第4回 代数学特論 arXiv

12/24 ポスドク特別講義 12/21

HoTT

Lean coq レポート

dependent type theory

インペリアル

Donaldson

Kevin Buzzard

Xena project

Richard Taylor

perfectoid space

The future of math 10

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$

$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \alpha + \beta$

モノイド $G \times G \xrightarrow{m} G$ $m(m(x,y),z) = m(x, m(y,z))$

整数の分割 → Young盤

(Young図形)

$\boxed{\text{Fulton の 1〜3章解説}}$

Recall 半標準盤

(e.g.) T =

1	2	2	3
2	3	5	5
4	4	6	
5	6		

→ : 広増

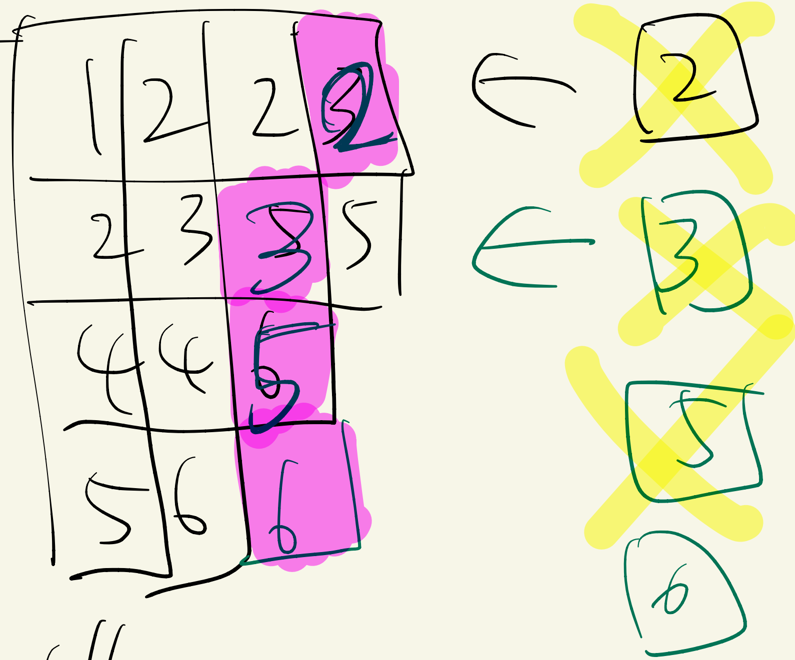
↓ : 狭増

1〜 書き込んだもの

$T \leftarrow y$: bump

が再びSSTということはOK

Ex



T'' bumping route

<u>Def</u> $\mathrm{row}(T') = 566445\ 2335\ 1222$

<u>Def</u> $SST = \bigsqcup_{\lambda \in Par} SST(\lambda)$

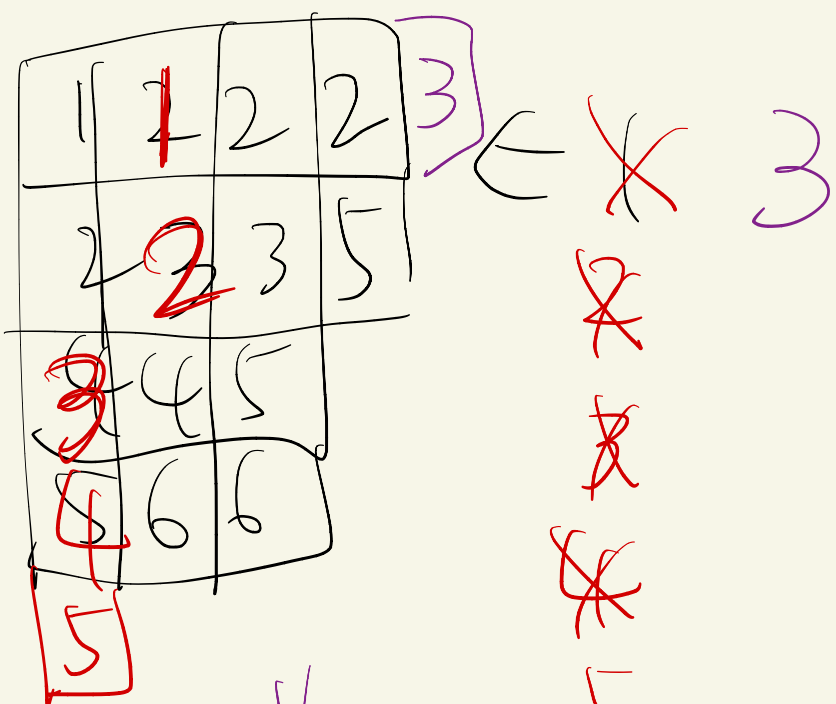
- $\cdot : SST \times SST \to SST$: well-defined

