

---

---

---

---

---



# 第5回代數系

加群 (線形代數再論)

環上の加群

線形空間

$\mathbb{R}$ : 体  $\mathbb{K}$  上の線形空間

(4) 組  $(V, +, \cdot, 0_V)$

$V$ : set     $+ : V \times V \rightarrow V$   
 $\psi$              $(v, v') \mapsto v + v'$   
 $0_V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$   
 $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

# 体付可換環の一種

•  $\cdot : R \times R \rightarrow R$  : 乗法

•  $\cdot : \underbrace{R}_{\sim R} \times V \rightarrow V$  : スカラー倍

左  $R$  加群       $R$  : 環

(右  $R$  加群 もある)

$$b \in V \text{ then}$$

$$\forall a \in V \quad b + a = a = a + b$$

$$\Rightarrow b = 0_V$$

☹  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{N} \cong \mathbb{N}'$

---

$a \in V$ : given

$$a + b = 0_V = b + a$$

$$a + b' // \quad // \quad b' + a \quad \Rightarrow \quad b = b'$$

---

右線形寫像



左R線形, 在RDR群準同型

環準同型  $\varphi: R \rightarrow R'$

可換

$$\varphi(0_R) = 0_{R'} \quad \text{etc}$$

$$(\varphi(1_R) = 1_{R'} \text{ : by def})$$

---

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U : k\text{-linear}$$

$$\Rightarrow g \circ f : k\text{-linear}$$

Ex  $(2\mathbb{Q}, +, \cdot, 0)$  is  $\mathbb{Q}$ -linear  
" {偶数} "  $\neq \mathbb{Q}$ -linear

$$\mathbb{Q} \times 2\mathbb{Q} \rightarrow 2\mathbb{Q}$$

$$(n, 2m) \mapsto 2mn$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ 2\mathbb{Q} & \longrightarrow & 2\mathbb{Q} \text{ (} \neq \mathbb{Q}\text{-linear)} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

Ex  $R := \mathbb{A}$

$f: V \rightarrow V$  :  $k$ -linear

$V (\neq k[x])$ -module by

$\cdot : k[x] \times V \rightarrow V$

$(a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n, v)$

$\mapsto a_0 f^n(v) + \dots + a_{n-1} f(v) + a_n v$

線形代数 ~~と~~  $D$  の部

$\mathbb{R}$  加群

~~$(\mathbb{I}, +, \cdot, 0_{\mathbb{I}})$~~

~~$\therefore \mathbb{R} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$~~

$\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$

$\uparrow$

$\mathbb{R}$  加群

V  
U  
W

$v \sim v' \stackrel{\text{def}}{=} v - v' \in W$

( $\neq$ )  $\forall \alpha$  equivalent

$V/W = V/\sim : \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$

$\uparrow$   
 $\downarrow$   
p

V

$$[u] = [v]$$

$$[u'] = [v'] \Rightarrow [u + u']$$

$$u, v \in V$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ [v + v'] \end{array}$$

$\notin$   $\subset$   $\subset$   $\subset$

( $\subset$   $\subset$   $\subset$   $W$  の  $\exists$   $\exists$   $\exists$   $\exists$   $\exists$ )

$$\textcircled{1} \quad u + u' - (v + v') \in W$$

$$\textcircled{2} \quad \parallel$$

$$(u - v) + (u' - v')$$

$V \xrightarrow{f} W$  :  $\mathbb{R}$ -linear bi-isom

$(\Leftrightarrow)$   $\exists g: W \rightarrow V$  :  $\mathbb{R}$ -linear  
def

$$\text{s.t. } g \circ f = \text{id}_V$$

$$f \circ g = \text{id}_W$$

$(\Leftrightarrow)$   $f$  is bijective  
iff

$\left( \leftarrow g = f^{-1} \text{ is } \mathbb{R}\text{-linear} \right)$   
 $\mathbb{R}^n$  である  $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n$  である

$v \mapsto [v]$  商加群

$V \xrightarrow{p} V/W$  (左)

$\exists f: V \rightarrow Z$  if  $v \equiv v' \pmod{W}$   
 $\exists f: Z \rightarrow V/W$  if  $v \equiv v' \pmod{W}$   
 $f: R\text{-linear}$

