

前回主に扱ったこと

- ・基底と線形写像の行列表示
- ・基底変換と行列表示の関係

Lemma R : 体, V : 有限生成 (i.e., 有限次元)

① W : 部分空間 も有限生成 (i.e., 有限次元)

② $\dim W \leq \dim V$ 且、 $\begin{cases} \dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V \\ \dim V/W = \dim V - \dim W \end{cases}$

Remark R 加群の "次元" について, この講義では扱わないが,

$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 8\mathbb{Z} \supset \dots$ は "1次元の" $\mathbb{Z}$ 加群の狭義減小列である

① ① $V = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ とする W が有限生成でないとする, $\exists w_1 \neq 0$ in W

且 $\langle w_1 \rangle \subsetneq W$ より $\exists w_2 \in W \setminus \langle w_1 \rangle, \dots$ とくり返すと, これは無限に続けられ

$\forall r \geq 1$ について $w_1 \sim w_r$ は線形独立であることが check できる

つまり $\forall r \geq 1, \dim V \geq r$ となってしまう。

② W の基底を V の基底に延長できることが示明 (上の①の最後でも用いた) //

Cor R : 体, $V \xrightarrow{f} W$: R -線形, V, W : 有限生成 ($\Leftrightarrow$ 有限次元)

① f が単射 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$ 且 $\dim V = \dim W$ なら f は同型

② f が全射 $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$ 且 $\dim V = \dim W$ なら f は同型

③ $V/\ker f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$ より $\dim V = \dim \ker f + \dim \text{Im } f$

④ f が単射 $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$ は環と同様これから分かる。

⑤ f が全射 $\Leftrightarrow \text{Im } f = W$ 。これから分かる //

Thm (ランク標準形)

$K: \text{体}, \forall A \in M_{m,n}(K), \exists r \geq 0, P \in GL_m(K), \exists Q \in GL_n(K) \text{ s.t. } PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

(1) A に対応する $K^m \xrightarrow{F_A} K^m$ において, $K^m / \ker F_A \xrightarrow{\sim} \text{Im } F_A \subseteq K^m$
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ $\uparrow$ $\vec{x} \mapsto F_A(\vec{x})$
 自然 $K^n \xrightarrow{F_A}$

$\dim \text{Im } F_A = r$ とし, $\text{Im } F_A$ の基底 $w_1, \dots, w_r$ をとり, K^m の基底に延長する。

$\ker F_A$ の基底 $v_1', \dots, v_{n-r}'$ をとり, さらに $v_1, \dots, v_r$ を $F_A(v_i) = w_i$ ととる。
 $\text{"}F_A(v_i)\text{"}$

claim $v_1, \dots, v_r, v_1', \dots, v_{n-r}'$ は K^n の基底である。

(2) 線形独立であることを示せばよい。 $\sum_{i=1}^r c_i v_i + \sum_{j=1}^{n-r} d_j v_j' = 0$ とする。

F_A すると, $\sum_{i=1}^r c_i w_i = 0$ (in K^m)。よって $\forall i, c_i = 0_K$

すると $\sum_{j=1}^{n-r} d_j v_j' = 0$ だが, $v_1', \dots, v_{n-r}'$ は基底なので $d_j = 0$ //

K^n の基底 $v_1, \dots, v_r, v_1', \dots, v_{n-r}'$ に関する F_A の行列表示は $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ になる。
 K^m の基底 $w_1, \dots, w_r$ + 延長分

r の一意性について $\exists P', \exists Q'$ により $P'AQ' = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすると

$\dim \ker F_A = n - r'$ は明らか。

Cor $\text{rank}(A) = \dim \text{Im } F_A$

応用

prop $\mathcal{K} : \text{体}, A \in M_n(\mathcal{K})$ について

$$\textcircled{1} \exists B \in M_n(\mathcal{K}), AB = E_n \Rightarrow BA = E_n$$

$$\textcircled{2} \exists B \in M_n(\mathcal{K}) BA = E_n \Rightarrow AB = E_n$$

(一方, 片側逆の存在から
逆元の存在が分かる)

$\textcircled{1}$ 対応する $\mathcal{K}^n \xrightarrow{F_A} \mathcal{K}^n$ を考える

$$\textcircled{1} \mathcal{K}^m \xrightarrow{F_B} \mathcal{K}^n \xrightarrow{F_A} \mathcal{K}^n \quad \text{なら } F_B \text{ は単射} \quad \text{から容易に分かる}$$

$$F_{AB} = \text{id}_{\mathcal{K}^n}$$

F_A は全射

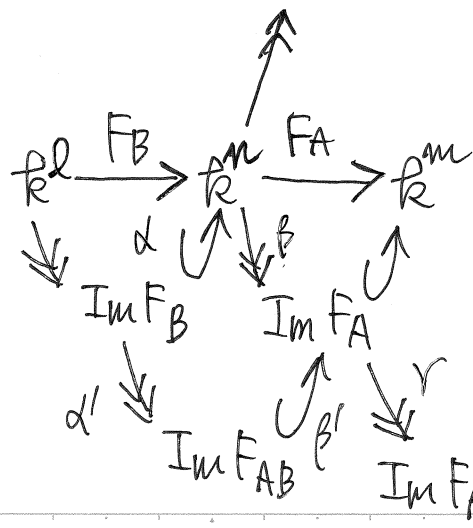
よって F_A は同型。よって $F_A^{-1} = F_B$ であり $BA = E_n$

