第10回代数学特論

Rogers-Ramanujan の証明

$\Uparrow$

Jacobi 三重積 　$\widehat{sl}_2$ 　・アフィンリー環に基づくもの
Virasoro 　・ボソン・フェルミオン対応

・Andrews による簡単なもの

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(q;q)_n}$$ $\Leftarrow$ $F_{par}(x;q)$ に staircase

$$(-z;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n}$$ $\Leftarrow$ $F_{strict}(x;q)$ の staircase

・Hardy-Wright 式の対称性

$\Leftarrow$ ワトソン5重積、$D_4^{(3)}$ 型アフィン

・q二項係数に基づくもの

・Motivated proofについて

$$F_k(x,q) = F_k(xq,q)\exp_q F_k(xq^2,q)$$

q^2

A, B と $BA = qAB$ となる形式変数

Def $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}' A^{n-k}B^k$$

$\mathbb{Q}(q)\langle A, B \mid BA = qAB \rangle \ni A, B$

$\mathbb{Q}(q)$-alg

Ex $$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$
$$= A^2 + (1+q)AB + B^2$$

ex2 $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}' = 1$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}' = 1+q$

$q^{-(n-1)} + q^{-(n-3)} + \cdots + q^{n-3} + q^{n-1}$

Def $[n] = 1+q+\cdots+q^{n-1}$ $(n\geq 1)$ $\in \mathbb{Q}[q]$

$\frac{q^n-1}{q-1}$ $\qquad$ $\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \quad (0\leq k\leq n)$$

それ以外は0

$q \longleftrightarrow q^{-1}$ 対称

$[n]! = [n]\cdots[1]$

$[0]! = 1$

かんたんにわかること

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}'$$

(q二項定理)

Thm $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} A^{n-k}B^k$

普通の述べられ方

Thm (q二項定理)

$$(z;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} z^k$$

(!) これ自体は Hardy-Wright と同様

$$f(z)(1-zq^n) = f(zq)(1-z)$$

z^m の係数 $\left(f(z) = \sum_{m=0}^{n} z^m A_m(q) \right)$

$$q^m A_m - q^{m-1} A_{m-1} = A_m - A_{m-1} q^n$$

$$(1-q^m) A_m = -q^{m-1}(1-q^{n-m+1}) A_{m-1}$$

$$\therefore A_m = \frac{-q^{m-1}(1-q^{n-m+1})}{1-q^m} A_{m-1} = \frac{(-1)^m q^{\binom{m}{2}} (q^n;q)_m}{(q;q)_m}$$

Jacobi 三重積への応用

$$(q^2, -zq, -z^{-1}q ; q^2)_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n q^{n^2}$$

$(1+z^{-1}q)(1+z^{-1}q^2)\cdots$

$(1+zq)(1+zq^2)\cdots$

$$(z;q)_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} (-z)^k$$

$$\parallel$$

$$\boxed{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{n-1})}\,(1-zq^n)\cdots(1-zq^{2n-1})$$

$$1-z = (1-z^{-1})(-z)$$

$$1-zq = (q-z^{-1})(-z)$$

$$\boxed{z \mapsto \frac{z}{q^n} としてみる}$$

$(-z)^n(1-z^{-1})(q-z^{-1})\cdots(q^{n-1}-z^{-1})$

$q^{+1}(1-z^{-1}q^{-1})$

$q^{n-1}(1-z^{-1}q^{1-n})$

$(-z)^n q^{\binom{n}{2}} (1-z^{-1})\cdots(1-z^{-1}q^{-(n-1)})$

$-n^2+\binom{n}{2}$

$$(-z)^n q^{-\binom{n+1}{2}} (1-z^{-1}q^n)\cdots(1-z^{-1}q)(1-z)\cdots(1-zq^{n-1})$$

$$= (-z)^n q^{-\binom{n+1}{2}} (z^{-1}q;q)_n (z;q)_n$$

$$\underline{(zq^{-n};q)_{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} (-z)^k q^{-nk}$$

