


第2回 代数系

評価

授業 + 演習

期末オンライン

進め方

1-1

50分2'6枚

4枚

75=入語

復習

環

常識

ideal

部分環 商環

環準同型

お話

群

正規部分群

部分群 商群

群準同型

準同型定理

4つ力
動

雷磁

弱い力

強い力

~~結合規則~~

お話

1-環

ideal

部分1-環

商1-環

1-準同型

$\mathbb{R}$ is ideal

Def $I \subseteq \mathbb{R}$ is ideal

- $0_{\mathbb{R}} \in I$
- $\forall x \in I \forall y \in I \quad x+y \in I$
- $\forall x \in I \forall a \in \mathbb{R} \quad ax \in I$

$(a_1, \dots, a_n) \quad a_i \sim a_n \in \mathbb{R}$

$\bigcap_{\mathbb{R}} \text{ideal} = \left\{ \sum x_i a_i \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$

$n=0$ 空の和 $2x+3y=1$
 $\begin{matrix} \phi \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \phi \\ (-1) \end{matrix}$

リストレス

可能無限

実無限

100

演習

$C(x) \neq PID$

加群



Jordan標準形

$\cup$ ideal

$I \neq \{0\}$

$\neq$

degree が 最小の a を α とし

計算

定理 $\boxed{a \sim a' \Rightarrow [a] = [a']}$ $\{[a] \mid a \in R\}$
 商环

$$R \quad R/I = R/\equiv$$

I ideal

I

商集合

$$a \equiv a' \pmod{I} \Leftrightarrow a - a' = 0 \in I$$

$$A \Rightarrow B$$

“ $\Rightarrow$ ”

$$\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots\} = \{\overline{1}\}$$

$$\text{Ex } R = \mathbb{Z} \supseteq I = 2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$[0] \neq [1] \text{ in } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$-3$$

数加“通步”

$$\begin{array}{l}
 R \\
 \cup \text{ ideal} \\
 I
 \end{array}
 \quad
 R/I := R/\equiv$$

と環になる

環 = 57組 with 7公理

$$\left(\underbrace{A}, +, \times, 0_A, 1_A \right)$$

R/I

Ex $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni [0] = [2] = x$
 $[1] = [3] = y$

$$x + y = [0] + [1] = [1]$$

$$[2] + [3] = [5]$$

$$\mathbb{Q}/2\mathbb{Q} \ni \begin{matrix} [0] & [1] \\ \parallel & \parallel \\ [2] & [-1] \end{matrix}$$

Ex $\mathbb{C}[x]$

$$I = (x^2) = \bigcup \{x^2 f \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$$

$$= \{2\text{以上の次数の多項式}\}$$

$$\mathbb{C}[x]/I = \{[ax+b] \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \underbrace{a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\substack{\uparrow \\ I}}$$

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \dots \quad \uparrow \\ I$$

$$[f(x)] = [g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \end{cases}$$

A

$\mathbb{C}[x]/(x^2)$: 可換環

高次

$$\{[ax+bx] \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

$$\{[ax+bx] \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

$$(a, b) \neq (c, d) \Rightarrow [ax+bx] \neq [cx+dx]$$

$$[x]$$

$$A \ni [x] =: \varepsilon \in (0)$$

代数的
閉体

$$\varepsilon^2 = [x^2] = [0]$$

A は整域ではない

$(R, +_R, \times_R, 0_R, 1_R)$

$\downarrow f$

$(S, +_S, \times_S, 0_S, 1_S)$

構造主義 (ガリバーズ)

集合 + 構造 数学原理

Def
Thm
 $\Downarrow$ proof

中国剰余定理

$$(gf)(x+y) = (gf)(x) + (gf)(y)$$

$$(gf)(1_R) = 1_T \quad ?$$

$$g(f(x+y))$$

$$= g(f(x) + f(y))$$

$$= g(f(x)) + g(f(y))$$

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b) \text{ in } R/I$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ [a+b] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ [a] + [b] \end{array}$$

