第7回 代数系

加群 Jordan標準形

$\boxed{\text{Q\&A}}$ 矢印

$\hookrightarrow$ 単射

$\twoheadrightarrow$ 全射

$\xrightarrow{\sim}$ isom

$\rightsquigarrow$ 何の意味もない

$\dashrightarrow$ "存在" して

$\rightarrowtail$

$$J(\alpha;n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

$n \times n$ 行列

$\alpha \in K$

Thm $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$P^{-1}AP = \bigoplus_{i=1}^{t} J(\beta_i, n_i)$$

$$= \begin{array}{ccc} & n_1 & \\ n_1 & \begin{pmatrix} \begin{matrix} \beta_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \beta_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} \beta_t & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \beta_t \end{matrix} \end{pmatrix} & \Big\} n_t \end{array}$$

Jordan標準形

ある意味での一意性

Ex

$$J(\alpha;1)\oplus J(\beta;1)$$

$n=2$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 0 \\ 0 & \boxed{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 0 \\ 0 & \boxed{\beta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq \beta$

$$J(\alpha;1)\oplus J(\alpha;1) = J(\alpha;1)^{\oplus 2} \qquad J(\alpha;2)$$

$n=3$

$(\lambda-\alpha)^3$ $\qquad (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta) \qquad (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & & \\ & \boxed{\alpha} & \\ & & \boxed{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{matrix}} & \\ & \boxed{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ \hline & & \beta \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

$(\lambda-\alpha)^3 \qquad (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta) \qquad (\lambda-\alpha)^3$

JNFは制約がきつい

存在するは重要なthm

形を容易に特定できる

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

JNF?

$$\varphi_A = \det(\lambda E_3 - A) = (\lambda - 2)^3$$

これから

AのJNFは $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$

のどれかと分かる

proof $B = P^{-1}AP$

$\leadsto \varphi_B(\lambda) = \varphi_A(\lambda)$

さらに特定するために $A\vec{x} = 2\vec{x}$ を解く

$\Leftrightarrow (A - 2E_3)\vec{x} = \vec{0}$

<u>Recall</u> $\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$ を解くには

$(A|\vec{b}) \xrightarrow[\text{はきだし法}]{\text{行基本変形}} (\text{階段行列})$

拡大係数行列

と解の自由度は 1

i.e. $\dim_{\mathbb{C}}\{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \mid A\vec{x} = 2\vec{x}\} = 1$

prop $B = P^{-1}AP$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\vec{x} = \alpha\vec{x}\} & \ni & \vec{x} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid B\vec{x} = \alpha\vec{x}\} & & P^{-1}\vec{x} \end{array}$$

は一線形同形

Ex $A\vec{x} = \alpha\vec{x}$

$$B(\underline{P^{-1}\vec{x}}) = (P^{-1}AP)(P^{-1}\vec{x})$$
$$= P^{-1}A\vec{x} = \alpha\,\underline{P^{-1}\vec{x}}$$

このことから $\mathrm{JNF}(A) = J(2;3)$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

だと分かる。

i.e. $\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

$${}_nC_2$$

?

A^n は $P^{-1}A^nP = J^n$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \binom{n}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

nの分割　　　分割数

$n=5$ 　　　　$p(5)=7$

$=4+1$

$=3+2$

$=3+1+1$

$=2+2+1$

$=2+1+1+1$

$=1+1+1+1+1$

$P^{-1}AP$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

$J(\alpha;4)$ 　　　$\overset{\shortparallel}{J(\alpha;3)\oplus J(\alpha;1)}$

$p(4) = 5$

$\forall n \geq 0 \quad p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$

$$\sum_{n \geq 0} p(5n+4) q^5 = 5 \prod_{n \geq 1} \frac{(1-q^{5n})^5}{(1-q^n)^6}$$

$r(A) = \dim \operatorname{Im} F_A$

$\leq$

$\twoheadleftarrow$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+q^3\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$q = e^{-2\pi}$$

