Jordan標準形

Def k：体, $\alpha\in k$, $n\geq 1$ $\quad J(\alpha;n)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \alpha\end{pmatrix}\in M_n(k)$：サイズ$n$ 固有値αのJordan細胞

Thm ${}^\forall A\in M_n(\mathbb{C})\ {}^\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$P^{-1}AP=\bigoplus_{u=1}^{t}J(\beta_u;t_u):=\begin{pmatrix}J(\beta_1;n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\beta_t;n_t)\end{pmatrix}$$

Remark この講義では簡単のために$\mathbb{C}$上で議論するが、この仮定は本質的ではない。

Remark Thmの右辺をAのJordan標準形(JNF)という。
適切な意味での一意性(並びかえを除いて一意)もあるが、ここでは扱わない。

Ex $n=2$ JNFは $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;1)\oplus J(\alpha;1)=:J(\alpha;1)^{\oplus 2}$

$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;1)\oplus J(\beta;1)\quad(\alpha\neq\beta)$

$\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;2)$ のどれか

$n=3$ JNFは $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;1)^{\oplus 3}$ $\left(\begin{array}{cc|c}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ \hline & & \alpha\end{array}\right)=J(\alpha;2)\oplus J(\alpha;1)$

$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & 1\\ & & \alpha\end{pmatrix}=J(\alpha;3)$ $\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;1)^{\oplus 2}\oplus J(\beta;1)$

$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta\end{pmatrix}=J(\alpha;2)\oplus J(\beta;1)$, $\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}=J(\alpha;1)\oplus J(\beta;1)\oplus J(\gamma;1)$

のどれか($\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$)

Remark JNFの制約は厳しく，nが小さいとき，JNFの存在を認めれば
JNFが何かは簡単に分かることが多い。

Ex $A=\begin{pmatrix}4&-2&-3\\-4&6&6\\4&-4&-4\end{pmatrix}$ のとき $\varphi_A:=\det(\lambda E_3-A)=(\lambda-2)^3$ なので
(Aの特性多項式)

以上から，AのJNFは $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$ のどれかと分かる。

Prop $B=P^{-1}AP$ なら $\varphi_B=\varphi_A$。ここで $A,B\in M_n(k)$, $P\in GL_n(k)$, k:体

∵ $\varphi_B=\det(\lambda E_3-B)=\det(\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP)=\det P^{-1}\cdot\det(\lambda E_3-A)\cdot\det P=\varphi_A$ //

Ex (続き) $A\vec{x}=2\vec{x}$ の次元を求める

$$\left(A-2E_3\,\middle|\,\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&-3&0\\-4&4&6&0\\4&-4&-6&0\end{array}\right)\xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\cdot 2]{2\text{行}+1\text{行}\cdot 2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&-3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より解空間の次元は2である。以上から AのJNFは $\begin{pmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=J(2;2)\oplus J(2;1)$ と分かる。

Prop $B=P^{-1}AP$ なら (仮定は上と同じ) $V_{A,\alpha}\simeq V_{B,\alpha}$

ここで $V_{A,\alpha}:=\{\vec{x}\in k^n \mid A\vec{x}=\alpha\vec{x}\}$
$V_{B,\alpha}:=\{\vec{x}\in k^n \mid B\vec{x}=\alpha\vec{x}\}$ $(\alpha\in k)$

∵ $f: V_{A,\alpha}\to V_{B,\alpha}$, $\vec{x}\mapsto P^{-1}\vec{x}$, $g: V_{B,\alpha}\to V_{A,\alpha}$, $\vec{x}\mapsto P\vec{x}$ は k線形で $g\circ f=\mathrm{id}_{V_{A,\alpha}}$, $f\circ g=\mathrm{id}_{V_{B,\alpha}}$ は容易 //

Remark $n \geq 0$ を正整数の和で書くことを n の分割という。

$n=4$ だと $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ の5通りある。

これは 4×4 の複素行列の固有値が1種類のJNFが5通りある、と言っている。

Remark n の分割の個数を分割数と言って $p(n)$ と書く。

例えば $p(4)=5$ だが、ラマヌジャンは $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ を見出した。

この話題は保型形式という数学の主要課題の1つと直接関係している。

(先の合同式は $\displaystyle\sum_{n\geq0} p(5n+4) q^n = 5\prod_{n\geq1}\frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q^n)^6}$ という恒等式から従う。

これを Ramanujan's "Most Beautiful Identity" と呼ぶ人も少なくない。)

Remark ラマヌジャンはインドの無名な事務員だった。1913年にハーディーに手紙を書いてケンブリッジに迎えられるのだが、その手紙に

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}} - \frac{\sqrt5+1}{2}\right)e^{2\pi/5}$$