  $(T, U) \mapsto T \leftarrow \mathrm{row}(U)$

Ex

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&3&5&5\\ \hline 4&4&6\\ \cline{1-3} 5&6\\ \cline{1-2}\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} := (T \leftarrow 2)13$$

$$T \qquad U$$



$$\| \qquad\qquad\qquad \cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ 5$$

$$T \cdot U$$

$\boxed{\text{目標1 SST は monoid with unit} = \phi}$

15パズル (jeu de taquin)

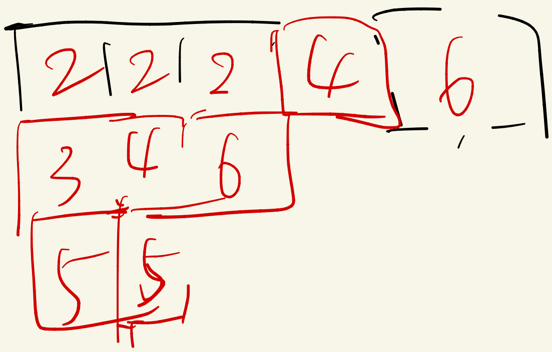
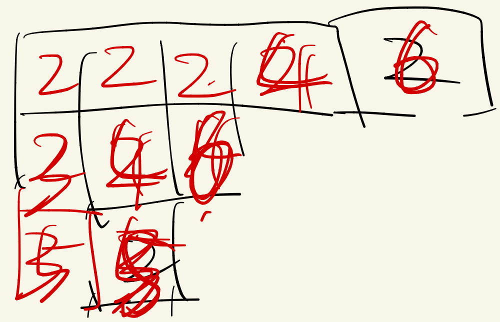
skew shape を考えて

				2
				6
	2	4	4	
2	3	6		
5	5			

$= (55432)/(441)$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & y \\ \hline x \\ \cline{1-1}\end{array} \text{ なら } \begin{cases} \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline\end{array} & x \le y \quad \text{型 SST} \\[2ex] \begin{array}{|c|}\hline y \\ \hline x \\ \hline\end{array} & x > y \quad \text{のとき} \end{cases}$$

を繰り返す

記法 $T \in SST(\lambda|\mu)$ にバグーレをくり返したものは ある SST の元に なるが、これを $\mathrm{Rect}(T)$ と書く

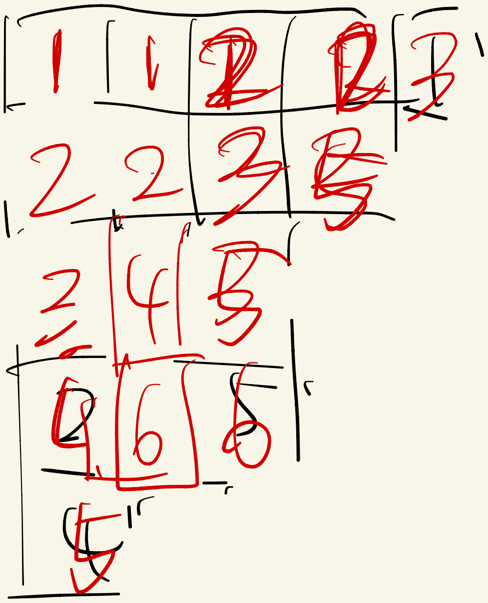
well-defind ?

