Jordan標準形

Def k：体，$\alpha \in k$，$n \geq 1$　$J(\alpha;n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(k)$：サイズ$n$ 固有値αのJordan細胞

Thm $\forall A \in M_n(\mathbb{C})\ \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$P^{-1}AP = \bigoplus_{u=1}^{t} J(\beta_u;t_u) := \begin{pmatrix} J(\beta_1;n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\beta_t;n_t) \end{pmatrix}$$

Remark この講義では簡単のために$\mathbb{C}$上で議論するが、この仮定は本質的ではない。

Remark Thmの右辺をAのJordan標準形(JNF)という。
適切な意味での一意性（並びかえを除いて一意）もあるが、ここでは扱わない。

Ex $n=2$　JNFは $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;1) \oplus J(\alpha;1) =: J(\alpha;1)^{\oplus 2}$

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;1) \oplus J(\beta;1)$　$(\alpha \neq \beta)$

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;2)$　のどれか

$n=3$　JNFは $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;1)^{\oplus 3}$　$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ \hline & & \alpha \end{array}\right) = J(\alpha;2) \oplus J(\alpha;1)$

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;3)$　$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;1)^{\oplus 2} \oplus J(\beta;1)$

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;2) \oplus J(\beta;1)$，$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = J(\alpha;1) \oplus J(\beta;1) \oplus J(\gamma;1)$

のどれか（$\alpha \neq \beta$，$\alpha \neq \gamma$，$\beta \neq \gamma$）

Remark JNFの制約は厳しく，nが小さいとき，JNFの存在を認めれば JNFが何かは簡単に分かることが多い。

Ex $A=\begin{pmatrix}4&-2&-3\\-4&6&6\\4&-4&4\end{pmatrix}$ のとき $\varphi_A:=\det(\lambda E_3-A)=(\lambda-2)^3$ なので
(Aの特性多項式)

以下から，AのJNFは $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$ のどれかと分かる。

Prop $B=P^{-1}AP$ なら $\varphi_B=\varphi_A$。ここで $A,B\in M_n(k)$，$P\in GL_n(k)$，k：体

(:) $\varphi_B=\det(\lambda E_3-B)=\det(\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP)=\det P^{-1}\cdot\det(\lambda E_3-A)\cdot\det P=\varphi_A$ //

Ex (続き) $A\vec{x}=2\vec{x}$ の次元を求める

pivot 左と下が 0，non-zero だんだん左

$$\left(A-2E_3\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right)=\left(\begin{matrix}2&-2&-3\\-4&4&6\\4&-4&2\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right)\xrightarrow[3行-1行\cdot2]{2行+1行\cdot2}\left(\begin{matrix}2&-2&-3\\0&0&0\\0&0&8\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right)$$

より解空間の次元は1である。以下から AのJNFは $\begin{pmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}=J(2;3)$ と分かる。

Prop $B=P^{-1}AP$ なら (仮定は上と同じ) $V_{A,\alpha}\simeq V_{B,\alpha}$

ここで $V_{A,\alpha}:=\{\vec{x}\in k^n \mid A\vec{x}=\alpha\vec{x}\}$
$V_{B,\alpha}:=\{\vec{x}\in k^n \mid B\vec{x}=\alpha\vec{x}\}$ $(\alpha\in k)$

(:) $f: V_{A,\alpha}\to V_{B,\alpha},\ \vec{x}\mapsto P^{-1}\vec{x}$，$g: V_{B,\alpha}\to V_{A,\alpha},\ \vec{x}\mapsto P\vec{x}$ は 線形で $g\circ f=\mathrm{id}_{V_{A,\alpha}}$，$f\circ g=\mathrm{id}_{B,\alpha}$ は容易 //

<u>Remark</u> $n\geq 0$ を正整数の和で書くことをnの分割という。

$n=4$だと $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ の5通りある。

これは 4×4 の複素行列の固有値が1種類のJNFが5通りある、と言っている。

<u>Remark</u> nの分割の個数を分割数と言って$p(n)$と書く。

例えば $p(4)=5$ だが、ラマヌジャンは $p(5n+4)\equiv 0 \pmod 5$ を見出した。

この話題は保型形式という数学の主要課題の1つと直接関係している。

(先の合同式は $\displaystyle\sum_{n\geq 0} p(5n+4)q^n = 5\prod_{n\geq 1}\frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q^n)^6}$ という恒等式から従う。
これをRamanujan's "Most Beautiful Identity"と呼ぶ人も少なくない。)

<u>Remark</u> ラマヌジャンはインドの無名な事務員だった。1913年にハーディーに手紙を書いてケンブリッジに迎えられるのだが、その手紙に

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}} - \frac{\sqrt5+1}{2}\right)e^{2\pi/5}$$