商環 普遍性

部分 R の R 上 sp

商 R/I の R 上 sp

terminal obj
終対象

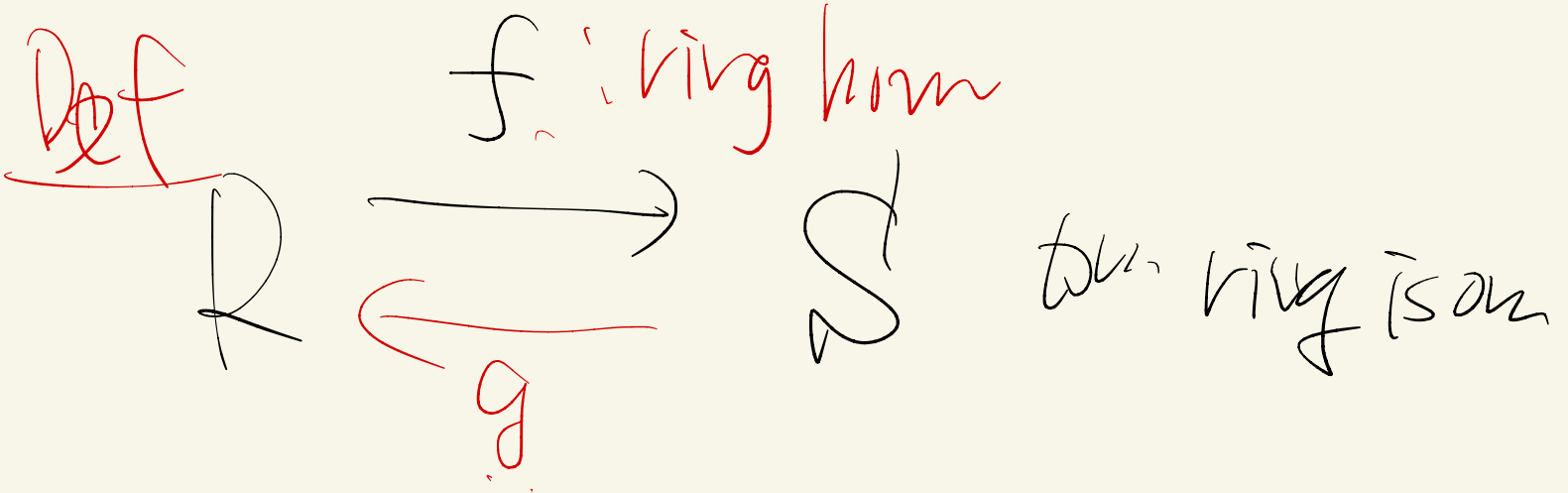
$$\begin{array}{ccc} \forall & \exists! & \\ R & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow & \text{ring hom} & \downarrow \\ U & & U \end{array}$$

$$r \longmapsto 0$$

は ring hom は check できる

環の集合は集合ではない

環同型



$$\Leftrightarrow \exists g \text{ s.t. } g \circ f = \text{id}_R$$

ring hom $f \circ g = \text{id}_S$

$R \cong S$ 同型 (自然な同型)

$R \cong S$ ~~同型~~ $(R=S)$

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{f} & S \\
 \uparrow g & & \uparrow g' \\
 R & \xrightarrow{f'} & T
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{f \circ f'} & T \\
 \uparrow g \circ g' & & \uparrow g'
 \end{array}$$

then ring isom

$$(g \circ g')(f \circ f') = \text{id}_R$$

f ...

X : set $X \times X \supseteq R$ s.t. ... ~~function~~

集合の濃度

$$R \xrightarrow{f} S : \text{ring hom}$$

$$f \text{ isom} \Leftrightarrow f \text{ bij}$$

環と何の関係もない

$$\Rightarrow \begin{aligned} g \circ f &= 1_R \\ f \circ g &= 1_S \end{aligned} \quad \therefore f \text{ と } g \text{ (} \neq \text{bij)}$$

$$\Leftarrow \underline{g \text{ を つくる (1つ作りしかたない)}}$$

g を f の 逆写像 とする (環と何の関係もない)
 g が "環準同型" であること check する。

$$\begin{array}{ccc}
 & f: \text{ring hom} & \\
 R & \xrightarrow{\quad} & S \\
 & \xleftarrow{\quad} & \\
 & g: \text{逆映射} &
 \end{array}$$

$$\exists a, b$$

$$\begin{array}{cc}
 \parallel & \parallel \\
 \exists f(A) & \exists f(B)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 g(a+b) = g(a) + g(b) & a, b \in S & \\
 \parallel & & \parallel
 \end{array}$$

$$\underline{g(f(A) + f(B))} \quad g(f(A)) + g(f(B))$$

$$\parallel f: \text{ring hom} \parallel$$

$$g(f(A+B)) \quad A+B$$

$$\parallel$$

$$A+B$$

$V \xrightarrow{f} W$: 線形写像から線形
同型

def $\Rightarrow \exists g: W \rightarrow V$: 線形

s.t. $g \circ f = \text{id}_V$

$f \circ g = \text{id}_W$

$\iff f$ is bi

も同様

X, Y : 位相 sp

$X \xrightarrow{f} Y$: 連続写像

$(\Rightarrow)$ $\exists g: Y \rightarrow X$ s.t. ...
def

$\Rightarrow f$ は big

~~Φ~~ は 不成立

f 全

同型 $\hat{=}$ 行、列、 ∞ 、 ∞
 g あり

普遍性 "商"

$$\forall R \xrightarrow{\exists! \text{ 導}} \{0\}$$

可

終対象

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{\exists! \text{ ring hom}} \forall R$$