$\Uparrow$

nの分割で

#①となり合た数の差が2以上

$\|$

#②使う数が$\equiv 1, 4 \pmod 5$

1/9?
社会人向け 新春講義

ラマヌジャンと宇宙

さっきの主張は

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

とも同じ

Rogers–Ramanujan 恒等式

Vandermonde

JNFの存在証明

アウトライン

① 広義固有空間

$f: V \to V$ が対角化可能

$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$

固有空間

$W_i = \{ v \in V \mid \underline{fv = \alpha_i v} \}$

$\alpha_1 \sim \alpha_s \in k$ に全部異なる

$\Updownarrow$

② PID上の加群

$(f \cdot id_V - \alpha) v = 0$ を

$\exists N \quad (f \cdot id_V - \alpha)^N v = 0$ に

かえる

最小多項式

$$\boxed{\begin{aligned}&\underline{\text{Def}}\quad A \in M_n(\mathbb{C})\\&I = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O \}\\&\quad \subseteq \mathbb{C}[x] \text{ の ideal} \quad \text{check!}\end{aligned}}$$

ここで $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

$$f(A) = a_0 A^n + \cdots + a_{n-1}A + a_n E_n$$

$$A^0 = E_n$$

$I = (\Phi_A(x)) \leftarrow$ 最小多項式

$I \neq \{0\}$

$\left(A = O_n \text{ のとき } I = (x) \right)$

$f(x) = 1$ だと $f(A) = E_n \neq O_n$

$(\text{in } K,\ 0_K \neq 1_K)$

$$\underbrace{E_n, A, \dots, A^{n^2}}_{n^2+1 \text{ 個}} \text{ "in } K^{n^2}\text{"}$$

$n \times n$

n^2 個の数

$$\sum_{i=0}^{n^2} c_i A^i = O_n$$

$$\Rightarrow \exists (c_0, \dots, c_{n^2}) \in K^{n^2}$$

ケーリー・ハミルトンの定理

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$$

n次式

$$\varphi_A(A) = O_n$$

ウソのproof

$$\varphi_A(A) = \det(AE_n - A)$$
$$= \det O_n = 0$$

//

$$I = (\Phi_1(x)) = (\Phi_2(x))$$

non-zero スカラー倍を除いて1つ

$\Phi_1 \sim \Phi_2$ 同伴 in $k[x]$

整域

(TFAE)

可換Rで $\sim$

$R^\times$の元を除いて等しい

の積

$$(k[x])^\times = k^\times = k \setminus \{0\}$$

Lemma k：体，$A \in M_n(k)$

$\Phi_A(x) = \varphi_1(x) \cdots \varphi_s(x)$

"互いに素"

$W_i = \mathrm{Ker}(F_{\varphi_i(A)}) = \{ v \in k^n \mid \varphi_i(A)v = \vec{0} \}$

$\cancel{\mathrm{Ker}\,\underbrace{\varphi_i(A)}_{\text{行列}}}$ ならば $k^n = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$

イメージ $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3$

$\psi_1 = \frac{n}{2^3} = 3^2 5^2$

$\psi_2 = n/3^2 = 2^3 5^2$

$\psi_3 = n/5^2 = 2^3 3^2$

Q. $\exists a \exists b \exists c \quad a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi_3 = 1$

$I + J = R$

Recall $\mathbb{Z}[x] \quad \mathbb{Q}[x]$

$(2),(x) \quad \cancel{(2),(x)}$

最大公約数！

$A_i = g_i(A)\psi_i(A) \in M_n(K)$

示したいのは

$W_i = \mathrm{Ker}(F_{\varphi_i(A)}) = \mathrm{Im}(F_{A_i})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \{A_i v \mid v \in K^n\}$