という式があった。
(Rogers-Ramanujan 連分数)

これは nの分割で ① 隣り合った数が2以上離れたもの (上の例だと $4=3+1$)
② 使う数が5で割って1 or 4余るもの (上の例だと $4=1+1+1+1$)

の個数はそれぞれ等しい、といった主張から従う(簡単ではない)。またこの主張は

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

とも同値で、ハーディーは
<u>(Rogers-Ramanujan 恒等式)</u>

"It would be difficult to find more beautiful formula than..." と後に書いた。

JNFの(存在)証明には

① 広義固有空間を用いるやり方

② PID上の有限生成加群の構造定理を用いるやり方 (単因子論)

のいずれかがstandardで、今日は①を紹介する。いずれのやり方も$\mathbb{C}[x]$が PIDである、という事実が役割を果たす。①は大まかに以下の2stepからなる：

Ⓐ 広義固有空間への分解（ここに前回の不変部分空間と直和を用いる）

Ⓑ 広義固有空間の解析

要素還元

Def k:体, $A\in M_n(k)$ 訂正

$I:=\{f(x)\in k[x] \mid f(A)=O_n\}$ は $k[x]$ のイデアルで、$k[x]$はPIDだから $I=(\Phi(x))$ となる $\Phi(x)$ で最高次の係数が1のものがただ1つ存在する。

これをAの最小多項式といって、この講義では$\Phi_A(x)$と書く。

記法 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in k[x]$ について

$$f(A):=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE_n\in M_n(k)$$

Remark $I\neq\{0\}$

∵ Aはk^{n^2}の元と思えるから、$E_n, A, \ldots, A^{n^2}$は必ず非自明な線形関係式をもつ（そうでなければ$\dim k^{n^2}>n^2$となってしまう）。なお $\varphi_A(A)=O$ (ケーリー・ハミルトンの定理) が成り立つので実際は$E_n, A, \ldots, A^n$が必ず非自明な線形関係をもつ。

Remark R:整域 $(a)=(b)\iff a\sim b$ (i.e. $\exists c\in R^\times$, $a=bc$) だった。

今、$(k[x])^\times=k^\times$である。

Lemma k：体，$A \in M_n(k)$ s.t. $\Phi_A = \varphi_1 \cdots \varphi_s$（ただし $i \neq j \Rightarrow \varphi_i$ と φ_j は互いに素）

$W_i = \mathrm{Ker}(F_{\varphi_i(A)})$ について $k^n = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$ //

$\varphi_1 \sim \varphi_s$ は多項式

（∵）$\psi_i := \dfrac{\Phi_A}{\varphi_i}$ $(1 \leq i \leq s)$ について，$\psi_1, \cdots, \psi_s$ の最大公約数は 1（ここに $k[x]$ が UFD を使った）

よって $\exists g_1, \cdots, \exists g_s \in k[x]$ s.t. $\sum_{i=1}^{s} g_i \psi_i = 1$ in $k[x]$（ここに $k[x]$ が PID を使った）

$(\psi_1, \cdots, \psi_s) = (d)$

$A_i := g_i(A)\psi_i(A) \in M_n(k)$ とすると，

claim ① $\forall v \in k^n$, $v = \sum_{i=1}^{s} A_i v$

② $\sum_{i=1}^{s} A_i = E_n$, $A_i A_j = \delta_{ij} A_i$

③ $W_i = \mathrm{Im}(F_{A_i})$

（∵）② の前半は明らか。これから ① が従う。$i \neq j$ なら $g_i \psi_i g_j \psi_j$ in $k[x]$ は Φ_A で割り切れるので $A_i A_j = O$。

よって $A_i = A_i E_n = A_i\left(\sum_{j=1}^{s} A_j\right) = A_i^2$。以上で ② の後半が示された。

③ $\supseteq$：$\varphi_i \psi_i = \Phi_A$ より $w = A_i v = g_i(A)\psi_i(A)v$ について，$\varphi_i(A)w = O \cdot w = 0$

$\subseteq$：$w \in W_i$ について，$w = E_n w = \sum_{i=1}^{s} A_i w = A_i w$（∵ $i \neq j$ なら $\varphi_i \psi_j$ は Φ_A で割り切れる）

Lemma の proof に戻る。① より $k^n = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Im} F_{A_i}$ だが，

右辺は $\oplus$ である。実際 $v = \sum_{i=1}^{s} v_i$, $v_i \in \mathrm{Im} F_{A_i}$ について，

