第1回 代数学特論

$\boxed{\text{整数の分割}}$

木：オンデマンド
月：ライブ配信

去年：ベーシック圏論

今日：イントロ

$$n=5=4+1=3+2=3+1+1$$
$$=2+2+1$$
$$=2+1+1+1$$
$$=1+1+1+1+1$$

7通り

$\boxed{\text{5の分割}}$

primitive

$\boxed{1/9,10}$ ラマヌジャンと宇宙

これは数学セミナーの記事

Rogers-Ramanujan分割定理

今日はEuler分割定理

前半 のいくつかの証明

表現論

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ 黄金比

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cdots}}}$$ $q = e^{-2\pi}$

ラマヌジャン

映画「奇蹟がくれた数式」
(The man who knew infinity)

想像力

ヒルベルト　アインシュタイン

Rogers-Ramanujan恒等式

∞和＝∞積

$$\frac{1}{(1-q^{\overset{2}{1}})(1-q^{\overset{3}{4}})(1-q^{\overset{7}{6}})(1-q^{\overset{8}{9}})\cdots}$$

$\boxed{c=0}$

$c=1$

$$=1+\frac{q^{1+1}}{1-q}+\frac{q^{4+2}}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^{9+3}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

連分数 $\Longleftarrow$ ∞和 = ∞積

1894 Rogers (PLMSにのっている)

$\boxed{\text{Ramanujan's most beautiful identity}}$

5の分割は7コある

4の分割は5つある

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1$$
$$= 1+1+1+1$$

$5n+4$の分割は5の倍数コある

② 保型形式

Euler 分割定理

Def

$$\mathrm{Par} := \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \mid \underbrace{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1}_{\text{整数}} \}$$

記法

① λ_i : パート

② $\ell = \ell(\lambda)$: 長さ

③ $i \geq 1$, $m_i = \# \{ j \mid \lambda_j = i \}$

: iの 重複度

④ $|\lambda| = \sum \lambda_i$: サイズ

$$\left(= \sum_{j \geq 1} j \cdot m_j(\lambda) \right)$$

$\underline{\text{Ex}}$ $\lambda = (4,2,2,2,1)$

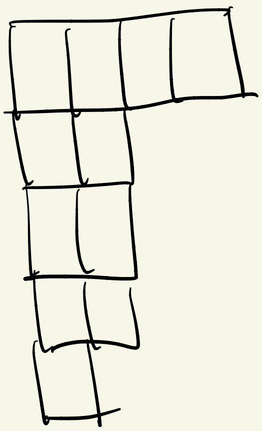
$\ell(\lambda)=5$

$|\lambda| = 11$

モンスター群

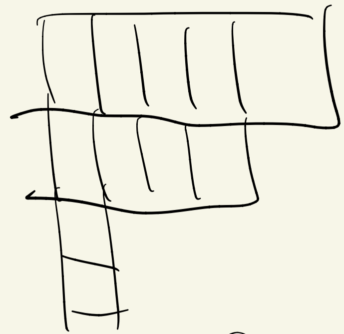
$m_3(\lambda)=0$

$m_2(\lambda)=3$



Young図形

$\xrightarrow{\text{ある}}$



$|\lambda'|=11$

$\ell(\lambda')=4$

$\lambda' = (5,4,1,1)$

対称群の表現論

$$\mathfrak{S}_n := \mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(\{1,\dots,n\}) \xrightarrow{\text{群準同型}} GL(k^{\cancel{n}\,m})$$

k:体

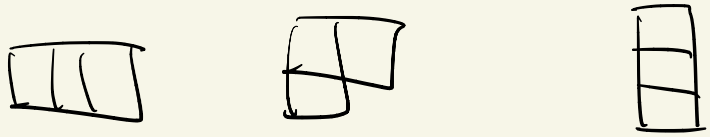
T. Tao Saturation conj

G. Williamson

成績はレポートで

記法 $Par(n) = \{\lambda \in Par \mid |\lambda| = n\}$

e.g.