$R$ -linear

$R$ -加群

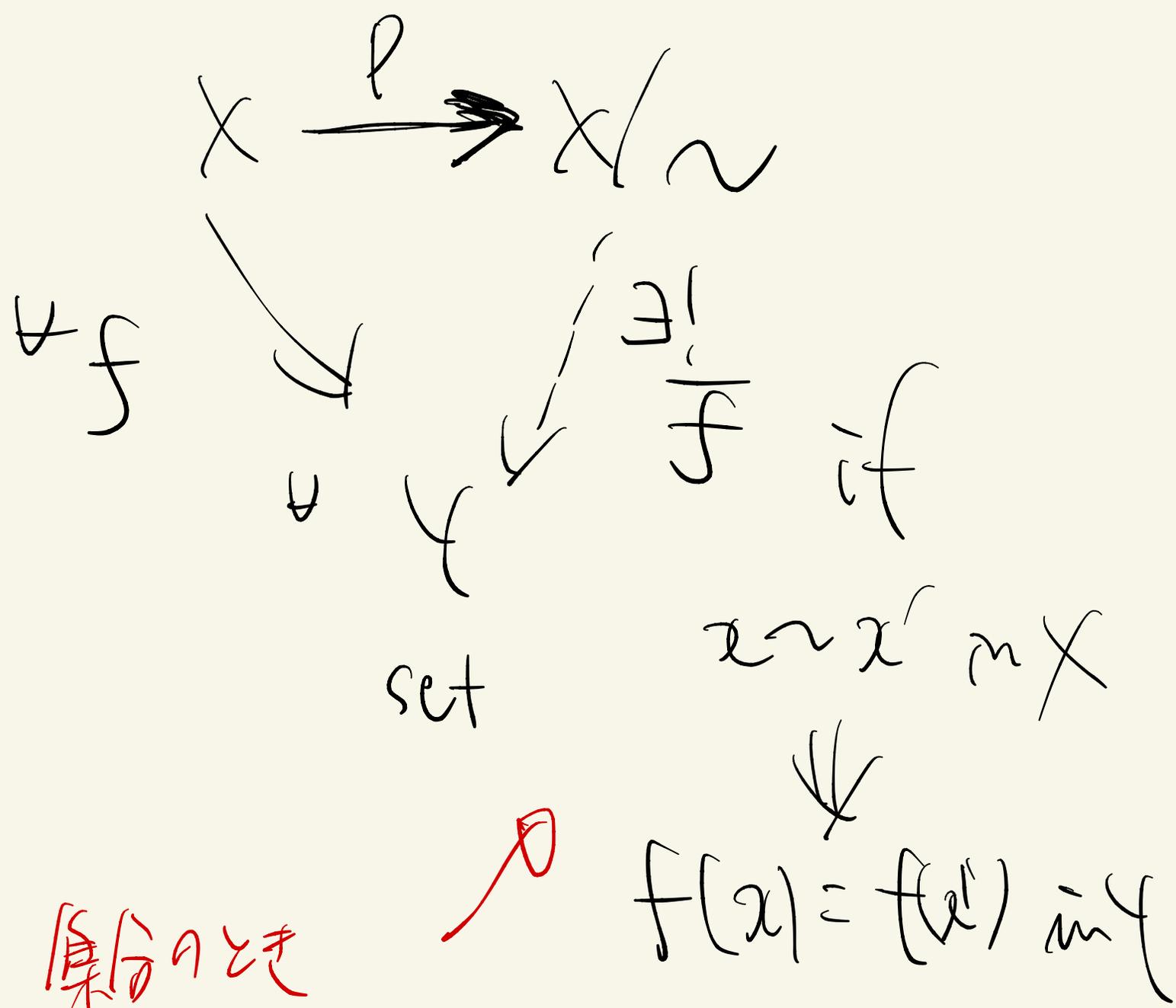
$f(v) = f(v')$

for  $p$  is  $R$ -linear  $\iff$  check  $\exists f$

商集

商環

$X$ : set  $\sim$ : equiv rel



集合のとき

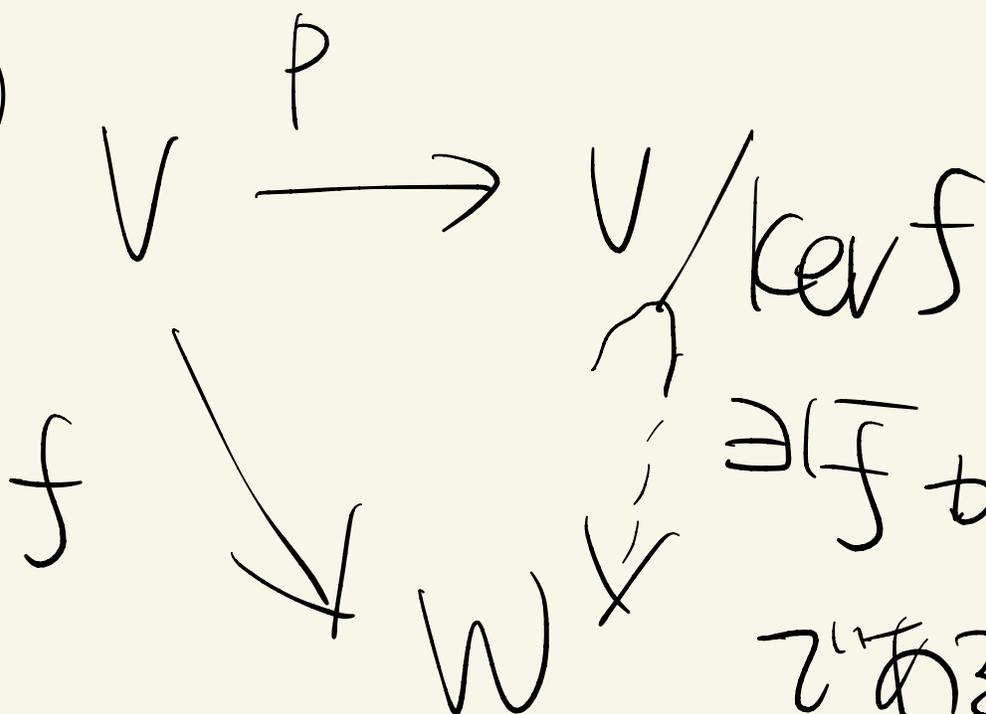
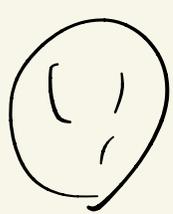
⇔ したがって  $\bar{f}$  は単射

Thm (加群の同型 Thm)

$V \xrightarrow{f} W$  :  $R$ -linear

$\Rightarrow V/\ker f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$

$R$ -isom



$\exists \bar{f}$  が単射  
であること  
を  
示す

$$f(u) = f(u') \Leftrightarrow u - u' \in \text{Ker} f$$

$$\boxed{\Rightarrow} f(u - u') = 0 \text{ ① } f: \mathbb{R}\text{-linear}$$

$$\therefore u - u' \in \text{Ker} f$$

$$\boxed{\Leftarrow} f(u - u') = 0$$

---

環の場合  $\subset$   $|\bar{\mathcal{F}}| \bar{\mathcal{F}}$  parallel.

基底、行列