- 環上の加群の定義と，準同型定理などのお決まりの議論を確認する．
- 線形代数の知識を復習する（特に表現行列について）．

注意：体 k 上の線形空間とは，以下を満たす 4 つ組 $(V,+,\cdot,0_V)$ のことであった．ここで $\cdot$ は写像 $k\times V\to V$ であった．

(1) $(V,+,0_V)$ は可換群．
(2) $\forall\lambda\in k,\forall\mu\in k,\forall v\in V,(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$.
(3) $\forall\lambda\in k,\forall\mu\in k,\forall v\in V,(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$.
(4) $\forall\lambda\in k,\forall v\in V,\forall w\in V,\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$.
(5) $\forall v\in V,1_k v=v$.

定義：上で体 k を環 R に変えたものが，左 R 加群の定義である．

注意：0_V は一意的であり，$\forall v\in V,0_k v=0_V$．また $v\in V$ の加法逆元は一意的で $-v$ と書き，$(-1_k)v=-v$ や $-(-v)=v$ が成立する（環のときと同様）．

注意：体 k について，k 線形空間 V,W の間の写像 $f:V\to W$ が k 線形写像とは

(1) $\forall v\in V,\forall v'\in V,f(v+v')=f(v)+f(v')$.
(2) $\forall\lambda\in k,\forall v\in V,f(\lambda v)=\lambda f(v)$.

定義：上で体 k を環 R に変えたものが，左 R 加群準同型の定義である（左 R 線形とも言う）．

注意：$f(0_V)=0_W$.

注意：$\mathrm{id}_V:V\to V$ は線形写像で，線形写像の合成も線形写像．

注意：(1),(2)$\Leftrightarrow\forall\lambda\in k,\forall\mu\in k,\forall v\in V,\forall v'\in V,f(\lambda v+\mu v')=\lambda f(v)+\mu f(v')$.

注意：以下，この講義では環 R は可換環を扱い，左という形容詞をつけない．

例：$\cdot:\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z},(a,b)\mapsto ab$ とすると，$(2\mathbb{Z},+,\cdot,0)$ は $\mathbb{Z}$ 加群で $2\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z},x\mapsto 2x$ は $\mathbb{Z}$ 線形．

例：体 k と自己 k 線形 $f:V\to V$ について，V は $k[x]$ 加群になる．ここで

$$\cdot:k[x]\times V\to V,\quad (a_0x^n+\cdot+a_n,v)\mapsto a_0f^n(v)+\cdots+a_nv.$$

定義：R 加群 V の部分集合 $W\subseteq V$ が，V の R 部分加群とは

(1) $W\neq\emptyset$.
(2) $\forall v\in W,\forall v'\in W,v+v'\in W$.
(3) $\forall a\in R,\forall v\in W,av\in W$.

注意：(1),(2),(3) と (1'),(2),(3) は同値．ここで「(1')：$0_V\in W$」．

注意：(2) と (3) は以下と同値：$\forall a\in R,\forall a'\in R,\forall v\in W,\forall v'\in W,av+bv'\in W$.

例：可換環 $(R,+,\cdot,0,1)$ について，$(R,+,\cdot,0)$ は R 加群．R の R 部分加群 I と，R のイデアル I は同じ概念である．

定義：R 加群 V と R 部分加群 $W \subseteq V$ について，

$$v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in W$$

は，V 上の同値関係になるが，この商集合 $V/W = \{[u] \mid u \in V\}$ は，以下で R 加群になる

$$[u] + [u'] := [u + u'], \quad a[u] := [au], \quad 0_{V/W} := [0_V], \quad \text{where } a \in R, u, u' \in V.$$

記法：$[u] = [u]_W = C_u = \{v \in V \mid u \sim v\}$ である．$v \sim v'$ を $v \equiv v' \pmod W$ とも書く．

定義：R 準同型 $f : V \to W$ が R 同型とは：$\exists g : W \to V : R$ 準同型 s.t. $g \circ f = \mathrm{id}_V, f \circ g = \mathrm{id}_W$.

命題：R 準同型 $f : V \to W$ について，f が R 同型 $\Leftrightarrow$ f は全単射.

証明：環のときと同様.

