第6回 代数会

訂正

$a = bP \qquad a = aPQ \Rightarrow PQ = 1$

$b = aQ \qquad\qquad\qquad\quad \Uparrow$

整域が必要

部分環のdef

環 → 加群

$\Uparrow$ 　　線形代数

とりあえず
忘れてよい

k：体

$V = \langle v_1 \cdots v_n \rangle$: f.g.

$\cup\!|$

W ① subsp も f.g.

$\cup$

$w_1 \neq 0$ ② $\dim W \leq \dim V$ で

等号成立 $\iff \dim W = \dim V$

$W = \{0\}$ は f.g で $\dim W = 0$

$w_2 \in W \setminus \langle \underset{\neq 0}{\underline{w_1}} \rangle \Rightarrow w_1, w_2$ は lin indep

前回

$V = \langle v_1 \cdots v_n \rangle$

$\cup$

$w_1 \sim w_m$: 線形独立

これを延長してVの基底にできる

もし $W \subsetneq V$ 　だから $v \in V \setminus W$

$W = \langle w_1 \cdots w_l \rangle$

がとれると $w_1 \sim w_l, v$ は

lin indep

$\dim V/W = \dim V - \dim W$

(∵) Wの基底 $w_1 \sim w_s$

を延長して

$w_1 \sim w_s, v_1 \sim v_t$を

Vの基底とすると

$[v_1], \cdots, [v_t]$がV/Wの基底

(∵) $[v_1] \cdots [v_t]$がV/Wを

生成するのは明らか

(∵) $[v] \in V/W$

$\quad \rotatebox{90}{=}$

$\left[\sum c_i w_i + \sum d_j v_j\right]$

$\quad \|$

$\left[\sum d_j v_j\right] = \sum_j d_j [v_j]$

$[v_1] \sim [v_t]$ が lin indep

(∵) $\sum d_j [v_j] = 0$

$\Leftrightarrow \sum d_j v_j \in W$

$\Leftrightarrow \sum_j d_j v_j = \sum {}^{\exists} c_i w_i$

すると

$$\sum_i -c_i w_i + \sum_j d_j v_j = 0$$

$w_1 \sim w_s$, $v_1 \sim v_t$ は

Vの基底だったから

$\forall c_i = 0$, $\forall d_j = 0$

$V \xrightarrow{f} W$

① fが単射 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$

とうごうなる fは同型

準thm

$V/\ker f \cong \mathrm{Im} f$

$$\therefore \dim V = \dim \mathrm{Im} f + \cancel{\dim \ker f}$$
$$\leq \dim W$$

$\mathrm{Im} f \subseteq W$

$\dim V = \dim W$

一方 $\dim V = \dim \mathrm{Im} f$

$\therefore \mathrm{Im} f \subseteq W$ だが

次元が等しい $\therefore \mathrm{Im} f = W$

fは全射

② 全射の場合

$\dim V = \dim \ker f + \dim W$

应用

① A : $n\times n$

$\exists B \quad AB=E_n \Rightarrow BA=E_n$

$\therefore F_B F_A = \mathrm{id}$

$\quad\ \ \|$

$\quad F_{BA} \qquad \therefore BA=E_n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_B"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

F_A : 单射

$\therefore$ 同型

$\exists F_A^{-1} = X$

$(X\circ F_A = F_A\circ X = \mathrm{id})$

$F_{AB}=\mathrm{id}$

$X\circ F_A\circ F_B = X\circ \mathrm{id}$

$\therefore F_B = X$

---

rk
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

fg : 全 $\Rightarrow$ f : 全

单 $\Rightarrow$ g : 单

ランク標準形

A : $m\times n$ 行列

$\exists P$: $m\times m$ 可逆

$\exists Q$: $n\times n$ 可逆

はき出し法の algorithm

$$PAQ = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} v_1 \cdots v_r & v_1' \cdots v_{n-r}' \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_r \\ 延長 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \end{array}$$

表現行列

与 $f(v_i) = w_i$

$v_1 \sim v_r$

$$K^n \xrightarrow{F_A} \operatorname{Im} F_A \subseteq K^m$$

$$\downarrow \qquad\qquad \cong \quad \boxed{w_1 \sim w_r} \to 延長$$

$\circ\ K^n/\ker F_A$ 　 $\ker F_A$: $v_1' \cdots v_{n-r}'$

rの一意性について

もしも $\alpha_1 \cdots \alpha_{r'}$ $\beta_1 \cdots \beta_{n-r'}$

$$P'AQ' = \begin{array}{c} r' \\ \left(\begin{array}{c|c} E_{r'} & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \end{array}$$ とする