$\textcircled{2}$ 同様

prop $\mathcal{K} : \text{体} \quad A \in M_{m,n}(\mathcal{K}) \quad \text{について} \quad \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min \left\{ \begin{matrix} \text{rank}(A) \\ \text{rank}(B) \end{matrix} \right\}$
 $B \in M_{n,l}(\mathcal{K})$

$$\textcircled{1} \text{ 最右辺は明らか } \left(\begin{array}{l} \text{Im}(F_{AB}) = F_A(F_B(\mathcal{K}^l)) \subseteq F_A(\mathcal{K}^n) = \text{Im } F_A \\ \parallel \\ F_A(\text{Im } F_B) \leftarrow \text{Im } F_B \quad \text{から従う} \end{array} \right)$$

$\mathcal{K}^n / \text{Im } F_B \cdots$ 最左辺は $\text{rank}(A) - \text{rank}(AB) \leq n - \text{rank}(B)$ を示すため
 $\exists$ を確認する



そのためには $\gamma \circ \beta \circ \alpha = 0$ を見ればよいから
 図式の可換性より明らか。

$$(\beta' \alpha' = \beta \alpha)$$

$\gamma \circ \beta$ は全射なので $\cdots \rightarrow$ は全射

(上でもやった)

Def V : k 線形空間 $\supseteq V_1, \dots, V_r$: 部分空間

$$\sum_{i=1}^r V_i := \left\{ \sum_{i=1}^r v_i \mid v_i \in V_i \ (1 \leq i \leq r) \right\} \subseteq V \text{ は部分空間だが,}$$

$$\text{これが直和} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall w \in \sum_{i=1}^r V_i, \exists! v_1 \in V_1, \dots, \exists! v_r \in V_r \text{ s.t. } \sum_{i=1}^r v_i = w$$

Remark $\bigcap_{i=1}^r V_i \subseteq V$ は部分空間だが, $\bigcup_{i=1}^r V_i$ は部分空間とは限らない。

prop $\sum_{i=1}^r V_i$ は直和 $\iff 1 \leq i \neq j \leq r, \sum_{1 \leq i \neq j \leq r} V_i \cap V_j = \{0\}$

$$\textcircled{1} (\Rightarrow) \exists j, \exists w \in \sum_{i \neq j} V_i \cap V_j \text{ とする } w = \sum_{i \neq j} v_i \quad \exists v_i \in V_i$$

$$\text{f"aka", } \sum_{i \neq j} v_i - w = 0 = \sum_{i \neq j} 0_i \cdot v_i + 0_j \cdot w \text{ 2"矛盾が/生じた}$$

$$(\Leftarrow) w = \sum_{i=1}^r v_i = \sum_{i=1}^r v'_i \quad (v_i, v'_i \in V_i) \text{ 1とせ,}$$

$$\forall j, v_j - v'_j = \sum_{i \neq j} v'_i - v_i \in \{0\} \text{ 1" } v_j = v'_j //$$

$\textcircled{1} 0_j \neq 1_{\mathbb{R}}$
in $\mathbb{R}$ 1 体

"Cor" さらに $\forall i, V_i$: 有限生成を仮定すると次と等価値

$$v_1^{(i)}, \dots, v_{N_i}^{(i)} : V_i \text{ の基底 } (1 \leq i \leq r) \Rightarrow v_1^{(1)}, \dots, v_{N_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(r)}, \dots, v_{N_r}^{(r)} \text{ は } \sum_{i=1}^r V_i \text{ の基底}$$

$$\textcircled{1} (\Rightarrow) v_1^{(1)}, \dots, v_{N_r}^{(r)} \text{ が } \sum_{i=1}^r V_i \text{ を生成するとは異なる。 } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{N_i} c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$$

$$\text{とする } \forall i, \sum_j c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0 \text{ 1" } \forall i, \forall j, c_j^{(i)} = 0$$

$$(\Leftarrow) \exists j, \sum_{i \neq j} V_i \cap V_j \ni w \neq 0 \text{ 1" } w = \sum_{l=1}^{N_j} c_l^{(j)} v_l^{(j)} = \sum_{i \neq j} \sum_{l=1}^{N_i} c_l^{(i)} v_l^{(i)}$$

$$\text{と書ける。 } \forall l, c_l^{(j)} = 0 \text{ 2" 1" 1" } \forall i \neq j, \forall l, c_l^{(i)} = 0 \text{ 2" 1" 1" } \text{一方 (中辺) - (右辺) = 0 1" 矛盾}$$