命題（商加群の普遍性）：R 加群の部分 R 加群 W による商 R 加群 V/W は，以下の普遍性を持つ（ここで $p : V \twoheadrightarrow V/W, u \mapsto [u]$ は自然な全射 R 線形）：

> 任意の R 加群 Z と，任意の R 線形 $f : V \to Z$ で
>
> $$\forall v \in V, \forall v' \in V, v \equiv v' \pmod W \Rightarrow f(v) = f(v')$$
>
> となるものについて，$\bar{f} \circ p = f$ となる R 線形 $\bar{f} : V/W \to Z$ がただ 1 つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & V/W \\ & \searrow^{f} & \vdots\ \bar{f} \\ & & Z. \end{array}$$

証明：環のときと同様．商集合の普遍性より，（単なる）写像 $\bar{f}$ で，$\bar{f} \circ p = f$ となるものがただ 1 つ存在する．$\bar{f}$ が R 線形であることが，$\bar{f}([u]) = f(u)$ から（ここで $u \in V$），容易に確認できる.

定理（加群の準同型定理）：R 準同型 $f : V \to W$ について，$\bar{f} : V/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$ は R 同型.

注意：$\operatorname{Ker} f := f^{-1}(0_W)$ は V の R 部分加群．$\operatorname{Im} f := f(V)$ は W の R 部分加群.

証明：環のときと同様．$\forall u \in V, \forall u' \in V, f(u) = f(u') \Leftrightarrow u - u' \in \operatorname{Ker} f$ を確認すれば，普遍性から単射 R 準同型 $\bar{f} : V/\operatorname{Ker} f \hookrightarrow W$ が得られる.

定義：体 k 上の k 線形空間 V の元 $v_1, \cdots, v_n \in V$ が

(1) k 線形独立 $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$（ここで $a_1, \cdots, a_n \in k$）.
(2) V を k 生成する $\Leftrightarrow$ $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle := \{\sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in k\}$.
(3) k 基底 $\Leftrightarrow$ (1) かつ (2).

注意：(3)$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V, \exists! (a_1, \cdots, a_n) \in k^n, v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$（i.e., 任意のベクトルは座標を持つ）.

証明：($\Leftarrow$)：(2) は明らか．$0_V = \sum_{i=1}^n 0_k v_i$ から (1) が従う.

($\Rightarrow$)：$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ なら $\sum_{i=1} (a_i - b_i) v_i = 0_V = \sum_{i=1}^n 0_k v_i$．よって $\forall i, a_i - b_i = 0_k$．以上より $\exists!$ を言うには $\exists$ を言えばよいが，それは (2) そのものである.

定義：体 k 上の k 線形空間 V が k 有限生成とは：

$$\exists n \geq 0, \exists v_1 \in V, \cdots, \exists v_n \in V, V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle.$$

注意：$n = 0$ のとき，空な元の族 $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ は形式的に (1) を満たし，$\langle\rangle = \{0_V\}$．つまり零線形空間 $\{0\}$ は空な基底を持つ（この講義では)．

例：$\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 有限生成だが，$\mathbb{C}[x]$ は $\mathbb{C}$ 有限生成ではない．

定理：体 k 上の有限生成線形空間 V は基底を持つ．より正確に，$V = \langle v_1, \cdots, v_\ell \rangle$ のとき，線形独立な $w_1, \cdots, w_m \in V$ について，（必要なら）$v_1, \cdots, v_\ell$ からいくつか $v_{i_1}, \cdots, v_{i_j}$ を取って $(1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq \ell)$，$w_1, \cdots, w_m, v_{i_1}, \cdots, v_{i_j}$ を V の基底にできる．

証明：$\langle w_1, \cdots, w_m, v_{i_1}, \cdots, v_{i_j} \rangle = V$ となる $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq \ell$ のうち，j が最小のものが基底になっていることを言えばよい．線形独立性を言えばよく，$\sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{\ell=1}^j b_\ell v_{i_\ell} = 0$ で，$\exists \ell_0, b_{\ell_0} \neq 0$ とすると，$w_1, \cdots, w_m, v_{i_1}, \cdots, v_{i_j}$ から $v_{i_{\ell_0}}$ を除いたものも生成系になってしまう．よってこのとき $\sum_{i=1}^m a_i w_i = 0$ だが，$w_1, \cdots, w_m$ の線形独立性の仮定より $\forall i, a_i = 0$.