という式があった。(Rogers-Ramanujan 連分数)

これは n の分割で ① 隣り合った数が2以上離れたもの (上の例だと $4=3+1$)

② 使う数が5で割って1 or 4余るもの (上の例だと $4=1+1+1+1$)

の個数はそれぞれ等しい、といった主張から従う(簡単ではない)。またこの主張は

$$\sum_{n\geq0}\frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq0}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

とも同値で、ハーディーは

(Rogers-Ramanujan 恒等式)

"It would be difficult to find more beautiful formula than..." と後に書いた。

JNFの(存在)証明には

① 広義固有空間を用いるやり方

② PID上の有限生成加群の構造定理を用いるやり方

のいずれかがstandardで、今日は①を紹介する。いずれのやり方も$\mathbb{C}[x]$が PIDである、という事実が役割を果たす。①はおおまかに以下の2stepからなる：

Ⓐ 広義固有空間への分解（ここに前回の不変部分空間と直和を用いる）

Ⓑ 広義固有空間の解析

Def k：体，$A \in M_n(k)$

$I := \{ f(x) \in k[x] \mid f(A) = O_n \}$ は $k[x]$ のイデアルで、$k[x]$はPIDだから

$I = (\Phi(x))$ となる $\Phi(x)$ で最高次の係数が1のものがただ1つ存在する。

これをAの最小多項式といって、この講義では$\Phi_A(x)$と書く。

記法 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in k[x]$ について

$$f(A) := a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E_n \in M_n(k)$$

Remark $I \neq \{0\}$

(∵) Aはk^{n^2}の元と思えるから，$E_n, A, \cdots, A^{n^2}$は必ず非自明な線形関係式をもつ（そうでなければ$\dim k^{n^2} > n^2$となってしまう）。なお$\varphi_A(A) = O$ (ケーリー・ハミルトンの定理) が成り立つので実際は$E_n, A, \cdots, A^n$が必ず非自明な線形関係をもつ。

Remark R：整域 $(a) = (b) \iff a \sim b$ (i.e. $\exists c \in R^\times,\ a = bc$) だった。

今，$(k[x])^\times = k^\times$ である。

Lemma k：体，$A \in M_n(k)$ s.t. $\Phi_A = \varphi_1 \cdots \varphi_s$（ただし $i \neq j \Rightarrow \varphi_i$ と φ_j は互いに素）

$W_i = \mathrm{Ker}(F_{\varphi_i(A)})$ について $k^n = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$

(∵) $\psi_i := \dfrac{\Phi_A}{\varphi_i}$ $(1 \leq i \leq s)$ について，$\psi_1, \cdots, \psi_s$ の最大公約数は 1（ここに $k[x]$ が UFD を使った）

よって $\exists g_1, \cdots, \exists g_s \in k[x]$ s.t. $\sum_{i=1}^{s} g_i \psi_i = 1$ in $k[x]$（ここに $k[x]$ が PID を使った）

$A_i := g_i(A)\psi_i(A) \in M_n(k)$ とすると，

claim ① $\forall v \in k^n$，$v = \sum_{i=1}^{s} A_i v$

② $\sum_{i=1}^{s} A_i = E_n$，$A_i A_j = \delta_{ij} A_i$

③ $W_i = \mathrm{Im}(F_{A_i})$

(∵) ② の前半は明らか。これから ① が従う。$i \neq j$ なら $g_i \psi_i g_j \psi_j$ in $k[x]$ は Φ_A で割り切れるので $A_i A_j = O$。

よって $A_i = A_i E_n = A_i \left(\sum_{j=1}^{s} A_j\right) = A_i^2$。以上で ② の後半が示された。

③ $\supseteq$： $\varphi_i \psi_i = \Phi_A$ より $w = A_i v = g_i(A)\psi_i(A) v$ について，$\varphi_i(A) w = O \cdot w = 0$

$\subseteq$： $w \in W_i$ について，$w = E_n w = \sum_{i=1}^{s} A_i w = A_i w$（(∵) $i \neq j$ なら $\varphi_i \psi_j$ は Φ_A で割り切れる）

Lemma の proof に戻る。① より $k^n = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Im} F_{A_i}$ だが，

右辺は $\oplus$ である。実際 $v = \sum_{i=1}^{s} v_i$，$v_i \in \mathrm{Im} F_{A_i}$ について，

$A_i v = A_i \sum_{j=1}^{s} v_j = A_i v_i = v_i$ となって，v_i は v から一意に定まる //

（$v_i = A_i v_i'$ のとき $A_i v_i = A_i^2 v_i' \overset{②}{=} A_i v_i' = v_i$）

W_iはf_A不変なので：

系　$A \in M_n(\mathbb{C})$, $\Phi_A = (x-\alpha_1)^{\mu_1} \cdots (x-\alpha_s)^{\mu_s}$ $(i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j,\ {}^\forall k, \mu_k \geq 1)$ in $\mathbb{C}[x]$