Remark $V_1 + V_2$ が直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

prop $V_1, V_2 \subseteq V$: 有限生成

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$$

① $V_1 \cap V_2 \rightsquigarrow V_1$: 延長して $v_1 \sim v_s$

基底 $u_1, \dots, u_r \rightsquigarrow V_2$: 延長して $w_1 \sim w_t$ をそれぞれ追加して基底がえられるとす。

claim $u_1 \sim u_r, v_1 \sim v_s, w_1 \sim w_t$ は $V_1 + V_2$ の基底

② 生成することば明か。 $\underbrace{\sum_{i=1}^r c_i u_i + \sum_{j=1}^s d_j v_j}_{\substack{\uparrow \\ V_1}} + \underbrace{\sum_{l=1}^t e_l w_l}_{\substack{\uparrow \\ V_2}} = 0$

とすると, $\sum_{l=1}^t e_l w_l \in V_1 \cap V_2$ より, $\forall l, e_l = 0$. かつ $\forall i, c_i = 0$ かつ $\forall j, d_j = 0$ //

Remark $V_1 \hookrightarrow (V_1 + V_2) \twoheadrightarrow \frac{V_1 + V_2}{V_2}$ の合成を φ とすると,

φ は全射で, $\ker \varphi = V_1 \cap V_2$. かつ $\frac{V_1}{V_1 \cap V_2} \xrightarrow{\sim} \frac{V_1 + V_2}{V_2}$ (準同型定理)

これから $\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1 + V_2) - \dim V_2$ と導出してもよい

$$\dim \left(\frac{V_1}{V_1 \cap V_2} \right)$$

$$\dim \left(\frac{V_1 + V_2}{V_2} \right)$$

記法 $\sum_{i=1}^r V_i$ が直和のとき, $\bigoplus_{i=1}^r V_i$ と書く

Def V : 右線形空間

$f: V \rightarrow V$: 自己右線形

部分空間 $W \subseteq V$ が f 不変 $\stackrel{\text{def}}{=} f(W) \subseteq W$

Remark V : 有限生成 q とし, W の基底を延長して $v_1 \sim v_s$ を追加して V の基底がえられたとすると, この基底に関する f の表現行列は

$$\left(\begin{array}{c|c} f|_W \text{ の表現行列} & * \\ \hline 0 & \bar{f} \text{ の表現行列} \end{array} \right) \quad \text{という形をしている。}$$

$$\text{ここで } V \xrightarrow{f} V \twoheadrightarrow V/W \quad \bar{f}: V/W \rightarrow V/W \text{ は } \bar{f}([u]) = [f(u)]$$

$\searrow$ $V/W \xrightarrow{\bar{f}}$

と定まる自己右線形 $\bar{f}$. $[v_1], \dots, [v_s]$: V/W の基底を選んでいふ。

Remark 同様に $W_1, \dots, W_r \subseteq V$: f 不変 s.t. $\bigoplus_{i=1}^r W_i = V$ とし

f のある表現行列は

$$\left(\begin{array}{c|c} f|_{W_1} \text{ の表現行列} & \\ \hline & \ddots \\ \hline & f|_{W_r} \text{ の表現行列} \end{array} \right)$$

となっていふ。

特に $W_i = \{w \in V \mid f(w) = \alpha_i w\}$ とするとき,

f の表現行列は

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 \underbrace{\quad}_{\dim W_1} & \\ \hline & \ddots \\ \hline & \alpha_r \underbrace{\quad}_{\dim W_r} \end{array} \right) \quad \text{となふ。}$$

Prop V : 有限生成線形空間

$f: V \rightarrow V$: 自己線形, 対角化可能 (i.e., $\exists V$ の基底 s.t. この基底に関する f の表現行列は対角行列)

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \exists \alpha_r \in \mathbb{C} \text{ s.t. } V = \bigoplus_{i=1}^r W_{\alpha_i}$$

$$(i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \text{ s.t. } W_{\alpha_i} := \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\})$$

① $\Leftarrow$: 前 Remark した

$$\Rightarrow f(v_j^{(i)}) = \alpha_i v_j^{(i)} \quad i=1, \dots, r, \quad j=1, \dots, N_i \text{ とする } V \text{ の基底を}$$

とすると, $v_1^{(1)}, \dots, v_{N_1}^{(1)} \in W_{\alpha_1}$ は 1 次独立である。

$$\text{以下 Lemma より } \dim \bigoplus_{i=1}^r W_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^r \dim W_{\alpha_i} \geq \sum_{i=1}^r N_i = \dim V$$

$$\text{したがって } \bigoplus_{i=1}^r W_{\alpha_i} = V //$$

Lemma $\sum_{i=1}^r W_{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^r W_{\alpha_i}$

② $0 \neq v := \sum_{i=1}^r w_i$ ($w_i \in W_{\alpha_i}$) のとき, $\forall i, w_i = 0$ を言う。

$$f(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i$$

$$f^2(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 w_i$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ f(v) \\ \vdots \\ f^{r-1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \dots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}$$

$$\det_m = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0 \text{ により } \forall i, w_i = 0 //$$

Ex $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は対角化不可能な自己線形
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$