- 不変部分空間による直和と対角化の関係を知る．
- Jordan 標準形とは何か知る（証明は次回）．

定義：k 線形空間 V の部分空間 $V_1, \cdots, V_r$ について

$$\sum_{i=1}^{r} V_i := \{\sum_{i=1}^{r} v_i \mid 1 \le \forall i \le r, v_i \in V_i\} \subseteq V$$

は部分空間だが，これが直和とは，以下が成り立つことと定義する．

$$\forall v \in \sum_{i=1}^{r} V_i, \exists! v_1 \in V_1, \cdots, \exists! v_r \in V_r, \sum_{i=1}^{r} v_i = v.$$

注意：$\bigcap_{i=1}^{r} V_i \subseteq V$ は部分空間だが，$\bigcup_{i=1}^{r} V_i$ は部分空間とは限らない．

命題：$\sum_{i=1}^{r} V_i$ は直和 $\Leftrightarrow 1 \le \forall j \le r, (\sum_{i \ne j, 1 \le i \le r} V_i) \cap V_j = \{0\}$.

証明：$(\Rightarrow)$ $\exists j, 0 \ne \exists w \in (\sum_{i \ne j} V_i) \cap V_j$ とする．適当な $v_i \in V_i$（ただし $i \ne j$）を用いて $w = \sum_{i \ne j} v_i$ だが，$\sum_{i \ne j} v_i - w = 0$ で矛盾が生じた．

$(\Leftarrow)$ $v = \sum_{i=1}^{r} v_i = \sum_{i=1}^{r} v'_i$ のとき，$\forall j, v_j - v'_j = \sum_{i \ne j} v'_i - v_i \in \{0\}$ より，$v_j = v'_j$.

系：さらに $\forall i, V_i$：有限生成，と仮定すると，次とも同値：

$$v_1^{(i)}, \cdots, v_{N_i}^{(i)} \text{ が } V_i \text{ の基底ならば } v_1^{(1)}, \cdots, v_{N_1}^{(1)}, \cdots, v_1^{(r)}, \cdots, v_{N_r}^{(r)} \text{ は } \textstyle\sum_{i=1}^{r} V_i \text{ の基底}$$

証明：$(\Rightarrow)$ $v_1^{(1)}, \cdots, v_{N_1}^{(1)}, \cdots, v_1^{(r)}, \cdots, v_{N_r}^{(r)}$ が $\sum_{i=1}^{r} V_i$ を生成することは明らか．$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_i} c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ とすると，$\forall i, \sum_j c_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ から $\forall i, \forall j, c_j^{(i)} = 0$.

$(\Leftarrow)$ $\exists j, (\sum_{i \ne j} V_i) \cap V_j \ni w \ne 0$ とし，$w = \sum_{\ell=1}^{N_j} c_\ell^{(j)} v_\ell^{(j)} = \sum_{i \ne j} \sum_{\ell=1}^{N_i} c_\ell^{(i)} v_\ell^{(i)}$ と書く．「$\forall \ell, c_\ell^{(j)} = 0$」ではなく，「$\forall i \ne j, \forall \ell, c_\ell^{(i)} = 0$」でもない．一方，「中辺」$-$「右辺」$= 0$ なので矛盾が生じた．

注意：$V_1 + V_2$ が直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

命題：k 線形空間 V の部分空間 V_1, V_2 が有限生成のとき

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2).$$

証明：$V_1 \cap V_2$ の基底 $u_1, \cdots, u_r$ を延長して，V_1 の基底 $u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s$ と V_2 の基底 $w_1, \cdots, w_t$ を得たとする．以下を示せばよい．

> 主張：$u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s, w_1, \cdots, w_t$ は $V_1 + V_2$ の基底である．
>
> 証明：生成することは明らか．$\sum_{i=1}^{r} c_i u_i + \sum_{j=1}^{s} d_j v_j + \sum_{\ell=1}^{t} e_\ell w_\ell = 0$ とすると，$\sum_{\ell=1}^{t} e_\ell w_\ell \in V_1 \cap V_2$ より，$\forall \ell, e_\ell = 0$. よって $\forall i, c_i = 0$ かつ $\forall j, d_j = 0$.