のとき ${}^\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ かつ ${}^\forall i$, $(A_i - \alpha_i E_{l_i})^{\mu_i} = O_{l_i}$ (l_iはA_iのサイズ)

以下, $A \in M_n(k)$が ${}^\exists m$ $A^m = O_n$ となるとき, AのJNFとして $\bigoplus_j J(0; m_j)$ の形がとれることを示す。そのためには $f: V \to V$, $f^m = 0$ を考えると見通しがよい。

Lemma A　$f: V \to V$, V: f.g., $f^m = 0$, $f^{m-1} \neq 0$ $(m \geq 1)$ のとき,

$W_i = \ker f^i$ $(i = 0, \cdots, m)$ について, $V = W_m \supsetneq W_{m-1} \supsetneq \cdots \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}$

∵ ${}^\exists 1 \leq i \leq m$ で $W_i = W_{i-1}$ とすると, ${}^\forall v \in V$ $f^m(v) = f^i(f^{m-i}(v)) = 0$ より $f^{m-i}(v) \in W_i = W_{i-1}$。よって $f^{i-1}(f^{m-i}(v)) = 0$ で $f^{m-1} \neq 0$ に矛盾 //

Lemma B　$g: W_1 \to W_2$：単射な線形, $w_1, \cdots, w_l \in W_1$ が線形独立 $\Rightarrow g(w_1), \cdots g(w_l) \in W_2$ も線形独立

∵ 容易。$\sum_{i=1}^{l} c_i g(w_i) = 0 \Rightarrow g\left(\sum_i c_i w_i\right) = 0$

gは単射なので $\sum_i c_i w_i = 0$。$w_1 \sim w_l$は線形独立なので ${}^\forall i$, $c_i = 0$ //

Lemma C　$2 \leq i \leq m$ について, $W_i = U_i \oplus W_{i-1}$ と U_i をとると,

$f|_{U_i}$ は単射で, $f(U_i) \cap W_{i-2} = \{0\}$ (Lemma Aの続き)

∵ $u \in U_i$ かつ $f(u) \in W_{i-2}$ なら $f^{i-1}(u) = 0$ ∴ $u \in W_{i-1} \cap U_i = \{0\}$

Lemma A の設定で $m=3$ の場合を扱ってみる： $V = W_3 \supsetneq W_2 \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}$

$W_3 = U_3 \oplus W_2$ となる U_3 をとって基底を $v_1, \dots, v_{r_1}$ とする。

$f(U_3) \cap W_1 = \{0\}$ (by Lemma C) で、$f(v_1), \dots, f(v_{r_1}) \in W_2$ は線形独立だったから (by Lemma B)，$W_2 = U_2 \oplus W_1$ となるように $f(v_1), \dots, f(v_{r_1})$ を延長して U_2 の基底 $f(v_1), \dots, f(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}$ をえる。

$f(U_2) \cap W_0 = \{0\}$ (by Lemma C) で、$f^2(v_1), \dots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \dots, f(v_{r_2}) \in W_1$ は線形独立だったから、$W_1 = U_1 \oplus W_0 \,(= U_1)$ となるように延長して、U_1 の基底 $\{f^2(v_1), \dots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \dots, f(v_{r_2}), v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}\}$ をえる。さて、

- $1 \leq i \leq r_1$ について $P_i := \langle f^2(v_i), f(v_i), v_i \rangle$ は f 不変で表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 < i \leq r_2$ について $Q_i := \langle f(v_i), v_i \rangle$ は f 不変で表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $r_2 < i \leq r_3$ について $R_i := \langle v_i \rangle$ は f 不変で表現行列は (0)

つまり、このように取った V の基底について f の表現行列は

$$J(0;3)^{\oplus r_1} \oplus J(0;2)^{\oplus (r_2 - r_1)} \oplus J(0;1)^{\oplus (r_3 - r_2)}$$ である。

一般の場合も同様だが、記号がはん雑になるため講義における説明としては、ここまでにしておく。

参考：

	U_3	U_2	U_1
W_3	$v_1, \dots, v_{r_1}$		
W_2	$f(v_1), \dots, f(v_{r_1})$	$v_{r_1+1}, \dots, v_{r_2}$	
W_1	$f^2(v_1), \dots, f^2(v_{r_1})$	$f(v_{r_1+1}), \dots, f(v_{r_2})$	$v_{r_2+1}, \dots, v_{r_3}$