$$(z^{-1}q;q)_n (z;q)_n$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} q^{\overbrace{\boxed{\binom{k}{2} - nk + \binom{n+1}{2}}}^{\binom{l}{2}}} (-z)^{\overbrace{\boxed{k-n}}^{l}}$$

$$k - n = l \qquad = \sum_{l=-n}^{n} \begin{bmatrix} 2n \\ n+l \end{bmatrix} q^{\binom{l}{2}} (-z)^l$$

$$\frac{k(k-1) - 2nk + n(n+1)}{2} = \frac{(k-n)(k-n-1)}{2}$$

$n \to \infty$ とすると

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} q^{\binom{l}{2}} (-z)^l \frac{1}{(q;q)_\infty}$$

示したのは

$$(q, z^{-1}q, z ; q)_\infty = \sum_\ell q^{\binom{\ell}{2}} (-z)^\ell$$

$q \mapsto q^2$

$z \mapsto -zq$ とすると

$$\Downarrow$$

$$\sum_\ell q^{\ell(\ell-1)} \cdot z^\ell q^\ell$$

$$\|$$

$$\sum_\ell q^{\ell^2} z^\ell$$

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n+\ell \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{2n}) \cdots (1-q^{n-\ell+1})}{(1-q) \cdots (1-q^{n+\ell})} \begin{matrix} \to 1 \\ \to (q;q)_\infty \end{matrix}$$

$n \to \infty$ ℓ : fix

Motivated proof

$$R' = R \cap \{\lambda \mid \lambda_i \neq 1\}$$

Rogers-Ramanujan

$$R \sim T^{(5)}_{1,4} \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}$$

$\shortparallel \quad \forall i$

$$\{\lambda \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}$$

ヤコビによって

「すかすか」

$$\cancel{0} \quad \| \quad \frac{\boxed{(q^5,q^3,q^2;q^5)_\infty}}{(q;q)_\infty}$$

$$= 1+q+q^2+q^3+2q^4+2q^5+3q^6+\cdots$$

$$G_1' = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} \left(\begin{array}{c} \text{ゆくゆくは} \\ = f_R(q) \end{array} \right) \text{ def する}$$

$$G_2' = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty} \left(= f_{R'}(q) \right)$$

$$= 1+q^2+q^3+q^4+q^5+2q^6+\cdots$$

$$G_3 = \frac{G_1 - G_2}{q} = 1+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+2q^8+\cdots$$

$$G_4 = \frac{G_2 - G_3}{q^2} = 1+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+\cdots$$

Rogers 1894 Proc LMS

Ramanujan 1913

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

1919

Sills An invitation to Rogers-Ramanujan identities

ワトソン

シューア

観察 $$G_{i+2}(q) = \frac{G_i(q) - G_{i+1}(q)}{q^i} = 1+q^{i+2} \pm (q^{i+3}\text{以上の項})$$

が i で成立(帰納的に)

注 $G_1(q) = f_R$, $G_2(q) = f_{R'}$ とみとめると易しい

実際

$$R_i = \{ \lambda \in R \mid m_1(\lambda) = \cdots = m_{i-1}(\lambda) = 0 \}$$

i.e. $\lambda_{\ell(\lambda)} \geq i$

そして $f_{R_i} = G_i$ が帰納的に分かる

Eg. $R \setminus R' = \{ (\mu, 1) \in R \mid \mu_{\ell(\mu)} \geq 3 \}$

$$\underset{\underset{G_1}{\|}}{f_R} - \underset{\underset{G_2}{\|}}{f_{R'}} = q \underbrace{f_{R_3}}_{G_3} \quad \text{in } \mathbb{C}[[q]]$$

