

ジョルダン細胞：次の形の $n \times n$ 行列を，固有値 α のサイズ n のジョルダン細胞という．

$$J(\alpha; n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & O \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha \end{pmatrix}$$

つまり対角成分がすべて α で，その上の帯はすべて 1 で，それ以外は 0 になっている．

ジョルダン標準形 (JNF, **Jordan normal form**) : $\mathbb{F}$ を体, $A \in M_n(\mathbb{F})$ は仮定 (*) を満たすとする．このとき $\mathbb{F}$ 成分の可逆行列 P があって, $P^{-1}AP$ はジョルダン細胞を並べた形になる：

$$P^{-1}AP = \bigoplus_{u=1}^t J(\beta_u; n_u) := \begin{pmatrix} J(\beta_1; n_1) & & & \\ & J(\beta_2; n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\beta_t; n_t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ジョルダン標準形の計算法： $n \leq 4$ の場合を演習では扱います．方法はさまざまあると思いますが，とりあえず以下の手順でやってみましょう．

1. A のジョルダン標準形 J を決定する
2. ねらった J から $P = (\mathbf{p}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{p}_{n_1}^{(1)}, \mathbf{p}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{p}_{n_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{p}_1^{(t)}, \dots, \mathbf{p}_{n_t}^{(t)})$ は

$$\begin{aligned} A\mathbf{p}_1^{(1)} &= \beta_1\mathbf{p}_1^{(1)}, & A\mathbf{p}_2^{(1)} &= \beta_1\mathbf{p}_2^{(1)} + \mathbf{p}_1^{(1)}, & \dots, & & A\mathbf{p}_{n_1}^{(1)} &= \beta_1\mathbf{p}_{n_1}^{(1)} + \mathbf{p}_{n_1-1}^{(1)} \\ A\mathbf{p}_1^{(2)} &= \beta_2\mathbf{p}_1^{(2)}, & A\mathbf{p}_2^{(2)} &= \beta_2\mathbf{p}_2^{(2)} + \mathbf{p}_1^{(2)}, & \dots, & & A\mathbf{p}_{n_2}^{(2)} &= \beta_2\mathbf{p}_{n_2}^{(2)} + \mathbf{p}_{n_2-1}^{(2)} \\ &\vdots & & \vdots & \dots & & \vdots \\ A\mathbf{p}_1^{(t)} &= \beta_t\mathbf{p}_1^{(t)}, & A\mathbf{p}_2^{(t)} &= \beta_t\mathbf{p}_2^{(t)} + \mathbf{p}_1^{(t)}, & \dots, & & A\mathbf{p}_{n_t}^{(t)} &= \beta_t\mathbf{p}_{n_t}^{(t)} + \mathbf{p}_{n_t-1}^{(t)} \end{aligned}$$

をみたとわかる．掃出し法で (= 連立方程式を解いて) これを求める．

ジョルダン標準形の (実践的な) 推測方法：(Z) によって JNF を決めることができます (付録 1 を参照)． $n = 2, 3$ では (X) によって決めることができ，これが一番実用的ではないかと思います．

(W) A の各固有値 α_j について，少なくとも 1 つは細胞 $J(\alpha_j; k)$ が現れる ((1) のとき $k \leq m_j$)

(X) A が対角行列 D に対角化可能な場合， D が A の JNF である．もう少し思い出すと， A が対角化可能な必要十分条件は，各固有値 α_j について

$$\lceil Ax = \alpha_j x \text{ の解の独立なパラメータの個数 } m'_j \rceil = m_j$$

となることだった．実は，

- 固有値 α_j の細胞 $J(\alpha_j; \text{何とか})$ は合計で丁度 m'_j 個登場する．
- 「 $\sum$ 固有値 α_j の細胞 $J(\alpha_j; \text{何とか})$ のサイズ」 = m_j

(Y) $\det(\lambda E_n - A) = \det(\lambda E_n - J)$

(Z) $\forall \gamma \in \mathbb{F}, \forall m \geq 0, \text{rank}(A - \gamma E_n)^m = \text{rank}(J - \gamma E_n)^m$

3 演習問題

(S1) 次の $A \in M_2(\mathbb{Q})$ について, JNF J と, $P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

(S2) 次の $B \in M_2(\mathbb{Q})$ について, JNF J と, $Q^{-1}BQ = J_B$ となる Q を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(S3) 3×3 の行列の JNF の型は何通りありえるか列挙せよ (細胞の並び替えについては神経質にならなくてよい).

(S4) $A \in M_3(\mathbb{F})$ の固有多項式が $\det(\lambda E_3 - A) = (\lambda - \alpha)^3$ のとき, A の JNF の可能性を列挙せよ (細胞の並び替えについては神経質にならなくてよい).

(S5) 次の A について, JNF J と, $P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

(S6) $A \in M_8(\mathbb{F})$, $\det(\lambda E_8 - A) = \lambda^8$, $A^3 = O$, $A^2 \neq O$ のとき, A の JNF の可能性を列挙せよ (細胞の並び替えについては神経質にならなくてよい).