すると

$$\ker F_A = \langle \beta_1, \cdots, \beta_{n-r'} \rangle$$

は明らか($\supseteq$ は明らか

$\subseteq$ は以下から

$$\sum c_j \alpha_j + \sum d_j \beta_j \xmapsto{F_A} \sum c_j \gamma_j$$)

$$\dim \ker F_A = n - r' = n - r \quad \therefore r' = r \,//$$

$A : m \times n$

$B : n \times l$

$$r(A)+r(B) \le r(AB) \le \begin{matrix} r(A) \\ r(B) \end{matrix}$$

n

$\mathrm{rank}\, A = \dim(\mathrm{Im}\, F_A)$

は易しい

$$\mathrm{rank}(AB) = \dim \mathrm{Im}(\underbrace{F_{AB}}_{F_A \circ F_B})$$

$F_B : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Im}\, F_{AB} \subseteq \mathrm{Im}\, F_A$

まとめると

$\mathrm{Im}\, F_B$

$A: m\times n$

$B: n\times l$

左I

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{R}^n/\mathrm{Im}F_B \arrow[ddd, dotted, two heads, "\exists"] \\
\mathbb{R}^l \arrow[r, "F_B"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] \arrow[urr, two heads] \arrow[dr, two heads] & \mathbb{R}^m & \\
\mathrm{Im}F_B \arrow[ur, hook, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\psi"] & & \mathrm{Im}F_A \arrow[u, hook, "\alpha"] \arrow[dr, two heads, "\psi"] & \\
\mathrm{Im}F_{AB} \arrow[urr, hook, "\beta'"] & & & \mathrm{Im}F_A/\mathrm{Im}F_{AB}
\end{tikzcd}
$$

∃ [illegible] 全射

$x \in \mathrm{Im}F_B$, $F_A(x)$

$\alpha' = F_A$

$\mathrm{Im}F_{AB} = \mathrm{Im}\,F_A\circ F_B = F_A(\mathrm{Im}F_B) \subseteq F_A(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Im}F_A$

言えたとする

$$\dim \mathbb{R}^n/\mathrm{Im}F_B \geq \dim \mathrm{Im}F_A/\mathrm{Im}F_{AB}$$

$$\therefore\ n - r(B) \geq r(A) - r(AB)$$

写像の存在

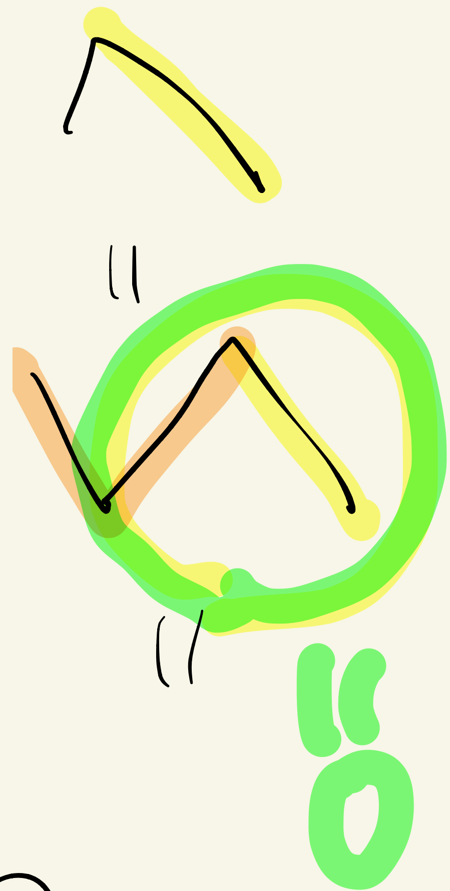
普遍性をcheck

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & V/W \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

$\forall f$: k-linear

$$v \equiv v' \bmod W \Rightarrow f(v) = f(v')$$

step 1



$W \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/W$

は0

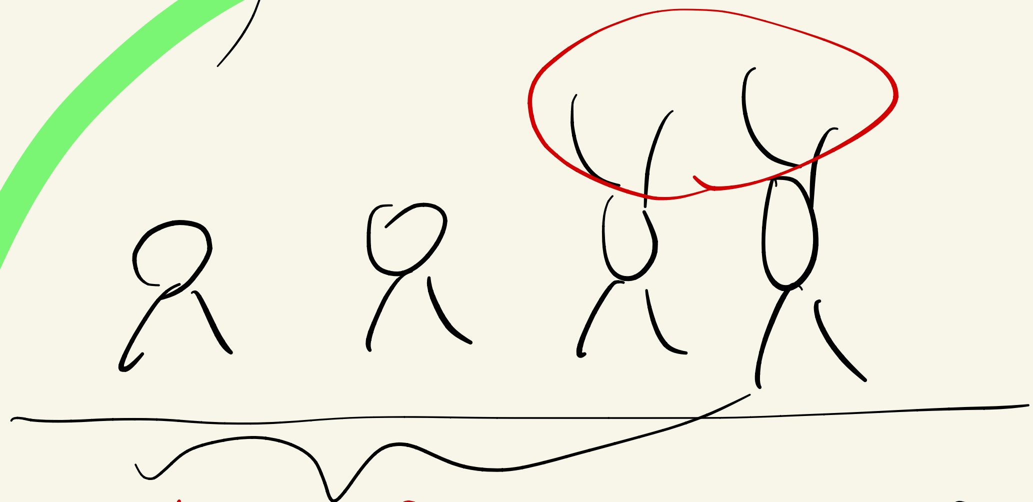
$x \equiv x' \bmod \mathrm{Im}\, F_B \Rightarrow$ ___ が同一?

