16 人で麻雀大会を行う（4 人でするゲームならば何でもよい）．1 回戦に 4 組が同時にゲームを行い，計 5 回戦する．どの 1 人も他の 15 人と丁度 1 回ずつ対戦するような対戦表を作れ．

（解答）$|K|=4$ となる体 $K=\mathbb{F}_4$ について，平面 $\mathbb{F}_4^2$ は 16 個の点からなる．これらの点を 16 人とそれぞれ対応させる．$\mathbb{F}_4^2$ の直線は 4 つの点からなり，指定された傾きを持つ直線は 4 本存在する．原点を通る直線は $(16-1)/(4-1)=5$ 本あるので，傾きは 5 種類ある．傾きごとに直線上の 4 点（=4 人）が対戦するようにすれば，題意の対戦表を構成できる．

以下，もう少し具体的に計算していこう．まずは $\mathbb{F}_4$ を構成する必要がある．そのために $|K|=2$ となる体 $K=\mathbb{F}_2$ の構成を思い出す．$\mathbb{F}_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$ で，$\overline{0}=$ 偶数, $\overline{1}=$ 奇数 と思えるような演算法則に従う（たとえば $\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}$ である）．次に $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ を構成するように，$\mathbb{F}_2$ に「虚数」を添加して $\mathbb{F}_4$ を構成する（ただし $\mathbb{F}_2$ では $-\overline{1}=\overline{1}$ なので、$i^2=-\overline{1}$ となる i は存在することに注意）．天下り的だが，$\mathbb{F}_4=\{a+b\omega\mid a,b\in\mathbb{F}_2\}$ として $\omega^2=\omega+\overline{1}$ なる法則に従うとすればよい．たとえば

$$(\overline{1}+\omega)^2=\overline{1}^2+\overline{1}\omega+\overline{1}\omega+\omega^2=\overline{1}+(\overline{1}+\overline{1})\omega+(\omega+\overline{1})=\omega$$

のように計算できる．傾きは $\overline{0},\overline{1},\omega,\overline{1}+\omega,\infty$ であり，

- $\{L_y^0:=\{(\overline{0},y),(\overline{1},y),(\omega,y),(\overline{1}+\omega,y)\}\mid y\in\mathbb{F}_4\}$ が傾き 0 の 4 本の直線
- $\{L_x^\infty:=\{(x,\overline{0}),(x,\overline{1}),(x,\omega),(x,\overline{1}+\omega)\}\mid x\in\mathbb{F}_4\}$ が傾き ∞ の 4 本の直線
- $\{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1}),(\omega,\omega),(\overline{1}+\omega,\overline{1}+\omega)\}$, $\{(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1}+\omega,\omega),(\omega,\overline{1}+\omega)\}$, $\{(\omega,\overline{0}),(\overline{1}+\omega,\overline{1}),(\overline{0},\omega),(\overline{1},\overline{1}+\omega)\}$, $\{(\overline{1}+\omega,\overline{0}),(\omega,\overline{1}),(\overline{1},\omega),(\overline{0},\overline{1}+\omega)\}$ が傾き 1 の 4 本の直線
- $\{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\omega),(\omega,\overline{1}+\omega),(\overline{1}+\omega,\overline{1})\}$, $\{(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\omega),(\overline{1}+\omega,\overline{1}+\omega),(\omega,\overline{1})\}$, $\{(\omega,\overline{0}),(\overline{1}+\omega,\omega),(\overline{0},\overline{1}+\omega),(\overline{1},\overline{1})\}$, $\{(\overline{1}+\omega,\overline{0}),(\omega,\omega),(\overline{1},\overline{1}+\omega),(\overline{0},\overline{1})\}$, が傾き ω の 4 本の直線である
- $\{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1}+\omega),(\omega,\overline{1}),(\overline{1}+\omega,\omega)\}$, $\{(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}+\omega),(\overline{1}+\omega,\overline{1}),(\omega,\omega)\}$, $\{(\omega,\overline{0}),(\overline{1}+\omega,\overline{1}+\omega),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\omega)\}$, $\{(\overline{1}+\omega,\overline{0}),(\omega,\overline{1}+\omega),(\overline{1},\overline{1}),(\overline{0},\omega)\}$ が傾き $\overline{1}+\omega$ の 4 本の直線

となっている．以上より，$\mathbb{F}_4^2$ の点 $(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\omega),(\overline{0},\overline{1}+\omega),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\omega),(\overline{1},\overline{1}+\omega),(\omega,\overline{0}),(\omega,\overline{1}),(\omega,\omega),(\omega,\overline{1}+\omega),(\overline{1}+\omega,\overline{0}),(\overline{1}+\omega,\overline{1}),(\overline{1}+\omega,\omega),(\overline{1}+\omega,\overline{1}+\omega)$ をこの順に A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P とすると，題意の対戦表は以下のようになる．

1 回戦 (A,E,I,M),(B,F,J,N),(C,G,K,O),(D,H,L,P)
2 回戦 (A,B,C,D),(E,F,G,H),(I,J,K,L),(M,N,O,P)
3 回戦 (A,F,K,P),(E,B,O,L),(I,N,C,H),(M,J,G,D)
4 回戦 (A,G,L,N),(E,C,P,J),(I,O,D,F),(M,K,H,B)
5 回戦 (A,H,J,O),(E,D,N,K),(I,P,B,G),(M,L,F,C)

（コメント）以上の論理で重要なのは $\mathbb{F}_4$ の存在である．$|K|=n$ となる体は $n=p^e$ のように，n が素数べきの場合にのみ存在することが知られている（ガロア体，有限体）．よってこの構成法は，麻雀以外にも，たとえば 3 人, 5 人, 7 人, 8 人, 9 人でするゲームに適用できる．6 人でするゲームには適用できないが，その場合，そもそもこのような対戦表が存在しないことを証明できる．