目標2 Rect は well-defind

Rectify 整理する

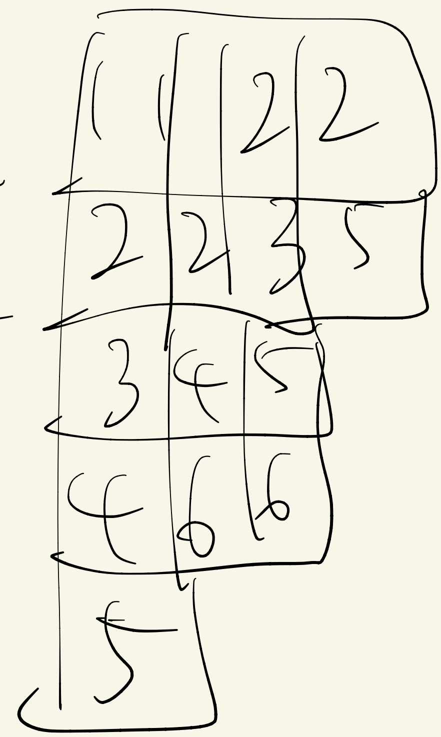
正則

Ex



U

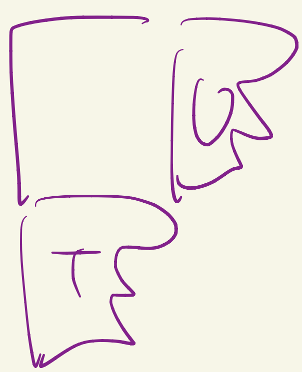
$$\mathrm{Rect} \longrightarrow$$



P

T

$$T * U = T \cdot U$$

目標3 $\mathrm{Rect}\Big($ 

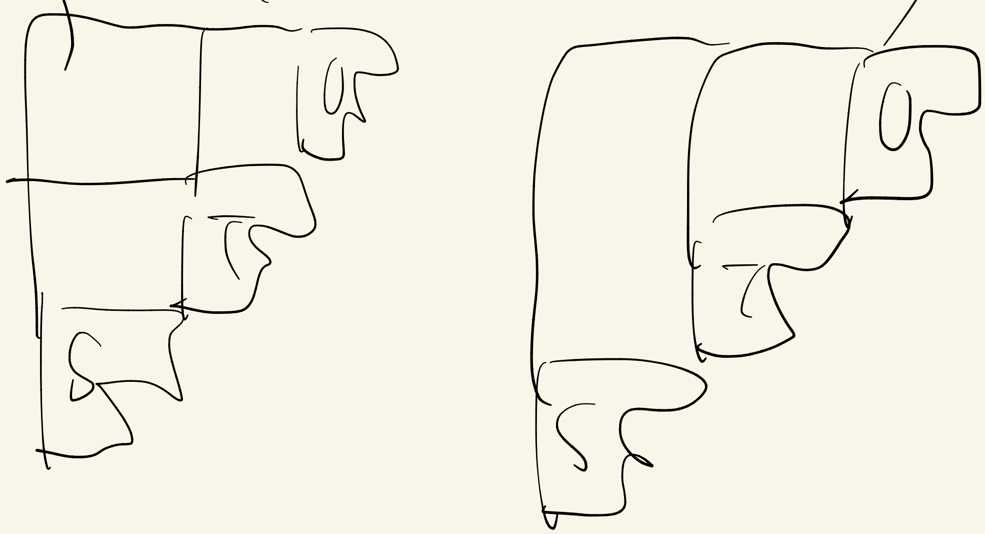
$\Big) = T \cdot U$

assuming 目標2

Remark 目標1 $\Leftarrow$ 目標2, 3

① S, T, U $(S\cdot T)\cdot U = S\cdot(T\cdot U)$

$(S\cdot\phi = \phi\cdot S = S)$ $= \mathrm{Rect}(S*T*U)$



P

$(S*T)*U = S*(T*U)$

proof of 目標2, 3

keyword Knuth同値関係

Wilson's thm $\quad$ p: 素数 $\quad (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