φ

ほじょ的に

① $\forall v \in K^n \quad v = \sum_{i=1}^{s} A_i v$

② $\sum_{i=1}^{s} A_i = E_n, \quad A_i A_j = \delta_{ij} A_i$

③

∵ ② は明らか

②より $v = E_n v = \sum A_i v$ ①

$i \neq j$ $\quad \underbrace{A_i}\, A_j = O$

$$g_i(x)\psi_i(x)\, g_j(x)\psi_j(x)\Big|_{x=A}$$

$\Phi_A \mid \psi_i \psi_j$ $\qquad \psi_i = \dfrac{\Phi_A}{\varphi_i}$

$\psi_j = \varphi_i$ をふんでいる

$= \Phi_A / \varphi_j$

③ $W_i = \mathrm{Im}\, F_{A_i}$

$\boxed{2}$: $\varphi_i(A) g_i(A) \psi_i(A) v = 0$

$\Phi_A(x)$ $\quad$ ∴ $g_i(A)\psi_A(A) v \in W_i$

$$w \in W_i$$

$$\parallel$$

$$E_i w$$

$$\parallel$$

$$\left(\sum_i A_i\right) w = A_i w \in \mathrm{Im} F_{A_i}$$

$i \neq j$ なら $A_j = \psi_j(x) g_j(x) \Big|_{x=A}$

に $w = g_i(A)\psi_i(A) w'$ の形の元を入れると

かけると $\Phi_A(x)$ をふくんでいて消える

$k^n = \bigoplus_i W_i$ を示したい

①より $k^n = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Im} F_{A_i}$

$\supseteq$：明らか

$\subseteq$：$^\forall v \in k^n$ $v = \sum_i \underbrace{A_i v}_{\in \operatorname{Im} F_{A_i}}$

$\sum$ が $\bigoplus$ を言う

⊙ $v = \sum v_i$ $v_i \in \operatorname{Im} F_{A_i}$

$A_i v = A_i \sum_j \underbrace{v_j}_{A_j v_j'} = A_i^2 v_i' = A_i v_i' = v_i$ //

$A \in M_n(k)$

$\Phi_A = \varphi_1 \cdots \varphi_s$ 互いに素

$$k^n = \bigoplus_{i=1}^{s} \underline{\mathrm{Ker}(F_{\varphi_i(A)})}$$ 不変空間への直和分解

$$\rotatebox{90}{=} $$

$$\underline{\{v \in k^n \mid \varphi_i(A)v = 0\}}$$

は A 不変 (F_A 不変)

∵ $\varphi_i(A)v = 0$

$\Rightarrow \varphi_i(A)Av = 0$ を言えばよいが…

$\varphi_i(A)$ と A は可換 //

Ex $A^2 + E_n$, $A^3 + 2A$ は可換

このとき新しい基底での表現行列は

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

さらに $\varphi_i(A_i) = O$

問 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする。

$\Phi_A = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_s)^{m_s}$

α_i : 互いに異なる　$m_i \geqq 1$

系 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$$

各 i $(A_i - \alpha_i E_{l_i})^{m_i} = O$

$l_i = A_i$ のサイズ

以下 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が $A^m = O$ のとき

を考えればよい ($\alpha_i = 0$ の場合) ↑

冪零行列

以下

$f: V \to V$ $\exists m \geq 1$ $f^m = 0$

V: f.g. $f^{m-1} \neq 0$ とするとよい

のうまい基底を探す，という問題に変える

<u>LemB</u> $g: W_1 \hookrightarrow W_2$: 単射

$w_1, \dots, w_\ell \in W_1$: 線形独立

$\Rightarrow g(w_1), \dots, g(w_\ell) \in W_2$: 〃

(:) 容易

Lem A $W_i = \mathrm{Ker}\, f^i$ $i=0, \cdots, m$

(注 $f^0 = \mathrm{id}$, $f^m = 0$) とすると

$V = W_m \supsetneq W_{m-1} \supsetneq \cdots \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}$

$\supsetneq$ が non-trivial $W_i \supsetneq W_{i-1}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lem C Lem A の続き} \quad (i=2 \sim m) \\ W_i = U_i \oplus W_{i-1} \text{ と } U_i \text{ をとると} \\ f|_{U_i} \text{ は単射 かつ } f(U_i) \cap W_{i-2} = \{0\}\end{array}}$

($\because$) $u \in U_i$ $f(u) \in W_{i-2} \Rightarrow f^{i-1}(u) = 0$

$u \in W_{i-1} \cap U_i = \{0\}$ 又, $f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$

