第5回代数系

加群(線形代数再論)

環上の加群

線形空間

k:体 ⇝ k上の線形空間

4つ組 $(V, +, \cdot, 0_V)$

V:set

$\rotatebox{90}{$\in$}$

0_V

$+ : V \times V \to V$

$(v, v') \mapsto v + v'$

$\cdot : k \times V \to V$

$(\lambda, v) \mapsto \lambda v$

体は可換環の一種

・ : $K \times K \to K$: 乗法

・ : $\underset{R}{\underline{K}} \times V \to V$: スカラー倍

左R加群　　　R : 環

(右R加群もある)

$b \in V$ が

$\forall a \in V \quad b + a = a = a + b$

$\Rightarrow \quad b = 0_V$

∵ 環のときと同じ

$a \in V$: given

$a + b = 0_V = b + a$

$a + b' \, /\!/ \qquad \| \, b' + a \qquad \Rightarrow b = b'$

R線形写像

左R線形，左R加群準同型

環準同型 $\varphi : R \to R'$

可換

$\varphi(0_R) = 0_{R'}$ だった

$(\varphi(1_R) = 1_{R'}$: by def$)$

$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$: k-linear

$\Rightarrow g \circ f$: k-linear

$\underline{\text{Ex}}$ $(2\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$ は $\mathbb{Z}$加群

$\{$偶数$\}$

$$\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$$
$$(n, 2m) \mapsto 2mn$$

$$\begin{aligned} 2\mathbb{Z} &\xrightarrow{f} 2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$ は $\mathbb{Z}$-linear

<u>Ex</u> k：体

$f : V \to V$: k-linear

V は $k[x]$-module by

$$\cdot : k[x] \times V \longrightarrow V$$

$$(a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n, v) \longmapsto a_0 f^n(v) + \cdots + a_{n-1} f(v) + a_n v$$

線形代数 ~~[illegible]~~ での部

R加群

$\cancel{(I, +, \cdot, 0_I)}$

$\cancel{\cdot : R \times I \to I}$

$I \subseteq \underline{R}$

R加群

$$\begin{array}{c} V \\ \cup \\ W \end{array}$$

$$v \sim v' \overset{\text{def}}{\iff} v - v' \in W$$

は V の equiv rel

$$V/W = V/\sim \ : \text{商集合}$$

$$\begin{array}{c} V/W \\ \uparrow p \\ V \end{array}$$

$[u] = [v]$

$[u'] = [v'] \Rightarrow [u+u'] = [v+v']$

$u, v \in V$

をかくにん

(ここに W の仮定を使う)

∵ $u+u'-(v+v') \in W$

を言う。

$$u+u'-(v+v') = (u-v)+(u'-v')$$

$V \xrightarrow{f} W$: R-linear が isom

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists g : W \to V$: R-linear

s.t. $g \circ f = \mathrm{id}_V$

$f \circ g = \mathrm{id}_W$

$\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ f は bij

($\Leftarrow$ $g = f^{-1}$ が R-linear

であることが示せる)

$v \longmapsto [v]$ 商加群

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\forall f"'] & V/W \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

正

$\bar{f}$: R-linear

$\forall f$ R-linear

Z R-加群

if $v \equiv v' \bmod W$
$\Downarrow$
$f(v) = f(v')$

まず p は R-linear であることが check できる

商集合

商環

X : set $\quad \sim$: equiv rel

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "\forall f"'] & X/\sim \arrow[d, dashed, "\exists!\, \bar{f}"] \\
& \forall Y \ \text{set}
\end{tikzcd}$$

if

$x \sim x'$ in X

$\Downarrow$

$f(x) = f(x')$ in Y

集合のとき

$\Updownarrow$ だったら $\bar{f}$ は単射

<u>Thm</u>（加群の準同型Thm）

$V \xrightarrow{f} W$: R-linear

$\Rightarrow \; V/\ker f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$

R-isom

㊟

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & V/\ker f \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

$\exists \bar{f}$ が単射であることを言う

$$f(u) = f(u') \Leftrightarrow u - u' \in \mathrm{Ker} f$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $f(u-u') = 0$ ∵ f: R-linear

∴ $u - u' \in \mathrm{Ker} f$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(u-u') = 0$

環の場合とほぼ parallel。

基底、行列