$n \geq 2 \qquad P(n) = \prod_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m,n)=1}} m$

$$P(n) \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

$$P(n) \equiv -1 \overset{?}{\iff} \boxed{n = p^e,\ 2p^e,\ 2,\ 4.}$$

symmetric

Def $\mathbb{N}^*_{\geq 1}$ 上の以下の transitive closure

$K: \ yzx \mapsto yxz \qquad x < y \leq z$

$K': \ xzy \mapsto zxy \qquad x \leq y < z$

Remark I: set $\rightsquigarrow$ $I^* = I^0 \sqcup I^1 \sqcup I^2 \sqcup \cdots$

Iが生成する自由 monoid

$I^* \ni i_1 \cdots i_n \qquad n \geq 0,\ i_j \in I$

積 = 連結

Remark $w, w' \in \mathbb{N}^*_{\geq 1}$ がKnuth同値

$\iff \exists\ w = w_0 \sim \cdots \sim w_l = w'$

↑

K or K′ でうつり合う(逆も可)

231 → 213

132 → 312

Knuth relの由来

1	2	2	3
2	3	5	5
4	4	6	
5	6		

$\leftarrow \boxed{2}\ x$

T

P

row と同一視

を local にやりたい！

1	2	2	2
2	3	3	5
4	4	5	
5	6	6	

$= T \leftarrow x$

$$(56)(446)(2355)(1223)\ 2$$

$$= (56)(446)(2355)\ 3\ (1222)$$

$$= (56)(446)\ 5\ (2335)(1222)$$

$$= (56)\ 6\ (445)(2335)(1222)$$

$$= (566)(445)(2335)(1222)$$

つまり

xがx'をbumpする

$$u_1 \sim u_p \, x' \, v_1 \sim v_q \, x$$

$\boxed{x}$

$[u_1 \sim u_p \mid x' \mid v_1 \sim v_q]$

条件

$$u_1 \leq \cdots \leq u_p \leq x < x' \leq v_1 \leq \cdots \leq v_q$$

① $yzx \mapsto yxz$

$x < y \leq z$

② $xzy \to zxy$

$x \leq y < z$

$\downarrow$

$$x' u_1 \sim u_p \, x \, v_1 \sim v_q$$

を示す

$$u_1 - u_p \, x' \, v_1 v_2 \cdots v_{q-1} v_q x$$

$v_{q-1} x v_q$

$\downarrow$

$$u_1 \sim u_p \, x' v_1 \, x \, v_2 - v_q$$

$\downarrow$

$$u_1 \sim u_p \, x' x \, v_1 \sim v_q$$

$$u_1 \sim u_{p-1}\, x'\, u_p\, x\, v_1 \sim v_q$$