定理：上の定理で基底の数は一意的（これを V の次元と言って，$\dim V$ とか $\dim_k V$ と書く）．

証明：$V = \langle v_1, \cdots, v_\ell \rangle$ のとき，$s > \ell$ なる任意の $u_1, \cdots, u_s \in V$ は線形従属であることから従う．

命題：k 線形空間 V が基底 $v_1, \cdots, v_n$ を持つとき，任意の線形空間 W について以下は全単射．

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ は } k \text{ 線形 }\} \to W^n, \quad f \mapsto (f(v_1), \cdots, f(v_n)).$$

注意：このことを「線形写像を与えることと，基底の行き先を決めることは同じ」と表現する．

証明：$(w'_1, \cdots, w'_n) \in W^n$ について，$\varphi : V \to W$ を

$$\forall v \in V, \exists!(c_1, \cdots, c_n) \in k^n, v = \textstyle\sum_{i=1}^n c_i v_i \text{ だが，このとき } \varphi(v) := \sum_{i=1}^n c_i w'_i$$

と定めると，これは k 線形で，命題中の写像の逆写像になっていることが確認できる．

注意：$\mathrm{Hom}_k(V, W)$ に自然に k 線形空間の構造が入り，命題中の全単射は k 線形同型にもなる．

系：上の命題で，さらに W が基底 $w_1, \cdots, w_m$ を持つとする．以下の対応は全単射．

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \to \mathrm{M}_{m,n}(k), f \mapsto (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \text{ where } f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i.$$

注意：$(a_{ij})_{i,j}$ を，V の基底 $v_1, \cdots, v_n$ と W の基底 $w_1, \cdots, w_m$ に関する f の表現行列と言う．

命題：k 線形 $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$ を考える．V の基底 $v_1, \cdots, v_\ell$, W の基底 $w_1, \cdots, w_n$, U の基底 $u_1, \cdots, u_m$ が取れるとき，f の表現行列を $B \in \mathrm{M}_{n,\ell}(k)$, g の表現行列を $A \in \mathrm{M}_{m,n}(k)$, gf の表現行列を $C \in \mathrm{M}_{m,\ell}(k)$ とする．このとき $C = AB$.

証明：それぞれの成分は

$$f(v_p)=\sum_{i=1}^{n} b_{ip}w_i,\quad g(w_q)=\sum_{j=1}^{m} a_{jq}u_j,\quad (gf)(v_r)=\sum_{k=1}^{m} c_{kr}u_k$$

で定義されている．

$$g(f(v_p))=\sum_{i=1}^{n} b_{ip}g(w_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ip}a_{ji}u_j=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ip})u_j$$

だが，展開の一意性より $c_{kr}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ir}$．つまり $C=AB$．

系：行列積に関して結合法則が成立する．つまり

$$\forall P\in \mathrm{M}_{a,b}(k),\forall Q\in \mathrm{M}_{b,c}(k),\forall R\in \mathrm{M}_{c,d}(k),(PQ)R=P(QR).$$

証明：$k^d \xrightarrow{F_R} k^c \xrightarrow{F_Q} k^b \xrightarrow{F_P} k^a$ で，写像の合成に関して $(F_P\circ F_Q)\circ F_R=F_P\circ(F_Q\circ F_R)$ が成立するため．ここで $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ について，$F_A:k^n\to k^m,\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ は k 線形で，k^n,k^m それぞれの標準基底に関する F_A の表現行列は A であることに注意しよう．

定義：V が基底 $B:v_1,\cdots,v_n$ と $B':v'_1,\cdots,v'_n$ を持つとき，B から B' への変換行列 $P=(p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in \mathrm{M}_n(k)$ を以下で定める．

$$v'_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}v_i.$$

命題：P は可逆行列（つまり $P\in \mathrm{GL}_n(k)$）．

証明：B' から B への変換行列を Q とすると，$PQ=E_n=QP$ が確認できる．

定理：k 線形写像 $f:V\to W$ を考える．V が基底 $B_V:v_1,\cdots,v_n$ と基底 $B'_V:v'_1,\cdots,v'_n$ を持ち，W が基底 $B_W:w_1,\cdots,w_m$ と基底 $B'_W:w'_1,\cdots,w'_m$ を持つとする．このとき

- $A\in \mathrm{M}_{m,n}(k)$ を基底 B_V,B_W に関する f の表現行列，
- $B\in \mathrm{M}_{m,n}(k)$ を基底 B'_V,B'_W に関する f の表現行列，
- $P\in \mathrm{GL}_n(k)$ を基底 B_V から B'_V への変換行列，
- $Q\in \mathrm{GL}_m(k)$ を基底 B_W から B'_W への変換行列

とすると，$B=Q^{-1}AP$．

証明：これまでと同様．

注意：$A\in \mathrm{M}_{m,n}(k)$ について，$P\in \mathrm{GL}_n(k)$ と $Q\in \mathrm{GL}_m(k)$ をうまく選んで，$Q^{-1}AP$ を「きれいに」したのがランク標準形である．

注意：$V=W$ のとき，$A\in \mathrm{M}_n(k)$ について，$P\in \mathrm{GL}_n(k)$ をうまく選んで，$P^{-1}AP$ を「きれいに」したのがジョルダン標準形である．