# 正の有理レベルにおけるFock加群の構造について

中野弘夢　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)

## 1. 概要

$p_+, p_-$ を互いに素な2以上の正の有理数とする. 中心荷電が $c_{p_+,p_-} = 13 - 6\frac{(p_+-p_-)^2}{p_+p_-}$ の Virasoro 代数の表現論に対して [1] による研究がある. そこでは正の有理レベルの Fock 加群が適当なアーベル圏の中で有限の長さの Socle 列を持つことが示されている. このFock 加群の構造定理は一般化された Jantzen Filtration とそれに付随する Character sum を用いることで証明される [2]. 本講演では正の有理レベルの Fock 加群の構造定理が Jantzen Filtration を用いずに証明できることを紹介する. 証明では [3] による不定元 $\epsilon$ による $\epsilon$ 変形の手法を基本的に用いる. 基礎環 $\mathbb{C}$ を modular 系 $(\mathcal{K} = \mathbb{C}((\epsilon)), \mathcal{O} = \mathbb{C}[[\epsilon]])$ に持ち上げて, 種々の積分に対して $\mathcal{O}$ 整値性を示すことによって複雑な $\mathbb{C}$ 上の理論を比較的単純な $\mathcal{K}, \mathcal{O}$ 上の理論へ持ち上げることができる. 他には Virasoro の特異ベクトルの自由場表示から得られる情報が重要になる. 一般的な条件下で Virasoro 代数の特異ベクトルを Fock 空間で自由場表示するとき比例定数を除いて Jack 多項式で表現できることが知られている. 白石氏はこの比例定数を明示的に与えた [4]. この比例定数を白石定数と呼ぶことにする.

## 2. $\mathcal{K}\mathcal{O}$ 理論と白石定数

以下 $\mathcal{K}, \mathcal{O}$ 上の Fock 加群, Verma 加群を定義し白石定数との関連を述べる.

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{2p_-}{p_+}},\ \alpha_- = -\sqrt{\frac{2p_+}{p_-}},\ \beta_{a,b} = \frac{1-a}{2}\alpha_+ + \frac{1-b}{2}\alpha_-\ (a, b \in \mathbb{Z})$$

とおく. $c_{p_+,p_-} = 1 - 3(\alpha_+ + \alpha_-)^2$ である. 交換関係 $[b_m, b_n] = m\delta_{m+n,0}\mathrm{id}$ で定義される無限次元 Heisenberg 代数から定まる普遍包絡環を $U(\mathfrak{b})$ とおくと $b_0$ 最高ウェイトを $\beta_{a,b}$ とする Fock 加群 $F_{a,b} = U(\mathfrak{b})\,|\beta_{a,b}\rangle$ が定義される. この Fock 加群の構造は複雑であり, そのままでは解析が難しいため Tsuchiya-Wood による $\epsilon$ 変形の手法を用いて解析する. $\alpha_+(\epsilon) = \alpha_+ + \alpha_+^{(1)}\cdot\epsilon + \alpha_+^{(2)}\cdot\epsilon^2 + \cdots \ \in \mathcal{O}$ を $\alpha_+^{(1)} \neq 0$ となるように固定し, $\alpha_-(\epsilon) = -2\cdot\alpha_+(\epsilon)^{-1} = \alpha_- + \alpha_-^{(1)}\cdot\epsilon + \alpha_-^{(2)}\cdot\epsilon^2 + \cdots \ \in \mathcal{O}$ とおく. $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\beta_{a,b}(\epsilon) = \frac{1-a}{2}\alpha_+(\epsilon) + \frac{1-b}{2}\alpha_-(\epsilon),\quad h_{a,b}(\epsilon) = \frac{a^2-1}{8}\alpha_+(\epsilon)^2 + \frac{b^2-1}{8}\alpha_-(\epsilon)^2 - \frac{ab-1}{2}$$

とおく. $\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}, \mathcal{O}$ のいずれかとする. 交換関係 $[b_m, b_n] = m\delta_{m+n,0}\mathrm{id}$ で定義される $\mathcal{R}$ 係数の Heisenberg 代数から定まる普遍包絡環を ${}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b})$ とおき, 中心荷電 $c_{p_+,p_-}(\epsilon) = 1 - 3(\alpha_+(\epsilon) + \alpha_-(\epsilon))^2$ の Virasoro 代数から定まる $\mathcal{R}$ 係数の普遍包絡環を ${}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})$ とおく. この時 $\mathcal{R}$ 係数の Fock 加群 ${}_{\mathcal{R}}F_{a,b} = {}_{\mathcal{R}}U(\mathfrak{b})\,|\beta_{a,b}(\epsilon)\rangle$, $\mathcal{R}$ 係数の Verma 加群 ${}_{\mathcal{R}}M_{a,b} = {}_{\mathcal{R}}U(\mathcal{L})\,|h_{a,b}(\epsilon)\rangle$ が定義できる.