$$\downarrow$$

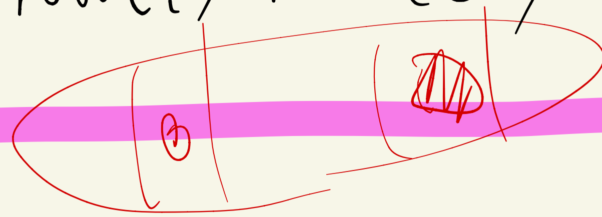
$$u_1 x' u_2 \text{ ———}$$

$$x' u_1 u_2 \text{ ———} \quad /\!/$$

系 $\mathrm{row}(T \leftarrow x) \underset{K}{\equiv} \mathrm{row}(T)\cdot x$

bumping

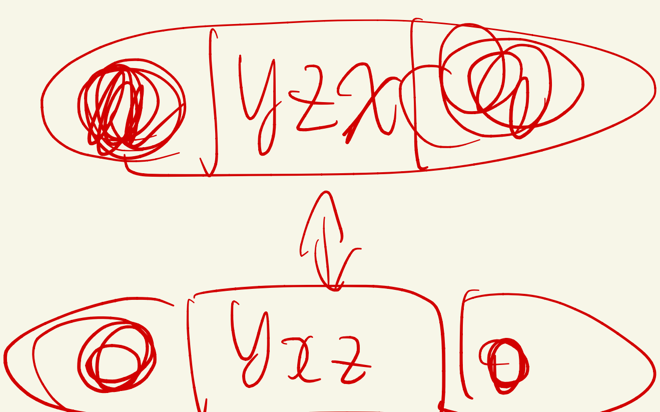
$$\boxed{\text{系 } \mathrm{row}(T\cdot U) \underset{K}{\equiv} \mathrm{row}(T)\, \mathrm{row}(U)}$$

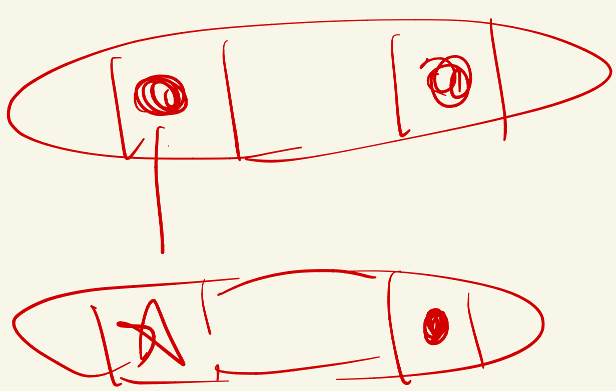


$n!$

$$\| $$

$$\mathrm{row}(T \leftarrow \mathrm{row}\, U)$$





集合 X 上の equiv rel を defしているを

binary $R \subseteq X \times X$ の生成する，という形で rel (transitive symmetric closure)

定義している。

Ex $X = \mathbb{N}^{*}_{\geq 1}$

$$R = \left\{ (w, w') \in X \times X \;\middle|\; w \xrightarrow{K \text{ or } K'} w' \right\}$$

$\boxed{\text{ベーシック圏論の5章 5.2}}$

「あんもくに

$$x \equiv_K x', \quad y \equiv_K y' \Rightarrow xy \equiv_K x'y'$$

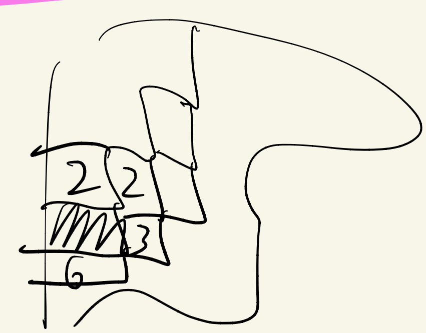
を用いれば

(これは $\equiv_K$ が local だから)

SST と Knuth rel　次は15ゲーム

prop $S \overset{\text{jeu}}{\rightsquigarrow} S'$　S, S' は穴があいた "SST"

$$\mathrm{row}(S) \equiv_K \mathrm{row}(S')$$



Ex

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline u & & y \\ \hline v & x & z \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{jeu}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline u & x & y \\ \hline v & & z \\ \hline\end{array}$$

$$S \qquad\qquad\qquad S'$$

$yzx \mapsto yxz$

$(x < y \leq z)$

$$u < v \leq x \leq y < z$$

$xzy \mapsto zxy$

$(x \leq y < z)$

$$\text{row } S = vxzuy$$

$$\equiv vxuzy$$

$$\equiv vuxzy$$

$$\equiv vuzxy$$

$$\text{row } S' = vzuxy$$

Lemma (セポート)

