復習　基底, 行列表示

k : 体

線形代数

V : k-lin sp $\ni v_1, \dots, v_n$

常識　$0_V = 0_k \cdot v_1 + \cdots + 0_k v_n$

\langle

\rangle　　　$V = K^n$

有限生成

R加群

$$\mathbb{C}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$$

$$e_i = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

V: k-lin sp f.g.

$\Downarrow$ 基底をもつ

$\langle v_1, \dots, v_l \rangle$

$w_1, \dots, w_m$: lin indep

さらに $v_{i_1}, \dots, v_{i_j}$ をつけかえ

基底にできる

(∵) $V = \langle w_1, \cdots, w_m \rangle$ ならOK

o.w. そうでないとき

$\exists p \quad v_p \notin \langle w_1, \cdots, w_m \rangle$

(∵) if $v_1 \sim v_l \in \langle w_1, \cdots, w_m \rangle$

$V = \langle v_1, \cdots, v_l \rangle \subseteq \langle w_1, \cdots, w_m \rangle \subsetneq V$

このとき $w_1 \sim w_m, v_p$ は1次独立

(∵) $c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m + d v_p = 0$

$\underline{d = 0}$ $\forall i \ c_i = 0$ | $d \neq 0$ 矛盾 $v_p = -\sum_i \frac{c_i}{d} w_i$

Thm 基底の個数は well-def

(証) $u_1 \sim u_a$

$u'_1 \sim u'_b$: V の基底 $a < b$

$u_1 \sim u_i \ \underline{u'_{i+1} \sim u'_b}$: 基底

⇓ 必要なら並びかえて

$u_1 \sim u_{i+1} \ u'_{i+2} \cdots u'_b$ も基底を示す

$(i = 0, \cdots, a-1)$

$u_1 \sim u_a \quad u'_{a+1} \cdots u'_b$

基底

$$u'_{a+1} = \sum_{i=1}^{a} c_i u_i$$

$u'_{a+1} \neq 0 \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

よって $\displaystyle\sum_{i=1}^{a} c_i u_i + (-1) u'_{a+1} = 0$

より $u_1 \sim u_a \; u'_{a+1} \cdots u'_b$ は

線形独立ではない

$$u_{i+1} = c_1 u_1 + \cdots + c_i u_i$$

$$+ d_{i+1} u'_{i+1} + \cdots + d_b u'_b$$

と展開できる

$\exists d_j \neq 0$ (o.w. $u_{i+1} \in \langle u_1 \sim u_i \rangle$ 矛盾)

並びかえて $d_{i+1} \neq 0$ としてよい

<u>claim</u> $u_1 \sim u_{i+1}, u'_{i+2} \cdots u'_b$ は基底

①と②をcheck

②

$$\underline{\langle u_1 \sim u_i\ u_{i+1}\ u'_{i+2} \sim u'_b \rangle} \ni u_1, \dots, u_i \quad u'_{i+2}, \dots, u'_b$$

$$u'_{i+1}$$

$$\left(u_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} c_j u_j - \sum_{k=i+2}^{b} d_k u'_k \right) d_{i+1}^{-1}$$

$$\therefore (左辺) \supseteq \langle u_1 \sim u_i, u'_{i+1} \cdots u'_b \rangle$$

$$\therefore (左辺) = V \qquad \langle u_1 \sim u_i, u'_{i+1} \cdots u'_b \rangle = V$$

① $x_1 u_1 + \cdots + x_i u_i + y u'_{i+1} + z_{i+1} u'_{i+2} + \cdots + z_b u'_b = 0$

$$y d_{i+1}^{-1} u_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} -\frac{c_j y}{d_{i+1}} u_j + \sum_{j=i+2}^{b} -\frac{d_j y}{d_{i+1}} u'_j$$

$u_1 \cdots u_{i+1}, u'_{i+2}, \dots u'_b$ が基底 より $y = 0 \Rightarrow {}^\forall x_j = 0,\ {}^\forall z_j = 0$

行列表示

数の集まり　行列積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dw \end{pmatrix}$$

prop V: 基底 $v_1 \sim v_n$

$\forall W$: k-lin sp

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) = \{ f : V \to W : k\text{-linear} \}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_k(V,W) \arrow[d] & \ni & f \arrow[d, mapsto] \\ W^n & \ni & (f(v_1), \ldots, f(v_n)) \end{tikzcd}$$

は bij

$$W^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W)$$

$$(w_1', \dots, w_n') \mapsto \varphi : V \longrightarrow W$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i w_i'$$

(あとで $w_1, \dots, w_m$ を Wの基底とする)