$\mathrm{Im}\, F_B$ の元が ___ で0にいく?

小学 つるかめ算

つるが 2
かめ 2

かめ
4? = 2



$4 \times 2 = 8$

かめを逆立て

足 12

頭 4

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

大学以降

A

数の集まり

表現

FA

線形 代数

写像

rank A = dim Im FA

3   dim V

$3 \mapsto V$ (categorification)

自由

X: set 2^X 2^{2^X} $2^{2^{2^X}}$

$3 \leq 4$

Yes
No

$V \leftarrow W$

単射

さらに抽象のはしごを上げる

単射はゆつある

ランク標準型

$\boxed{\text{Jordan標準型}}$

ランク標準型の $R = \mathbb{C}[x]$ の場合から出る（単因子論）

直和

$V : k$ 線型 $\supseteq V_1 \sim V_r$: subsp

$$\sum_i V_i = \{\sum_i v_i \mid v_i \in V_i\} \underset{\text{subsp}}{\subseteq} V$$

prop 要素還元 TFAE $V \supset V_1, \cdots, V_r$

① $\sum_{i=1}^{r} V_i$ 直和 ($\bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ と書く)

② $\forall 1 \leq j \leq r \quad \sum_{i \neq j} V_i \cap V_j = \{0\}$

③ 基底をもつなら

V_1のもてイ, ～～, V_rのもろいせい

$\sum_{i=1}^{r} V_i$の基底になる → 表現行列

Ex

$\mathbb{R}^3 \supset V_1 = \{x軸\}$

$V_2 = \{y軸\}$

$V_3 = \{z軸\}$

$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$

$(V_1 + V_2) \cap V_3 = \{0\}$

prop $V_1, V_2 \subseteq V$

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$$

(∵)

$V_1 \cap V_2$ 基底 $u_1 \sim u_r$ ⇝ V_1 $v_1 \sim v_s$ を追加

$V_1 \cap V_2$ 基底 $u_1 \sim u_r$ ⇝ V_2 $w_1 \sim w_t$ を追加

claim $u_1 \sim u_r,\ v_1 \sim v_s,\ w_1 \sim w_t$

は $V_1 + V_2$ の基底

$$\boxed{\underbrace{\sum_i c_i u_i + \sum_j d_j v_j}_{\in V_1}} + \underbrace{\sum_l e_l w_l}_{\in V_2} = 0$$

$$\sum_l e_l w_l \in V_1 \cap V_2$$

$$\|$$

$$\sum_i f_i u_i$$

$$\therefore \sum_i (-f_i) u_i + \sum_l e_l w_l = 0$$

in V_2

$u_1 \sim u_r$, $w_1 \sim w_t$ は

V_2の基底だったので

$\forall f_i = 0$ かつ $\forall e_l = 0$ //

$$\therefore \sum c_i u_i + \sum d_j v_j = 0$$

$u_1 \sim u_r,\ v_1 \sim v_s$ は V_1 の

基底なので

$\forall c_i = 0$ かつ $\forall d_j = 0$

<u>Remark</u>

思ったこと

$$V_1 \hookrightarrow V_1 + V_2 \twoheadrightarrow \frac{V_1+V_2}{V_2}$$

合成 φ

$$\frac{V_1+V_2}{V_2} \ni [v_1+v_2] = [v_1] = [\varphi(v_1)]$$

$v_1 \in V_1$

$v_2 \in V_2$

$\operatorname{Ker}\varphi = V_1 \cap V_2$

φ は全射

準同thm

$$\therefore\ V_1 / V_1 \cap V_2 \xrightarrow{\sim} V_1 + V_2 / V_2$$

Def $f : V \to V$: 自己線形

$W \subset V$ subsp

W が f 不変 $\overset{\text{def}}{\iff} f(W) \subseteq W$

$W_1, \cdots, W_r \subseteq V$: f 不変　V : f.g.