u_1	~	u_p		y_1	~	y_q
v_1	~	v_p	x	z_1	~	z_q

$\downarrow$ jeu

u_1	~	u_p	x	y_1	~	y_q
v_1	~	v_p		z_1	~	z_q

$$\Rightarrow v x z u y \equiv_{C} v z u x y$$

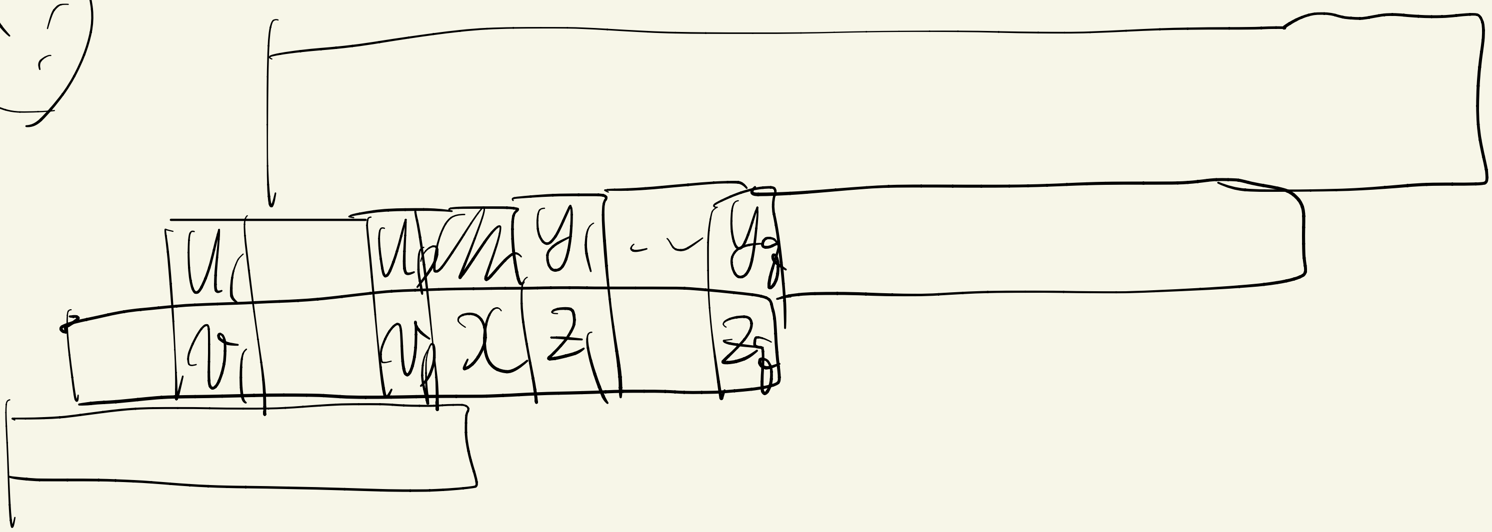
$v = v_1 \sim v_p$, u, y, z も同様

"jeu"をくり返す

prop $S \longrightarrow S'$ 　 S, S'は穴ないあいた"SST"

$\Rightarrow \mathrm{row}(S) \underset{K}{\equiv} \mathrm{row}(S')$

(∵)



(jeu de taquin が local)

のとき yがうごくなる $\mathrm{row}\, S = \mathrm{row}\, S'$

xが動くとき、レポート問題なる //

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{目標} \quad \forall w \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{*} \ \exists! \, T \in SST \\ \qquad\qquad row(T) \equiv_K w \end{array}}$$

$\underline{\text{Ex}}$ $w = 134234122332$

多分

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

$row = 344233112223$

$$w \overset{\text{多分}}{\underset{K}{\equiv}} row(T)$$

目標 ⇒ 目標2

$$\begin{tikzcd} & T \quad \in SST \\ S \arrow[ur, "\mathrm{Rect}"] \arrow[dr, "\mathrm{Rect}"'] & \\ & T' \quad \in \end{tikzcd}$$