$Par(3) = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$

$3 \qquad 2+1 \qquad 1+1+1$

Def

$Odd := \{\lambda \in Par \mid \forall i, \lambda_i \equiv 1 \mod 2\}$

$\Updownarrow$

$\forall j \geq 1, m_{2j}(\lambda) = 0$

$\cap$

Par

$\cup$

$Strict := \{\lambda \in Par \mid \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_\ell\}$

e.g.

$$Par(6) = \left\{ \begin{array}{l} (6), (51) (42) (411) (33) \\ (321) (222) (221^2) (21^4) (1^6) \\ (31^3) \end{array} \right\}$$

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathrm{Par}$

$$\mathcal{C} \overset{PT}{\sim} \mathcal{D} \overset{\text{def}}{\iff} \forall_{n\geq 0}\ |\mathcal{C}\cap \mathrm{Par}(n)| = |\mathcal{D}\cap \mathrm{Par}(n)|$$

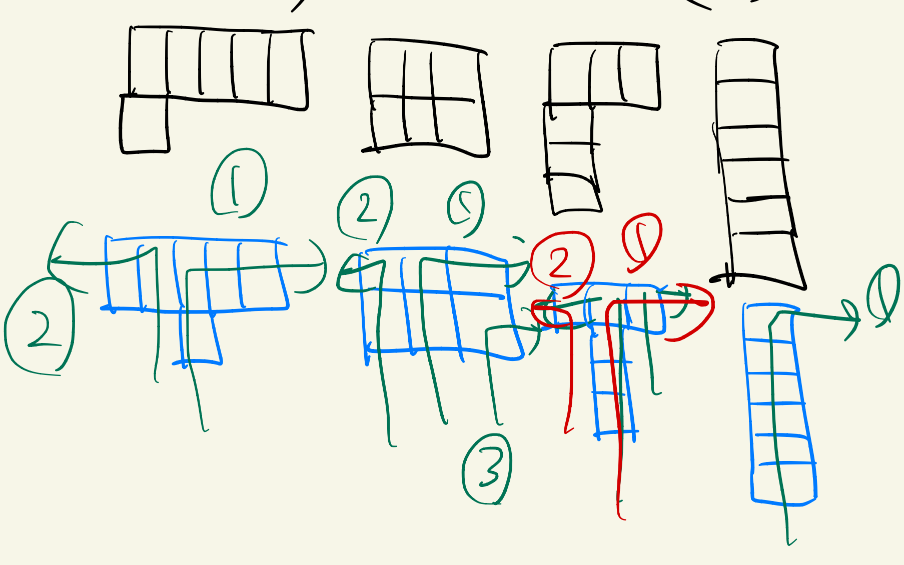
partition-theoretic equivalence

(分割論的に同値)

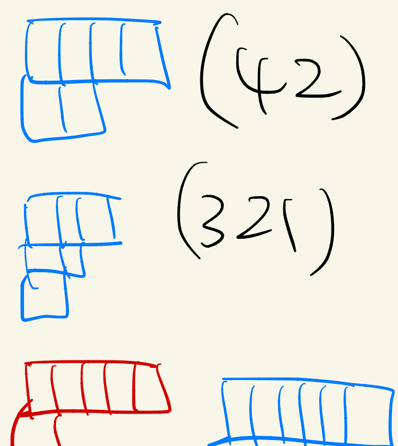
Thm (Euler) $\mathrm{Strict} \overset{PT}{\sim} \mathrm{Odd}$

全単射 $\mathrm{Odd}(6) \xrightarrow[\text{Sylvester}]{\text{bij } \varphi} \mathrm{Strict}(6)$

(51) (33) (31^3) (1^6)



順に



(42) (321) (51) (6)

もっと一般性のある答えが欲しい！

(Kanade-Russell 予想) 未解決

$\vee$ 体は ら

Rogers-Ramanujan PT

$\vee$

Euler PT

---

q-series :⟺ $\mathbb{C}[[q]]$ の元

$q^{\downarrow}$ ~~&~~ 形式的巾級数環

$1+2q$

$1+q+q^2+3q^3+5q^4+\dots$

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Par}$

(ω) $f_{\mathcal{C}}(q) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{C} \cap \mathrm{Par}(n)| q^n$

$= \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|}$

<u>Ex</u>

$$f_{Odd}(q) := \boxed{1}q^0 + \boxed{1}q^1 + \boxed{1}q^2 + \boxed{2}q^3 + \cdots$$

$$f_{Strict}(q) := \boxed{1}q^0 + \boxed{1}q^1 + \boxed{1}q^2 + \boxed{2}q^3 + \cdots$$

Defより $Odd \overset{PT}{\sim} Strict \overset{iff}{\iff} f_{Odd} = f_{Strict}$

in $\mathbb{C}[[q]]$

<u>Rk</u> $e \overset{PT}{\sim} \Delta \overset{iff}{\iff} f_e = f_\Delta$ "

$\cap \qquad \supset$

Par

$\forall n$ 全部考えると

<u>母関数</u> 構造をもっている

<u>e.g.</u> $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3 \subseteq \cdots$

Claim

$$f_{\mathrm{strict}} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)$$

in $\mathbb{C}[[q]]$

eg.