もしも $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} W_i = V$ なら

f の表現行列は

$$
\begin{array}{cccc}
 & W_1\text{のもテル} & & W_r\text{のもテル} \\
\begin{array}{c} W_1 \\ \text{のもテル} \end{array} & \left(\begin{array}{c} f|_{W_1} : W_1 \to W_1 \text{ の} \\ \text{表現行列} \end{array}\right. & \ddots & \\
 & & & \left.\begin{array}{c} f|_{W_r} \text{ の表現行列} \end{array}\right) & \begin{array}{c} W_r \\ \text{のもテル} \end{array}
\end{array}
$$

とできる

直和の3番目より

W_1のキテイ, …, W_rのキテイ

はVのキテイ

Recall $f : P \to Q$

$p_1, \dots, p_r$　$q_1 \sim q_s$ キテイ

$$f(p_j) = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} q_i$$

今は $P = Q$ で $p_1 \sim p_r = q_1 \sim q_s$

としている。

$f(W_i$のキテイ$) \overset{\text{不変性}}{\in} W_i$ だから

$f(\;)$はW_iのキテイで階段になる

$f(x)$: 書き方 自体 西洋

x^f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C & B \arrow[l, "g"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g \circ f"] \end{tikzcd}$$

$$\int f(t)\,dt$$

$(x^f)^g = x^{fg}$

$m \quad \overset{n}{A}\vec{x} = \vec{b} \qquad ax = b$

$*p \qquad p* \qquad p^\wedge$

$\overset{m \times n}{\left(\qquad\right)}$

$m \times n \left(\;\right)$

V : f.g. k上線形空間

$f : V \to V$: 自己が 対角化可能

(i.e. $\exists$ Vのキテイがあって
この基底に関して
表現行列が
対角行列)

$\Leftrightarrow$ $\exists \alpha_1 \sim \exists \alpha_r \in k$: 全部異なる

s.t.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$$

$$W_i = \{ v \in V \mid f(v) = \alpha_i v \}$$

Ex A : $n\times n$ が対角化可能

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists P$: $n\times n$ 可逆

$P^{-1}AP$ が対角行列

$\iff$ $f_A : K^n \to K^n$ がこの講義の
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

意味で対角化可能

今 $f|_{W_1} = \alpha_1 \cdot \mathrm{id}_{W_1}$

$$W_i = \{ v \in V \mid f(v) = \alpha_i v \}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

W_1の基底　　　　　　　　W_rの基底

同じ基底

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} v^{(1)}_1 \cdots v^{(1)}_{N_1} & \cdots & v^{(r)}_1 \cdots v^{(r)}_{N_r} \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_1 \end{matrix} & & \\ \hline
 & & \begin{matrix} \alpha_r & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_r \end{matrix}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$f(v^{(i)}_{\bullet}) = \alpha_i v^{(i)}_{\bullet}$$

となったとする。

$$W_i \supseteq \langle v_1^{(i)}, \dots, v_{N_i}^{(i)} \rangle$$

1次独立

実は

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} W_i = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i \subseteq V}$$

$$\dim \bigoplus W_i = \sum \dim W_i$$

$$\geqq \sum N_i = n$$

同じ次元より $\bigoplus W_i = V$ //

Lemma $\sum_{i=1}^{r} W_i = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$

$$0 = \sum_{i=1}^{r} w_i \Rightarrow \forall i \ w_i = 0$$

v を示す $(w_i \in W_i)$

$$v = w_1 + \cdots + w_r$$

$$f(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r$$

$$f^2(v) = \alpha_1^2 w_1 + \cdots + \alpha_r^2 w_r$$

$$\vdots$$

$$f^{r-1}(v) = \alpha_1^{r-1} w_1 + \cdots + \alpha_r^{r-1} w_r$$

$$\therefore \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ f^{r-1}(v) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \cdots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{\uparrow} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}$$

可逆

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_r \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{r-1} & \cdots & x_r^{r-1} \end{pmatrix} = \pm \prod_{1 \le i < j \le r} (x_i - x_j)$$

差積 $\neq 0$

r! の和

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} v \\ f(v) \\ \vdots \\ f^{r-1}(v) \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore w_i = 0$ //

<u>Ex</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化不可

(これ自体 Jordan 標準形)

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は対角化不可

もしも

$$P^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$$

2乗すると

$$\underbrace{P^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2}_{O}P}_{\substack{\| \\ O}} = \begin{pmatrix}\alpha^2&0\\0&\beta^2\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \alpha = \beta = 0$

すると

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = P\underline{\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}}P^{-1} = O$$ 矛盾

$\boxed{\mathbb{Q}}$

$\mathbb{Q} \setminus 2\mathbb{Q}$ がidealでないこと

$\|$

$\{$奇$\}$

数学で分からない場合

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ のideal?

「それはどの集合の元?」

ideal

$R \supseteq I$ Rの部分集合の部分集合

$$R/I = \{ C_a \mid a \in R \}$$

$\subseteq$

R

$e \overset{?}{=} \pi$ $\sin \overset{?}{=} \pi$