1と2をふくまない

観察 (weak version)

$$G_{i+2}(q) = \frac{G_i(q) - G_{i+1}(q)}{q^i}$$

$$= 1 + (q^{i+2} \text{以上})$$

が i についで帰納的に成立

weak $\Rightarrow$ $G_1 = f_R$ が出せる

$G_2 = f_{R'}$

のみ示す

Def $A_1(q) = 1$ $A_{n+1}(q) = A_n(q) + B_n(q)$

$B_1(q) = 0$ $B_{n+1}(q) = q^n A_n(q)$

~~prop~~ $\forall n \geq 1 \quad G_1(q) = A_n G_n(q) + B_n G_{n+1}(q)$

(証) $n=1$ 明らか

$G_1 = A_n G_n + B_n G_{n+1}$

$q^n G_{n+2} = G_n - G_{n+1}$ より

$= A_n(q^n G_{n+2} + G_{n+1}) + B_n G_{n+1}$

$= \underbrace{(A_n + B_n)}_{= A_{n+1}} G_{n+1} + \underbrace{q^n A_n}_{B_n} G_{n+2}$ //

~~prop~~ $A_1, A_2, \cdots$ は収束する ($A_\infty(q)$ とおく)

(証) $A_{n+1} = A_n + q^{n-1} A_{n-1}$ から従う //

prop $A_\infty = G_1$

(証) $G_1 = A_n G_n + B_n G_{n+1}$

$= A_n(1 + q^n \text{ 以上}) + (q^{n-1} \text{ 以上})$

weak

$= A_n + (q^{n-1} \text{ 以上})$

G_1 と A_n は $q^0 \sim q^{n-2}$ が一致している

prop $S_n' = \{\lambda \in R \mid \lambda_1 \leq n\}$

$A_n'(q) = \sum_{\lambda \in S_{n-2}'} q^{|\lambda|} \in \mathbb{C}[x]$

$A_n(q) = A_n'(q)$

Cor $G_1(q) = A_\infty(q) = f_R(q)$ //

prop の proof

同じ漸化式

$A'_{n+1} = A'_n + q^{n-1} A'_{n-1}$ を示す

$S_{n-1} = S_{n-2} \sqcup \{(n-1, u) \mid u \in S_{n-3}\}$

$\downarrow \sum_{\lambda} q^{|\lambda|}$ とると

$A'_{n+1} = A'_n + q^{n-1} A'_{n-1}$

初期条件は check する。//

ヤコビ三重積

$$(q^2, -zq, -z^{-1}q; q^2)_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n q^{n^2}$$

$q \mapsto q^{\frac{5}{2}}$

$z \mapsto -q^{\frac{1}{2}}$

$$(q^5, q^3, q^2; q^5)_\infty = \sum_n (-1)^n q^{\frac{5n^2+n}{2}}$$

$$\| $$

$$G_1(q) \times \underbrace{\boxed{(q;q)_\infty}}_{\triangle}$$

同様に

$q \mapsto q^{\frac{5}{2}}$

$z \mapsto -q^{\frac{3}{2}}$

$$(q^5, q^4, q^1; q^5)_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{5n^2+3n}{2}}$$

$$\| $$

$$G_2(q) \cdot \triangle$$

計算すると $G_3 = \dfrac{G_1 - G_2}{q}$

200

$$\Delta \cdot G_3 = \boxed{1 - q - q^2 + q^3} \quad (1-q)(1-q^2)$$

$$\boxed{-q^6 + q^8 + q^{10} - q^{12}} \quad -q^6(1-q^2)(1-q^4)$$

$$\boxed{+q^{17} - q^{20} - q^{23} + q^{26} + \cdots}$$

$$q^{17}(1-q^3)(1-q^6)$$

$$\boxed{\Delta \cdot G_3 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (1-q^{n+1})(1-q^{2(n+1)}) q^{6n+5\binom{n}{2}}}$$

注 $\cancel{an^2+bn}+c\binom{n}{0}$ で書く $\qquad \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\binom{n}{2}$ $\binom{n}{1}$