$q^5 \longleftrightarrow (5)$

$q \cdot q^4 \longleftrightarrow (4,1)$

$q^2 q^3 \longleftrightarrow (3,2)$

構造をもっていて

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathrm{Strict}$

$\cdots (1+q^{\lambda_\ell}) \cdots (1+q^{\lambda_1})$ 〜〜 が $q^{|\lambda|}$ に

寄与する

Claim

$$f_{odd} = \begin{aligned}&(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)\\ &(1+q^3+q^6+q^9+\cdots)\\ &(1+q^5+q^{10}+q^{15}+\cdots)\\ &\vdots\end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{C}[[q]]$$

$q^5 \leftrightarrow (1^5)$

$q^2q^3 \leftrightarrow (3\,1^2) \quad \in \mathrm{Odd}(5)$

$q^5 \leftrightarrow (5)$

まとめ $(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots =$

に帰着された

q^{100} $(1+q^{100})$

$(1+q^{99}+q^{198}+\cdots)$

Thm $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots$ in $\mathbb{C}[[q]]$

Remark A : 環 $\ni a$

$ba = 1 = ab$ となる b を a^{-1} とか $\frac{1}{a}$ と書く

(∵) $(1-q)(1+q+q^2+\cdots) = 1$ in $\mathbb{C}[[q]]$

---

proof of Euler PT

$\boxed{\text{記号がずれてくる}}$

$\cancel{dx}$

$$f_{odd} = \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^5}\cdots$$

$$= \frac{1}{\cancel{1-q}}\,\frac{\cancel{1-q^2}}{\cancel{1-q^2}}\,\frac{1}{\cancel{1-q^3}}\,\frac{\cancel{1-q^4}}{1-q^4}\,\frac{1}{1-q^5}\,\frac{\cancel{1-q^6}}{1-q^6}\cdots$$

$$= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots$$

$$= f_{strict} \quad //$$

Rogers-Ramanujan PT

差 $R = \{\lambda \in Par \mid \forall i \ \ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}$

余 $T^{(N)}_{a,b,\dots} = \{\lambda \in Par \mid \forall i \ \ \lambda_i \equiv a,b,\dots \ (\mathrm{mod}\ N)\}$

差 $R \overset{PT}{\sim} T^{(5)}_{1,4}$ 余 , 差 $R' \overset{PT}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$ 余

where, $R' := R \cap \{\lambda \in Par \mid m_1(\lambda) = 0\}$

e.g. $n=5$

$Par(5) = \{(5),(41),(32),(31^2)(2^2 1)(21^3)(1^5)\}$

Euler 余 $Odd = \{\lambda \mid \lambda_i \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\} = T^{(2)}_1$

差 $Strict = \{\lambda \mid \forall i \ \ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 1\}$

Kanade-Russell 予想 (2014)

$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$

$m_1(\lambda) = 0$

$$K := \left\{ \lambda \in \mathrm{Par} \;\middle|\; \begin{array}{l} ① \ \forall i,\ \lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3 \\ ② \ \forall i,\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1 \Rightarrow \lambda_i + \lambda_{i+1} \in 3\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$T^{(5)}_{1,4}$

$T^{(5)}_{2,3}$

$$T^{(9)}_{1,3,6,8} \overset{PT}{\sim} K$$

$$T^{(9)}_{2,3,6,7} \overset{PT}{\sim} (K \cap \{\lambda \mid m_1(\lambda) = 0\})$$

$$T^{(9)}_{4,3,6,5} \overset{PT}{\sim} (K \cap \{\lambda \mid m_1(\lambda) = m_2(\lambda) = 0\})$$

$$\mathrm{Par}(5) = \{ (5), (41), (32), (31^2), (2^21), (21^3), (1^5) \}$$

Euler	$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 1$ $T_1^{(2)}$		$\boxed{\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots}$
Rogers-Ramanujan Jacobi	$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$ $T_{1,4}^{(5)}$		$T_{23}^{(5)}$
Kanade-Russell MacDonald恒等式 応用??	$\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3$ + $T_{1368}^{(9)}$	$\lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1$ $\Downarrow$ $3\mathbb{Z} \ni \lambda_i + \lambda_{i+1}$ $T_{2367}^{(9)}$	$T_{3465}^{(9)}$

Rk $1+\cdots+q^r = \frac{1-q^{r+1}}{1-q}$ in $\mathbb{C}[q] \subseteq \mathbb{C}[[q]]$

Jacobi $(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots$

すRすbl $(1+zq)(1+zq^3)(1+zq^5)\cdots$

$(1+z^{-1}q)(1+z^{-1}q^3)(1+z^{-1}q^5)\cdots$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} q^{\ell^2} z^{\ell}$$

$$\| $$

$$1+zq+z^{-1}q+z^2q^4+\cdots$$