可

始対象

→ かん出るとは人間には ~~難~~ 難
かゝる

$$\text{prop} \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{\exists! f} \forall R$$

$$① \quad f(1) = 1_R \quad \text{ring hom } f \text{ def}$$

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1)$$

$$f(n) = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n \text{ 回}} \quad (n \geq 2)$$

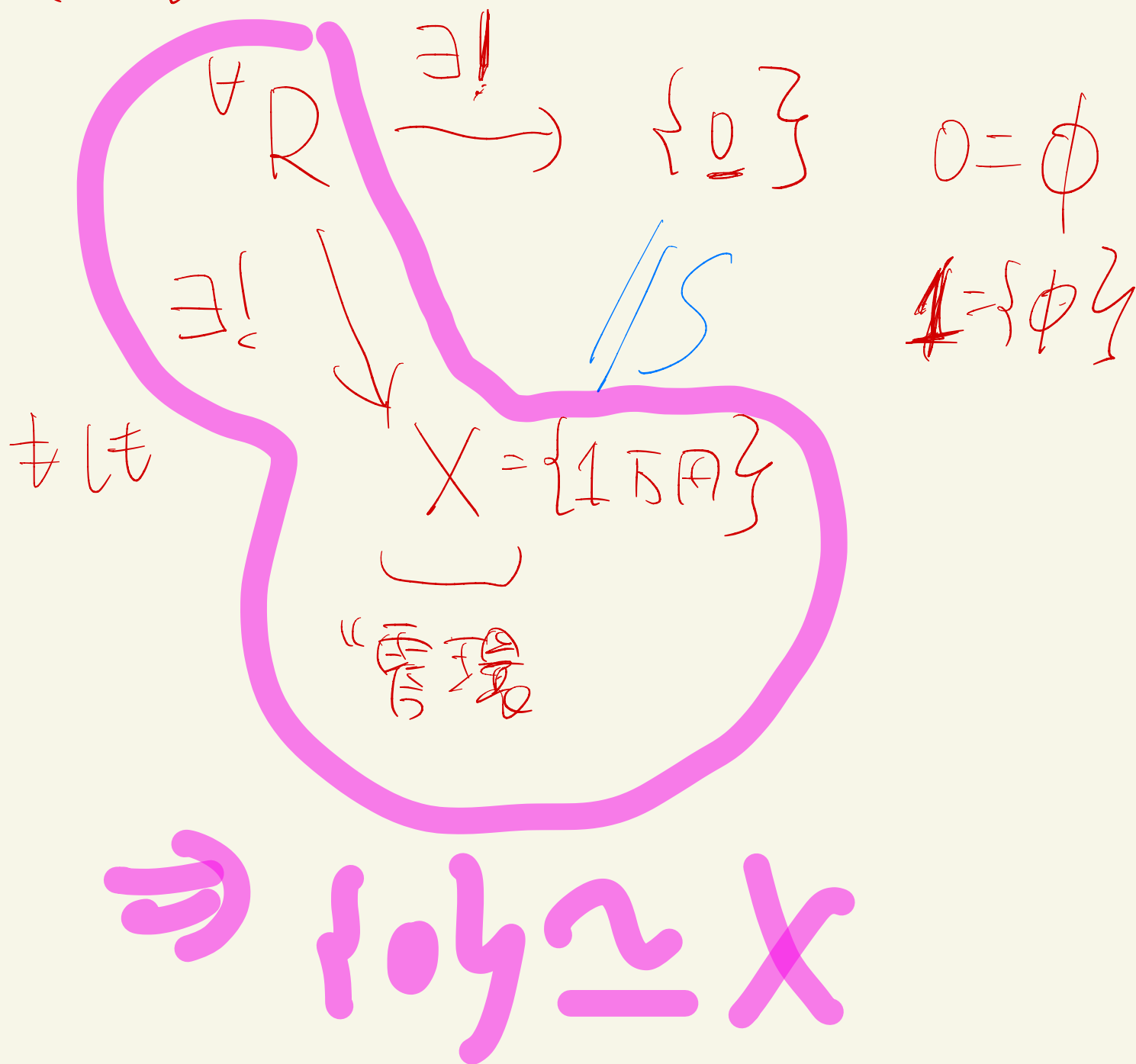
$$f(-2) + 2 = f(-2) + f(2)$$

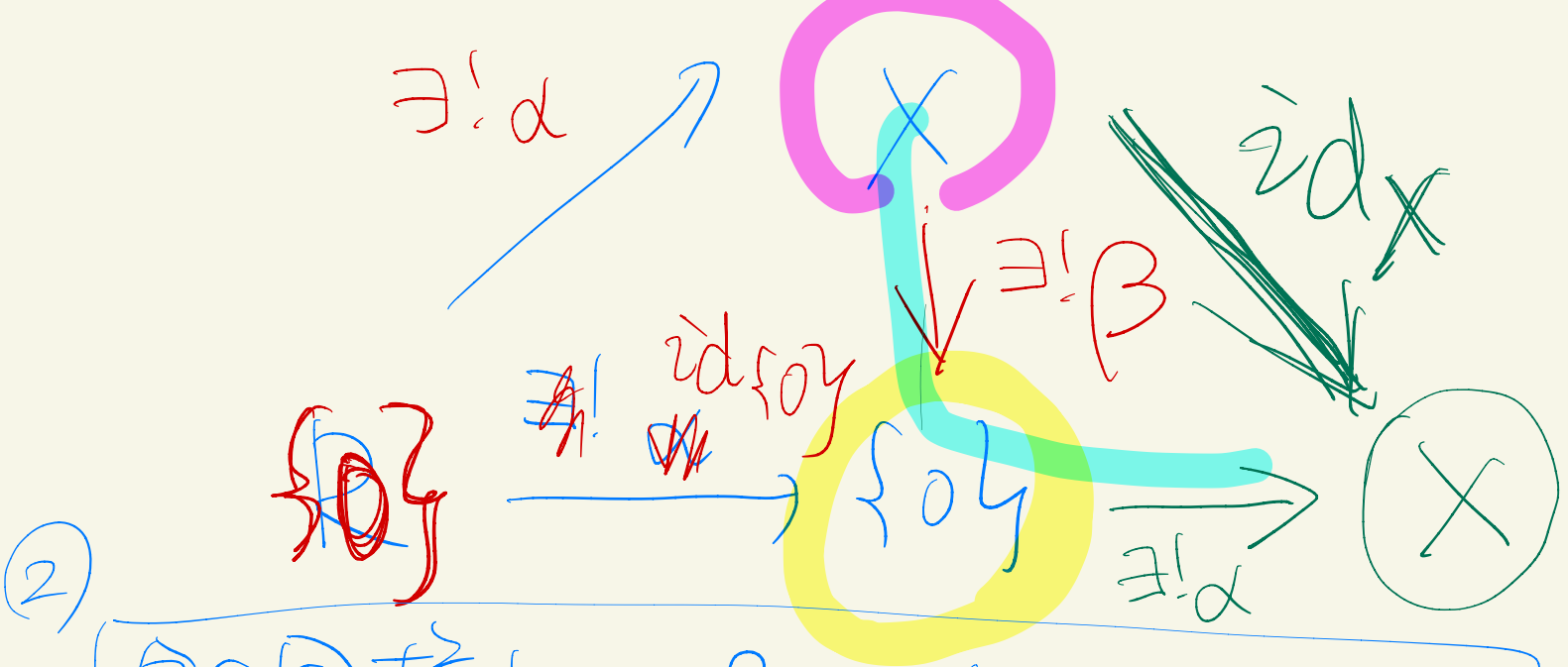
$$\text{"} \quad f(0) = 0_R \quad \therefore f(-2) = -f(2)$$

$$\therefore f(-n) = -f(n)$$

というふうに f は $\mathbb{Z}$ から R へ

普遍性と同型





全く同様に $\alpha \circ \beta = \text{id}_X$

$$\therefore X \xrightleftharpoons[\alpha]{\beta} \{0_Y\}$$

R は $\forall f: A \rightarrow B \in \mathcal{D} \subseteq R = \{0_Y\}$ とす

$$\exists! \alpha: \{0_Y\} \rightarrow X$$

