S)$, $((r,s),(r',s')) \mapsto (r +_R r', s +_S s')$,
$\times_{R\times S} : (R\times S)\times(R\times S) \to (R\times S)$, $((r,s),(r',s')) \mapsto (r\,{}_R\, r', s\, s')$

と定義する。

Remark 集合X,Yの直積$X\times Y$の普遍性に現れる"集合"と"写像"を
"可換環"と"環準同型写像"に変えると、直積環$R\times S$の普遍性になっている。

商集合の普遍性

prop 集合Xとその上の同値関係$\sim$による商集合 $X/\sim$ は次の性質をもつ:

任意の集合Zと任意の写像 $\alpha : X \to Z$ について

$$\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X \quad x_1 \sim x_2 \Rightarrow \alpha(x_1) = \alpha(x_2)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\alpha"'] & X/\sim \arrow[d, dashed, "f(=\bar{\alpha})"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

ならば、$\alpha = f \circ p$ となるただ1つの写像 $f : X/\sim \to Z$ が存在する。ここで、$p : X \to X/\sim$ は自然な全射。以下 f を $\bar{\alpha}$ とも書く。

$$x \mapsto C_x := \{ y \in X \mid y \sim x \}$$

∵ $\alpha = f \circ p$ とすると、$\forall x \in X \quad \alpha(x) = f(C_x)$ でなければならないので f は存在するとするとただ1つ。$f(C_x) = \alpha(x)$ で $f : X/\sim \to Z$ が well-defined であることを言えばよい。つまり $C_x = C_{x'} \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(x')$ for $x, x' \in X$ を言う。$C_x = C_{x'} \Leftrightarrow x \sim x'$ なのでOK //

系 (集合での"準同型定理")

集合A, Bと写像 $h : A \to B$ について、A上の同値関係$\sim_h$を

$$a_1 \sim_h a_2 \Leftrightarrow h(a_1) = h(a_2)$$

と定めると、単射 $\bar{h} : A/\sim_h \to B$ は全単射 $\bar{h} : A/\sim_h \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, h$ を誘導する。

∵ $\bar{h} : A/\sim_h \to B$ は構成より単射である。(実際 $\bar{h}(C_a) = \bar{h}(C_b)$ $(a, b \in A)$ は $h(a) = h(b)$ と同値で、定義よりこれは $a \sim_h b$ (つまり $C_a = C_b$) と同値。)

よって $\bar{h} : A/\sim_h \to \mathrm{Im}\, h$ は全単射である //

商環の普遍性

prop 可換環 R とその ideal I による商環 R/I は次の性質をもつ:

任意の可換環 Z と任意の環準同型写像 $\alpha : R \to Z$ について

$\forall r \in R\ \forall r' \in R \quad r \equiv r' \pmod{I} \Rightarrow \alpha(r) = \alpha(r')$

ならば、$\alpha = \overline{\alpha} \circ p$ となるただ1つの

環準同型写像 $\overline{\alpha} : R/I \to Z$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\alpha"'] & R/I \arrow[d, dashed, "\overline{\alpha}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

∵ 写像 $\overline{\alpha} : R/I \to Z$ で $\alpha = \overline{\alpha} \circ p$ となるものがただ1つ存在するので(すぐ前でやった)

$\overline{\alpha}$ が環準同型であることを言えばよいが、$\overline{\alpha}([x]) = \alpha(x) \quad (x \in R)$

から容易に check できる //

Def 可換環 R の部分集合 $S \subseteq R$ が以下の条件をみたすとき、

S は可換環になる。これを R の部分環という。

① $1_R \in S$

② $\forall s \in S\ \forall s' \in S,\ s \pm s' \in S,\ ss' \in S$

Ex. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (部分環)

$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ は ② は成り立つが ① が成り立たないのでこの講義では部分環でない。

Prop $f: R \to R'$：可換環の環準同型写像について，

① $\mathrm{Im}\, f$ は R' の部分環

② $f^{-1}(0_{R'})$ $(= \{x \in R \mid f(x) = 0_{R'}\})$ は R の ideal

(∵) 容易

記法 $f^{-1}(0_{R'})$ を f の核と呼び，$\mathrm{Ker} f$ と書く。

Thm（環準同型定理）$f: R \to R'$：可換環の環準同型写像について，
単射環準同型写像 $\bar{f}: R/\mathrm{Ker} f \to R'$ は環同型 $\bar{f}: R/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$ を誘導する。

(∵) $x, x' \in R$ について，$x \underset{f}{\sim} x' \Leftrightarrow x \equiv x' \bmod \mathrm{Ker} f$

を check すればよい。

($\Rightarrow$) $f(x) = f(x')$ ならば $f(x - x') = 0_{R'}$ よって $x - x' \in \mathrm{Ker} f$

($\Leftarrow$) 逆にたどればよい。//

Cor（中国剰余定理の一部）R：可換環，$I, J \subseteq R$：ideals について，
環準同型 $f: R \to (R/I) \times (R/J)$ は単射環準同型 $\bar{f}: R/_{I \cap J} \to (R/I) \times (R/J)$
$r \mapsto ([r]_I, [r]_J)$
を誘導する。

(∵) $\mathrm{Ker} f = I \cap J$ を示せばよいが，f の定義から明らか。

EX $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$, $J = 3\mathbb{Z}$ とすると，$I \cap J = 6\mathbb{Z}$ で
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ が単射環準同型と言っている
$[r]_{6\mathbb{Z}} \mapsto ([r]_{2\mathbb{Z}}, [r]_{3\mathbb{Z}})$

（この例ではもちろん環同型。次回詳しく扱う）