も言った よって $f|_U$ は単射 //

$f: V \to V \quad f^m = 0$

$\qquad\qquad\quad f^{m-1} \neq 0$

いい基底をとって表現行列をキレイに

$m=3$で理解

$$\boxed{V = W_3 \supsetneq W_2 \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = \{0\}}$$

$W_3 = U_3 \oplus W_2$ となる U_3の基底

$v_1 \sim v_r$をとる

Lem B より $f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W_2$ は線独

Lem C より $f(U_3) \cap W_1 = \{0\}$

よって $W_2 = U_2 \oplus W_1$

の U_2の基底を延ばして作る

W_3 U_3 U_2 W_2

$v_1 \cdots v_{r_1}$		
$f(v_1) \cdots f(v_{r_1})$	$v_{r_1+1} \cdots v_{r_2}$	
$f^2(v_1) \cdots f^2(v_{r_1})$	$f(v_{r_1+1}) \cdots f(v_{r_2})$	$v_{r_2+1} \cdots v_{r_3}$

同様に

$$\overset{\cup W_2}{U_2 = \langle f(v_1), \ldots, f(v_{r_1}), v_{r_1+1}, \ldots, v_{r_2} \rangle}$$

$f|_{U_2}$ 単射　$f(U_2) \cap W_0 = \{0\}$

$f^2(v_1), \ldots, f^2(v_{r_1}), f(v_{r_1+1}), \ldots, f(v_{r_2})$

$\in W_1$ は線独で

これを延長して W_1 の基底にできる

延長分 $v_{r_2+1} \sim v_{r_3}$ とする

・$1 \leq i \leq r_1$ について

$V_i^{(3)} = \langle f^2(v_i), f(v_i), v_i \rangle$ は

f-不変（∵ $f^3(v_i) = 0 \in V_i$）

$$a v_i + b f(v_i) + c f^2(v_i)$$
$$\overset{f}{\longmapsto} a f(v_i) + b f^2(v_i)$$

この基底に関する表現行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f^2(v_i) & f(v_i) & v_i \end{array} \\ \begin{array}{c} f^2(v_i) \\ f(v_i) \\ v_i \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = J(0;3)$$

• $r_1 < i \leq r_2$ では

$V_i^{(2)} = \langle f(v_i), v_i \rangle$ は

f 不変

表現行列は

$$\begin{array}{c|cc} & f(v_i) & v_i \\ \hline f(v_i) & 0 & 1 \\ v_i & 0 & 0 \end{array}$$

$$\cong J(0;2)$$

• $r_2 < i \leq r_3$ では

$V_i^{(1)} = \langle v_i \rangle$ とすると　$f v_i = 0$ で f 不変

表現行列は (0)

つまり

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r_1} V_i^{(3)} \oplus \bigoplus_{i=r_1+1}^{r_2} V_i^{(2)} \oplus \bigoplus_{i=r_2+1}^{r_3} V_i^{(1)}$$

この基底に関する表現行列

$$J(0;3)^{\oplus r_1} \oplus J(0;2)^{\oplus (r_2-r_1)} \oplus J(0,1)^{\oplus (r_3-r_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}^{\oplus r_1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus (r_2-r_1)} \oplus \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}^{\oplus (r_3-r_2)}$$

今は $\underline{A^m = O_n}$ を調べた

一般は $(A-\alpha E_n)^m = O_n$

JNFの存在

今 $B^m = O_n$

$\Rightarrow \exists P \quad P^{-1}BP = \bigoplus_i J(0; n_i)$

$$(\underbrace{A-\alpha E_n}_{B})^m = O$$

$\exists P \quad P^{-1}\underbrace{B}_{(A-\alpha E_n)}P = \bigoplus_i J(0; n_i)$

$P^{-1}AP = \alpha E_n \oplus \bigoplus_i J(0; n_i) = \bigoplus_i J(\alpha; n_i)$

73 加算

JNF 証明は理解できたら Lucky

今日 線形代数 と $\mathbb{C}[x]$ が PID

本当は一意性

$\mathbb{R}[x]$ 実 Jordan

加群 3回は終わり 環

線形代数

1/7 群