以下 $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とし $r^\vee = p_+ - r, s^\vee = p_- - s$ とおく. Fock 加群 $F_{r,s}$ はレベル $(r^\vee + np_+)(s^\vee + np_-)$ $(n \geq 0)$ に特異ベクトルを持ち

$$\rho_{-\alpha_-}(J_{\lambda_{r^\vee+np_+,s^\vee+np_-}}(x, \kappa_-))\,|\beta_{r,s}\rangle = (b_{-1}^{(r^\vee+np_+)(s^\vee+np_-)} + \cdots)\,|\beta_{r,s}\rangle\,,\ \kappa_- = \frac{\alpha_-^2}{2}$$

というパラメータ $\kappa_-$ に関する長方形ヤング図 $\lambda_{r^\vee+np_+,s^\vee+np_-}=((s^\vee+np_-)^{r^\vee+np_+})$ の Jack 多項式表示を持つ [3]. ただし $\rho_{-\alpha_-}$ は同一視 $\rho_{-\alpha_-}(p_m(x))=-\alpha_- b_{-m}$ とする. $n\geq 1$ の時はこの特異ベクトル達は Virasoro 代数表示を持たないが $F_{r,s}$ を適当な $\mathcal{K}$ 上の Fock 加群に持ち上げて考えると ${}_{\mathcal{K}}U(\mathcal{L})$ 表示を持つことが Virasoro 代数の一般論から分かる. すなわち $F_{r,s}$ の $\mathcal{K}$ への持ち上げである ${}_{\mathcal{K}}F_{-r^\vee-np_+,-s^\vee-np_-}$ は左 ${}_{\mathcal{K}}U(\mathcal{L})$ 加群として ${}_{\mathcal{K}}M_{r^\vee+np_+,s^\vee+np_-}$ と同型であり, レベル $(r^\vee+np_+)(s^\vee+np_-)$ に唯一つの特異ベクトルを持つ. 特異ベクトルの自由場表示と ${}_{\mathcal{K}}U(\mathcal{L})$ 表示の間に比例関係が成り立ち, 比例定数 $c_{r^\vee,s^\vee;n}(\epsilon)\in\mathcal{K}$ を $\mathcal{K}$ 定数として次の式で表される.

$$
\begin{aligned}
&(L_{-1}^{(r^\vee+np_+)(s^\vee+np_-)}+\cdots)\,|\beta_{-r^\vee-np_+,-s^\vee-np_-}(\epsilon)\rangle\\
&=c_{r^\vee,s^\vee;n}(\epsilon)\rho_{-\alpha_-(\epsilon)}(J_{\lambda_{r^\vee+np_+,s^\vee+np_-}}(x,\kappa_-(\epsilon)))\,|\beta_{-r^\vee-np_+,-s^\vee-np_-}(\epsilon)\rangle\ .
\end{aligned}
$$

Virasoro 代数の一般論から左辺の Virasoro 代数表示は ${}_{\mathcal{O}}U(\mathcal{L})$ の元で表示されることに注意する. 右辺は $\kappa_-(\epsilon)=\alpha_-(\epsilon)^2/2$ パラメータの長方形ヤング図 $\lambda_{r^\vee+np_+,s^\vee+np_-}$ の Jack 多項式表示であり,

$$
\begin{aligned}
&\rho_{-\alpha_-(\epsilon)}(J_{\lambda_{r^\vee+np_+,s^\vee+np_-}}(x,\kappa_-(\epsilon)))\,|\beta_{-r^\vee-np_+,-s^\vee-np_-}(\epsilon)\rangle\\
&\qquad\in {}_{\mathcal{O}}F_{-r^\vee-np_+,-s^\vee-np_-}\setminus\epsilon\ {}_{\mathcal{O}}F_{-r^\vee-np_+,-s^\vee-np_-}
\end{aligned}
$$

が成り立つ [3]. この $\mathcal{K}$ 定数 $c_{r^\vee,s^\vee;n}(\epsilon)$ に関して次の定理が成り立つ [4].

**定理** (白石定数)

$$
c_{r^\vee,s^\vee;n}(\epsilon)=\prod_{i=1}^{r^\vee+np_+}\prod_{j=1}^{s^\vee+np_-}(i\kappa_+(\epsilon)-j),\quad \kappa_+(\epsilon)=\frac{\alpha_+(\epsilon)^2}{2}\ .
$$

上の定理は $F_{r,s}$ の持ち上げに関するものであるが, 他の Fock 加群に対しても同様な定理が成り立つ. この定理より $c_{r^\vee,s^\vee;n}(\epsilon)\in\mathcal{O}\backslash\{0\}$ であり $c_{r^\vee,s^\vee;n}(\epsilon)$ は $\epsilon^n$ でちょうど割り切れることが分かる. 白石定数を中心に Tuschiya-Wood の理論を用いることで持ち上げた $\mathcal{O}$ 上の Fock 加群に対して $\epsilon$ に関するフィルトレーションの構造を導入することができる.

## 参考文献


[1] B.L.Feigin and D.B.Fuchs, *Representations of the Virasoro algebra*, Adv. Stud. Contemp. Math. 7, 465-554, Gordon and Breach Science Publ. New York, 1990.

[2] K.Iohara and Y.Koga, *Representation Theory of the Virasoro algebra.* Springer, 2010.

[3] A. Tsuchiya, S. Wood, *On the extended W-algebra of type $sl_2$ at positive rational level*, International Mathematics Research Notices, Volume 2015, Issue 14, 1 January 2015, Pages 5357-5435, (1993).

[4] 白石潤一. 量子可積分系入門, サイエンス社, (2003).