注意：$V_1 \hookrightarrow (V_1+V_2) \twoheadrightarrow (V_1+V_2)/V_2$ という合成を φ とすると，φ は全射で，$\operatorname{Ker}\varphi = V_1 \cap V_2$．よって準同型定理より

$$V_1/(V_1\cap V_2) \xrightarrow{\sim} (V_1+V_2)/V_2.$$

これから $\dim V_1 - \dim(V_1\cap V_2) = \dim(V_1+V_2) - \dim V_2$ と導出してもよい．

記法：$\sum_{i=1}^r V_i$ が直和のとき，$\bigoplus_{i=1}^r V_i$ とも書く．

定義：k 線形空間 V の自己線形 $f : V \to V$ について，部分空間 $W \subseteq V$ が f 不変 $\Leftrightarrow f(W) \subseteq W$．

注意：V が有限生成のとき，W の基底 $u_1, \cdots, u_t$ を延長して $v_1, \cdots, v_s$ が得られたとすると，この基底に関する f の表現行列は，以下の形をしている．

$$\begin{pmatrix} f|_W \text{ の基底 } u_1,\cdots,u_t \text{ に関する表現行列} & * \\ O & \bar{f} \text{ の基底 } [v_1],\cdots,[v_s] \text{ に関する表現行列} \end{pmatrix}.$$

ここで $\bar{f} : V/W \to V/W$ は（商加群の普遍性によって）$\bar{f}([u]) = [f(u)]$ と定まる自己線形．

注意：同様に，$W_1, \cdots, W_r \subseteq V$ が f 不変で $\bigoplus_{i=1}^r W_i = V$ なら，f の表現行列を

$$\begin{pmatrix} f|_{W_1} \text{ の表現行列} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & f|_{W_r} \text{ の表現行列} \end{pmatrix}$$

と出来る．特に $W_i = \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\}$ となるとき，f の表現行列は以下である．

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{\dim W_1} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & \alpha_r E_{\dim W_r} \end{pmatrix}$$

命題：体 k 上の有限生成線形空間 V の自己線形 $f : V \to V$ が対角化可能 $\Leftrightarrow \exists\alpha_1 \in k, \cdots, \exists\alpha_r \in k, V = \bigoplus_{i=1}^r W_i$．ここで $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$ で，$W_i := \{v \in V \mid f(v) = \alpha_i v\}$．

証明：$(\Leftarrow)$：すぐ前で注意した．

$(\Rightarrow)$：$1 \leq \forall i \leq r, 1 \leq \forall j \leq N_i, f(v_j^{(i)}) = \alpha_i v_j^{(i)}$ となる V の基底が取れたとすると，$v_1^{(i)}, \cdots, v_{N_i}^{(i)} \in W_i$ は線形独立である．以下の補題より，

$$\dim \bigoplus_{i=1}^r W_i = \sum_{i=1}^r \dim W_i \geq \sum_{i=1}^r N_i = \dim V$$

なので $\bigoplus_{i=1}^r W_i = V$．

補題：$\sum_{i=1}^r W_i = \bigoplus_{i=1}^r W_i$．

証明：$0 = v := \sum_{i=1}^r w_i$ のとき（ここで $w_i \in W_i$），$\forall i, w_i = 0$ を言う．$f(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i$,

$f^2(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 w_i$ と続けることで

$$0 = \begin{pmatrix} v \\ f(v) \\ \vdots \\ f^{r-1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \cdots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}.$$

ここに現れる正方行列の $\det = \pm\prod_{1\le i<j\le r}(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$ より，$\forall i, w_i = 0$.

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$F_A : k^2 \to k^2, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は対角化不可能な自己線形写像.

定義：サイズ $n \geq 1$ で固有値 $\alpha \in k$ のジョルダン細胞 $J(\alpha; n)$ を以下で定義する.

$$J(\alpha; n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \cdots & O \\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & O & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

定理：$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ P^{-1}AP = \bigoplus_{u=1}^{t} J(\beta_u; t_u)$.