ねが思いつく

証明するには $qG_3 = G_1 - G_2$ より

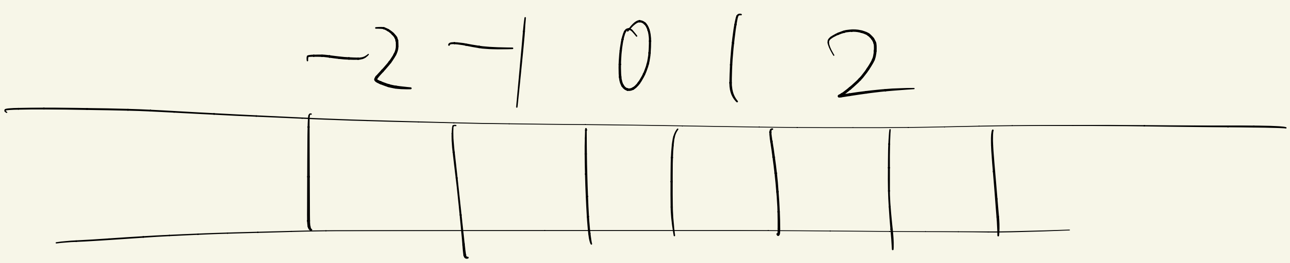
$$q\sum_{n\geq 0}(-1)\left((1-q^{n+1})(1-q^{2(n+1)})\right)q^{6n+5\binom{n}{2}}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\left(q^{\frac{5n^2+n}{2}}-q^{\frac{5n^2+3n}{2}}\right)$$

を確かめる $\left(\because \Delta\in\mathbb{C}[[q]]^\times\right)$

は可能



同様に　　　q^{2n+3} の項はうち消し合う

$$\boxed{\Delta G_4 = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (1-q^{n+1})(1-q^{n+2})(1-q^{2n+3})\, q^{8n+5\binom{n}{2}}}$$

と予想される。

証明も同様に $q^2 G_4 = G_2 - G_3$ の

Δをかけた式を示す

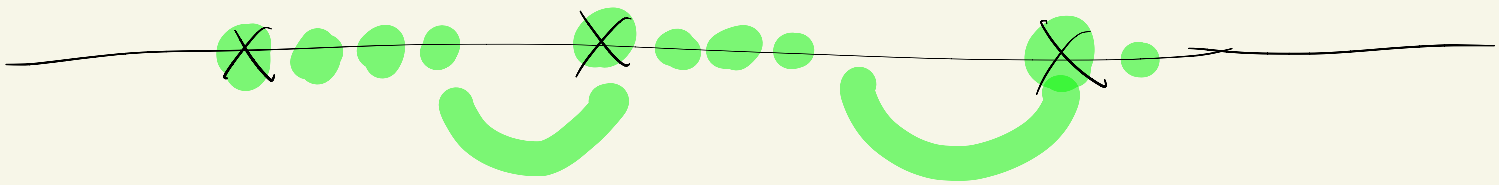
これより

$$\boxed{\Delta G_i(q) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \underbrace{(1-q^{n+1})\cdots(1-q^{n+i-2})}_{i-2\text{コ}} (1-q^{2n+i-1})\, q^{2in+5\binom{n}{2}}}$$