より $\mathrm{row}(T) \equiv_K \underbrace{\mathrm{row}(S)}_{}$ $\tilde{w}$

$$\mathrm{row}(S) \equiv \mathrm{row}(T')$$

目標の一意性より $T = T'$

目標 ⇒ 目標3 $\left(T\cdot U = \mathrm{Rect}(T * U)\right)$

$$\mathrm{row}(T * U) = \mathrm{row}(T)\,\mathrm{row}(U)$$

$$\equiv_K \qquad\qquad\qquad \equiv$$

$$\mathrm{row}\big(\boxed{\mathrm{Rect}(T * U)}\big) \qquad \mathrm{row}\big(\boxed{T\cdot U}\big)$$

SST SST

一意性より $\mathrm{Rect}(T * U) = T\cdot U$

Fulton Young Tableaux の 1,2,3

proof of main thm (一部)

Def $w = w_1 \cdots w_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{*}$

$$L(w) = \max\left\{ \sum_{i=1}^{k} |I_i| \;\middle|\; \begin{array}{c} I_j = \{ i_1^{(j)} < \cdots < i_p^{(j)} \} \\ \Downarrow \\ w_{i_1^{(j)}} \leq \cdots \leq w_{i_p^{(j)}} \\ \bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigsqcup_{i=1}^{k} I_i \end{array} \right\}$$

Ex

$w = 134234122332$

$k=1$ $I_1 = \{1, 4, 8, 9, 10, 11\}$ or $I_1 = \{1, 7, 8, 9, 10, 11\}$

広増部分列の最大長 → Schensted

$L(w, 1) = 6$

$k=2$

$1\,3\,4\,2\,3\,4\,1\,2\,2\,3\,3\,2$

$1\,3\,4\,2\,3\,4\,1\,2\,2\,3\,3\,2$

$1\,3\,4\,2\,3\,4\,1\,2\,2\,3\,3\,2$

$L(w,2)=9$

$k=3$

$1\,3\,4\,2\,3\,4\,1\,2\,2\,3\,3\,2$

$1\,3\,4\,2\,3\,4\,1\,2\,2\,3\,3\,2$

$k \geq 3 \quad L(w,k)=12$

$L(w,1)=6$

Lem1 $w = \mathrm{row}(T)$ $T \in SST(\lambda)$

$L(w, k) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$

∵ 増大列は T で"下がらない"

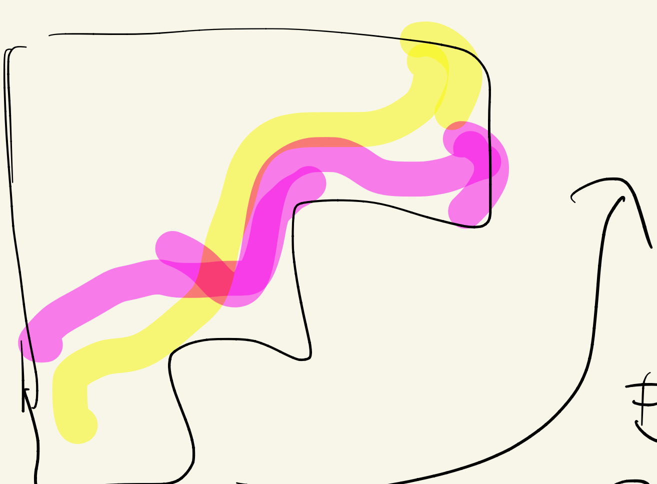
Ex

$T =$

1	1	2	2	2	3
2	3	3			
3	4	4			

row = 3 4 4 2 3 3 1 1 2 2 2 3

T



$\leftarrow L(w, 2) \leq \lambda_1 + \lambda_2$

- I_1 がつくる増大列
- I_2 がつくる増大列

ぎゅっと上に上げると
2行におさまる

Lem 2 $\quad w \underset{k}{\equiv} w'$

$$\Rightarrow \forall k \geq 1, \; L(w, k) = L(w, k')$$

から始める。