$\exists! \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in k^n$

が逆写像になっている //

まず φ が k-linear を示す必要

Ex

$$\mathrm{Hom}_R(R, W) \overset{\text{bij}}{\simeq} W$$

お話（米田の補題）

$$\mathrm{Nat}(H^A, X) \underset{\text{bij}}{\simeq} X(A)$$

この2つは"全く"同じ

$\boxed{\text{ベーシック圏論の4章}}$

W: 基底 $w_1 \sim w_m$ をもつ

系 $\mathrm{Hom}_k(V, W) \to M_{m,n}(k)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(V,W) & & \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ f & \longmapsto & (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \end{array}$$

s.t. $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

$\cancel{a_{ji}}$

prop

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$

$v_1 \sim v_l$　$w_1 \sim w_n$　$u_1 \sim u_m$ ：基底

fの表行 $B \in M_{n,l}(k)$

by $f(v_p) = \sum_{i=1}^{n} b_{ip} w_i$

gの表行 $A \in M_{mn}(k)$ by

$f(w_q) = \sum_{j=1}^{m} a_{jq} u_j$

$(g \circ f)$の表行 $C \in M_{ml}(k)$ by

$$(g\circ f)(v_r) = \sum_{k=1}^{m} c_{kr} u_k$$

主張 $AB = C$

$$\left(g\circ f = (g\circ f) \right)$$

$$\because \quad (g\circ f)(v_r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ir} a_{ji} u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ir} \right)}_{c_{jr}} u_j$$

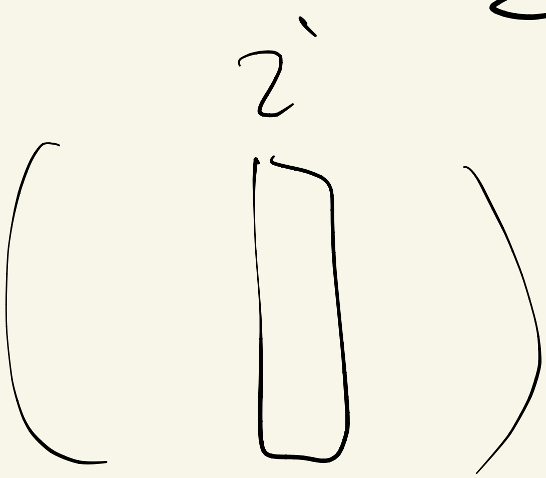
$$\therefore \quad (AB)_{jr} = c_{jr} \quad \therefore \quad AB = C$$

行列積と表現行列

$$F_A(e_i) = Ae_i$$

$= A$のi列目のベクトル

$$= \sum a_{ji} e_j$$



$$k^d \xrightarrow{F_R} k^c \xrightarrow{F_Q} k^b \xrightarrow{F_P} k^a$$

$$(F_P \circ F_Q) \circ F_R = F_P \circ (F_Q \circ F_R)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ F_{PQ} \circ F_R & & F_P \circ F_{QR} \\ \| & & \| \\ F_{(PQ)R} & & F_{P(QR)} \end{array}$$

$$\therefore (PQ)R = P(QR)$$

基底の変換

$P = (p_{ij})_{1 \le i, j \le n}$

$v_1 \sim v_n$ 旧

$v_1' \sim v_n'$ 新 を $v_j' = \sum_i p_{ij} v_i$

~~PはP~~ P は可逆

$v_1' \sim v_n'$

$\downarrow$ Q by

$v_1 \sim v_n$

$$v_k = \sum_j q_{jk} v_j'$$

$$= \sum_{j,i} q_{jk} p_{ij} v_i$$

$$= \sum_i \left(\sum_j p_{ij} q_{jk} \right) v_i$$

$\therefore (PQ)_{ik} = \delta_{ik}$ δ_{ik}

$\therefore PQ = E_n$ $QP = E_n$ も同様

$V \quad v_1 \sim v_n \xrightarrow{P} v_1' \sim v_n' \qquad v_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} v_i$

$W \quad w_1 \sim w_m \xrightarrow{Q} w_1' \sim w_m' \qquad w_j' = \sum_{i=1}^{m} Q_{ij} w_i$

$$f(v_l) = \sum_{q=1}^{m} A_{ql} w_q$$

$$f(v_l') = \sum_{q=1}^{m} B_{ql} w_q'$$

$$\Rightarrow B = Q^{-1} A P$$

$$f(v_l) = \sum_{q,\cancel{j}\,i=1}^{m} B_{ql} Q_{iq} w_i$$

訂正

$$= \sum_{i,q=1}^{m} P_{il} A_{qi} w_q = \sum_{i=1}^{m} (QB)_{il} w_i$$

$$= \sum_{q=1}^{m} (AP)_{ql} w_q$$

$q = 1 \sim m$

$l = 1 \sim n$

$$\therefore (AP)_{ql} = (QB)_{ql}$$

$$\therefore AP = QB$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[loop left, "P"] & W \arrow[loop right, "Q"] \end{tikzcd}$$

$A \downarrow Q^{-1}AP$

② $V=W$

(このとき f が def される)

$P=Q$

$\Rightarrow$ $P^{-1}AP$ をキレイ

→ 対角化

Jordan標準形

① A: given $(m\times n)$

Q: $m\times m$ 可逆

P: $n\times n$ 可逆

をうまくえらんで

$Q^{-1}AP$ をキレイに → ランク標準形