注意：この講義では簡単のために $\mathbb{C}$ 上で議論するが，この仮定は本質的ではない.

注意：定理の右辺を A のジョルダン標準形（JNF）という．適切な意味での一意性（並び替えを除いて一意）もあるが，ここでは扱わない.

例：$n = 2$ のとき，JNF は次のどれか（ここで $\alpha \neq \beta$).

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;1) \oplus J(\alpha;1), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;1) \oplus J(\beta;1), \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;2).$$

$n = 3$ のとき，JNF は次のどれか（ここで α, β, γ は相異なる).

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;1)^{\oplus 3}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;2) \oplus J(\beta;1),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha;3), \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;1)^{\oplus 2} \oplus J(\beta;1),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = J(\alpha;2) \oplus J(\beta;1), \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = J(\alpha;1) \oplus J(\beta;1) \oplus J(\gamma;1).$$

注意：JNF は制約が厳しく，n が小さいとき，JNF が何かは簡単に分かることが多い.

例：$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ のとき，$\varphi_A := \det(\lambda E_3 - A) = (\lambda - 2)^3$（$A$ の特性多項式）なので，以下の命題から A の JNF は $J(2;1)^{\oplus 3}, J(2;2) \oplus J(2;1), J(2;3)$ のどれかと分かる.

命題：$A,B\in \mathrm{M}_n(k)$ と $P\in \mathrm{GL}_n(k)$ について，$B=P^{-1}AP$ ならば $\varphi_B=\varphi_A$.

証明：$\varphi_B=\det(\lambda E_3-B)=\det(\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP)=\det P^{-1}\det(\lambda E_3-A)\det P=\varphi_A$.

例（続き）：$\dim\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}\}=2$ である．以下から A の JNF は $J(2;2)\oplus J(2;1)$ と分かる．

命題：$B=P^{-1}AP$ ならば $V_{A,\alpha}\cong V_{B,\alpha}$．ここで $\alpha\in k$ について

$$V_{A,\alpha}:=\{\boldsymbol{x}\in k^n\mid A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\},\quad V_{B,\alpha}:=\{\boldsymbol{x}\in k^n\mid B\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\}.$$

証明：以下は k 線形で $g\circ f=\mathrm{id}_{V_{A,\alpha}}, f\circ g=\mathrm{id}_{V_{B,\alpha}}$ が確認できる．

$$f:V_{A,\alpha}\to V_{B,\alpha},\boldsymbol{x}\mapsto P^{-1}\boldsymbol{x},\quad g:V_{B,\alpha}\to V_{A,\alpha},\boldsymbol{x}\mapsto P\boldsymbol{x}.$$

注意：$n\geq 0$ を正整数の和で書くことを n の分割という．$n=4$ だと

$$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1+1$$

の 5 通りある．これが 4×4 の複素行列の固有値が 1 種類の JNF が 5 通りあると言っている．

注意：n の分割の個数を分割数と言って $p(n)$ と書く．例えば $p(4)=5$ だが，ラマヌジャンは $p(5n+4)\equiv 0 \pmod 5$ を見出した．この話題は保型形式という数学の主要課題の 1 つと直接関係している．先の合同式は

$$\sum_{n\geq 0}p(5n+4)q^n=5\prod_{n\geq 1}\frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q^n)^6}$$

という恒等式からも従う．これをラマヌジャンの Most Beautiful Identity と呼ぶ人も少なくない．

注意：ラマヌジャンはインドの無名な事務員だった．1913 年にハーディーに手紙を書いてケンブリッジに迎えられるのだが，その手紙に

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{\vdots}}}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\pi/5}.$$

という式があった（Rogers-Ramanujan 連分数）．これは n の分割で

- 隣り合う差が 2 以上なもの
- 5 で割って 1,4 余る数を用いたもの

の個数はそれぞれ等しい，といった主張から従う（Rogers-Ramanujan 分割定理）．後者は

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n\geq 0}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

とも同値で（Rogers-Ramanujan 恒等式），ハーディーは It would be difficult to find more beautiful formula than... と後に書いた．