$A_i v = A_i \sum_{j=1}^{s} v_j = A_i v_i = v_i$ となって，v_i は v から一意に定まる //

（$v_i = A_i v_i'$ のとき $A_i v_i = A_i^2 v_i' \overset{②}{=} A_i v_i' = v_i$）

W_iはf_A不変なので：

系 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\Phi_A = (x-\alpha_1)^{\mu_1} \cdots (x-\alpha_s)^{\mu_s}$ in $\mathbb{C}[x]$ $(i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j,\ {}^\forall k, \mu_k \geq 1)$

のとき $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ かつ ${}^\forall i$, $(A_i - \alpha_i E_{l_i})^{\mu_i} = O_{l_i}$ (l_iはA_iのサイズ)

以下，$A \in M_n(k)$ が $\overset{\exists}{}A^m = O_n$ となるとき，AのJNFとして $\bigoplus_j J(0; m_j)$ の形がとれることを示す。そのためには $f: V \to V$, $f^m = 0$ を考えると見通しがよい。

Lemma A $f: V \to V$, V: f.g., $f^m = 0$, $f^{m-1} \neq 0$ $(\exists m \geq 1)$ のとき，

$W_i = \ker f^i$ $(i = 0, \ldots, m)$ について，$V = W_m \supsetneq W_{m-1} \supsetneq \cdots \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}$

∵ $\exists 1 \leq i \leq m$ で $W_i = W_{i-1}$ とすると，${}^\forall v \in V$ $f^m(v) = f^i(f^{m-i}(v)) = 0$ より

$f^{m-i}(v) \in W_i = W_{i-1}$。よって $f^{i-1}(f^{m-i}(v)) = 0$ で $f^{m-1} \neq 0$ に矛盾 //

Lemma B $g: W_1 \to W_2$：単射な線形，$w_1, \ldots, w_l \in W_1$ が線形独立

$\Longrightarrow g(w_1), \cdots, g(w_l) \in W_2$ も線形独立

∵ 容易。$\sum_{i=1}^{l} c_i g(w_i) = 0 \Rightarrow g\left(\sum_i c_i w_i\right) = 0$

gは単射なので $\sum_i c_i w_i = 0$。$w_1 \sim w_l$は線形独立なので ${}^\forall i$, $c_i = 0$ //

Lemma C $2 \leq i \leq m$ について，$W_i = U_i \oplus W_{i-1}$ と U_iをとると，

$f|_{U_i}$ は単射で，$f(U_i) \cap W_{i-2} = \{0\}$ (Lemma A の続き)

∵ $u \in U_i$ かつ $f(u) \in W_{i-2}$ なら $f^{i-1}(u) = 0$ ∴ $u \in W_{i-1} \cap U_i = \{0\}$

Lemma A の設定で $m=3$ の場合を扱ってみる: $V = W_3 \supsetneq W_2 \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}$

$W_3 = U_3 \oplus W_2$ となる U_3 をとって基底を $v_1, \dots, v_{r_1}$ とする。

$f(U_3) \cap W_1 = \{0\}$ (by Lemma C) で、$f(v_1), \dots, f(v_{r_1}) \in W_2$ は線形独立だったから (by Lemma B), $W_2 = U_2 \oplus W_1$ となるように $f(v_1), \dots, f(v_{r_1})$ を延長して U_2 の基底 $f(v_1), \dots, f(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}$ をえる。

$f(U_2) \cap W_0 = \{0\}$ (by Lemma C) で、$f^2(v_1), \dots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \dots, f(v_{r_2}) \in W_1$ は線形独立だったから、$W_1 = U_1 \oplus W_0 \ (= U_1)$ となるように延長して、U_1 の基底 $\{f^2(v_1), \dots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \dots, f(v_{r_2}), v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}\}$ をえる。さて、

- $1 \leq i \leq r_1$ について $P_i := \langle f^2(v_i), f(v_i), v_i \rangle$ は f 不変で表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 < i \leq r_2$ について $Q_i := \langle f(v_i), v_i \rangle$ は f 不変で表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $r_2 < i \leq r_3$ について $R_i := \langle v_i \rangle$ は f 不変で表現行列は (0)

つまり、このように取った V の基底について f の表現行列は

$$J(0;3)^{\oplus r_1} \oplus J(0;2)^{\oplus (r_2 - r_1)} \oplus J(0;1)^{\oplus (r_3 - r_2)}$$ である。

一般の場合も同様だが、記号がはん雑になるため講義における説明としては、ここまでにしておく。

参考:

	U_3	U_2	U_1
W_3	$v_1, \dots, v_{r_1}$		
W_2	$f(v_1), \dots, f(v_{r_1})$	$v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}$	
W_1	$f^2(v_1), \dots, f^2(v_{r_1})$	$f(v_{r_1+1}), \dots, f(v_{r_2})$	$v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}$