(付録 1) ジョルダン標準形の一意性の証明: ジョルダン標準形は細胞の並び替えを除いて一意的である. これは (Z) より, (2) において, $J(\beta_j; k)$ の個数が以下で与えられるからである.

$$\text{rank}(A - \beta_j E_n)^{k+1} + \text{rank}(A - \beta_j E_n)^{k-1} - 2\text{rank}(A - \beta_j E_n)^k$$

(付録 2) ジョルダン標準形の存在証明: ここでは線形代数の先にある代数学の知識も認めると, どんな感じで証明できるのか雰囲気を見てみましょう.

1. $V = \mathbb{F}^n$ は $x\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ とすることで $\mathbb{F}[x]$ 加群になる. $(n =) \dim_{\mathbb{F}} V < \infty$ なので, V は有限生成 $\mathbb{F}[x]$ 加群だが, $\mathbb{F}[x]$ はネーター環なので, V は有限表示 $\mathbb{F}[x]$ 加群である. よって適当な $\mathbb{F}[x]$ 成分 $a \times b$ 行列 M が存在して, 以下の $\mathbb{F}[x]$ 加群同型が成り立つ

$$V \cong \text{Coker}(M) := \text{Coker}(\mathbb{F}[x]^b \rightarrow \mathbb{F}[x]^a, \mathbf{f} \mapsto M\mathbf{f}).$$

2. $\mathbb{F}[x]$ は PID (単項イデアル整域) なので, スミス標準形 (単因子標準形) がとれる.

$$PMQ = D = \begin{pmatrix} f_1(x) & & & O \\ & \ddots & & \\ & & f_r(x) & \\ O & & & O \end{pmatrix}$$

ここで P, Q は $\det P, \det Q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ となる $\mathbb{F}[x]$ 成分の $a \times a, b \times b$ 行列である (これは $\exists R \in M_a(\mathbb{F}[x]), PR = RP = E_a, \exists S \in M_b(\mathbb{F}[x]), QS = SQ = E_b$ と同値である. このような P, Q はユニモジュラー行列ともよばれる). $f_1, \dots, f_r$ は「最高次の係数が 1 の多項式で $f_i(x)$ は $f_{i+1}(x)$ を割り切る ($1 \leq i < r$)」という条件で M から一意的に定まる.

3. $f(x) = x^m + \sum_{i=1}^m a_i x^{m-i} \in \mathbb{F}[x]$ について, 行列 $C(f(x)) \in M_m(\mathbb{F})$ を

$$C(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & O & -a_m \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_2 \\ O & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

と定義する ($m \geq 2$ のとき. $m = 1$ のときは $C(f(x)) = (-a_1)$ であり, $m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$ のときは $C(f(x))$ は 0×0 行列と思う). $\det(xE_m - C(f(x))) = f(x)$ となることは難しくない (演習問題のレベル). $C(f(x))$ は $f(x)$ のフロベニウス同伴行列とよばれる.

4. $\text{Coker}(M) \cong \text{Coker}(D) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{F}[x]/\langle f_i(x) \rangle \oplus \mathbb{F}[x]^{\oplus(a-r)}$ だが, $\dim_{\mathbb{F}} V < \infty$ より $a = r$. よって $\mathbb{F}[x]$ 加群として $V \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{F}[x]/\langle f_i(x) \rangle$ なので, ある $R \in GL_n(\mathbb{F})$ が存在して

$$R^{-1}AR = \bigoplus_{i=1}^r C(f_i(x))$$

となる. 両辺の固有多項式をとると, 仮定 (*) と $\mathbb{F}[x]$ が UFD (一意分解整域) であることより, 各 $f_i(x)$ も実は $\mathbb{F}[x]$ 中で 1 次式の積に分解されていることがわかる. 以上より $f(x) = (\lambda - \gamma_1)^{\delta_1} \cdots (\lambda - \gamma_u)^{\delta_u}$ の形 (ここで $u \geq 0, \delta_j \geq 1, 1 \leq j \neq k \leq u \Rightarrow \gamma_j \neq \gamma_k$) について $\mathbb{F}[x]/\langle f(x) \rangle$ を考察すればよい. さらに CRT (中国剰余定理) を適用すると

$$\mathbb{F}[x]/\langle f(x) \rangle \cong \bigoplus_{j=1}^u \mathbb{F}[x]/\langle (\lambda - \gamma_j)^{\delta_j} \rangle$$

なので, $f(x) = (x - \alpha)^m$ の場合に帰着される

5. $W := \mathbb{F}[x]/\langle f(x) \rangle = \mathbb{F}[x]/\langle (x - \alpha)^m \rangle$ は, 基底

$$\{(x - \alpha)^k + \langle (x - \alpha)^m \rangle \mid 0 \leq k < m\}$$

をもつが, これについての $x - \alpha$ の行列表示は $J(0; m)$ である. よってこの基底に関する x の行列表示は $J(\alpha; m)$ となる. 以上より x の行列表示がジョルダン細胞の直和になるような V の基底が存在する

注: 2 は既習のランク標準形の一般化になっています. ランク標準形とは, 以下でした:

$$\forall M: \mathbb{F} \text{ 成分 } a \times b \text{ 行列}, 0 \leq \exists r \leq \min(a, b), \exists P \in GL_a(\mathbb{F}), \exists Q \in GL_b(\mathbb{F}), PMQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

2 は行・列基本変形とユークリッドの互除法の組合せで, P, Q を具体的に求めるアルゴリズムが存在します (ランク標準形は行・列基本変形のみで P, Q が求まるのでした).