$$\text{同様に } \exists! \beta: X \rightarrow \{0_Y\}$$

$\beta \circ \alpha: \{0_Y\} \rightarrow \{0_Y\}$ は ring hom

だから $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\{0_Y\}}$ となる

$$\begin{array}{ccc} \forall & \exists! \text{ ring hom} & \\ \sim R & \longrightarrow & \underline{X} \\ \text{C ring} & & \end{array}$$

同様に

$$\begin{array}{ccc} \forall & \exists! \text{ ring hom} & \forall \\ & \xrightarrow{\quad} & R \\ & \nearrow \exists! \alpha & \\ \text{可換環} & & \\ & \searrow \exists! \beta & \\ \Rightarrow & \forall \cong & \mathbb{Q} \end{array}$$

演習

終対象

集合

$\forall X$

$\exists!$ 写像

$\{x, y\}$

右

Q: 1) 2) set

C++

1点集合

ある

(米田の問題)

107 page

次回

ϕ

$\exists!$ 写像

$\forall$

X

左

商環の

普遍性

set

$(A \xrightarrow{f} B \Leftrightarrow A \times B \supseteq P + \text{性質})$

→ 出来る方は人間に本能的に
出来る

{ 初等線形代数論
Jordan, 線形代数

本 本ニテハナク