ΔG_2 もそうなっている

G_3

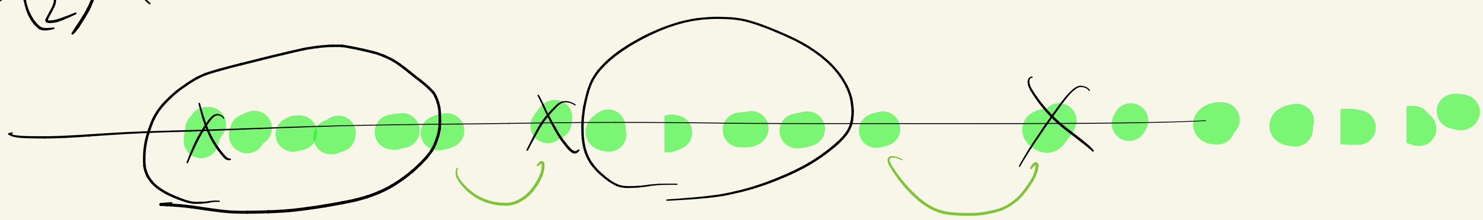
$5\binom{n}{2}+6n$



nの1次式

G_4

$5\binom{n}{2}+8n$

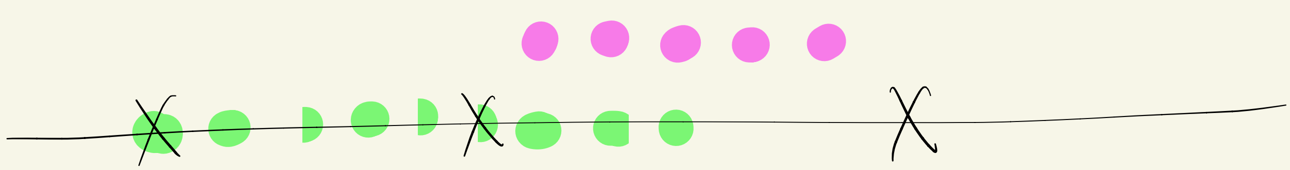


φ

nの1次式

3つの積

G_5 $5\binom{n}{2}+10n$



Motivateされた □ は正しい。

証明は $\underline{q^i G_{i+2} = G_i - G_{i+1}}$ を checkする。実際は示すことができる。

$$\left(\begin{array}{l} R \sim T^{(5)}_{1,4} \\ K \sim T^{(9)}_{1,3,6\text{-}8} \end{array} \right)$$

<u>weak a proof</u> □ を使う

<u>$n=0$ の寄与</u>

$$G_i = \frac{1}{(1-q^i)(1-q^{i+1})\cdots} + \sum_{n\geq 1} q^{2i}\text{以上}$$

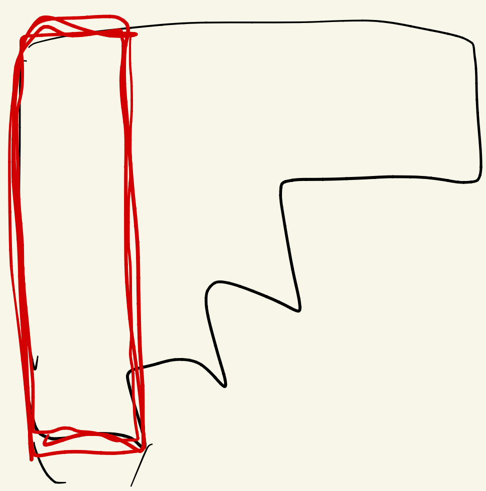
$$= 1 + (q^i\text{以上}) + (q^{2i}\text{以上}) = 1 + q^i\text{以上} \;/\!/$$

$\square$ から $F_R(x,q) = F_R(xq,q) + xq\,F_R(xq^2,q)$

の解が分かる?

$\Leftarrow \ \forall i \geq 1 \quad \underline{F_R(q^{i-1}, q) = f_{R_i}(q)}$

R_i



i-1 以上

$$F_R(x,q) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{n(5n+1)/2} \left(1 - x^2 q^{2(2n+1)}\right)}{\underbrace{(q;q)_n}_{(1-q)\cdots(1-q^n)} \underbrace{(xq^{n+1};q)_\infty}_{(1-q^{n+i})\cdots}}$$

系 $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{q^{n(n+i-1)}}{(q;q)_n} = f_{R_i}(q)$

1〜$i-1$ からなる

R_1 と R_2 のみ ∞ 積がある。

$R_1 = R$, $R_2 = R'$

Hardy:

no doubt it would be unreasonable to expect a really easy proof.

表現論で elementary
なことを解釈する

Rogers-Ramanujan
$\Leftarrow$ アフィンリー環

Young 図形 $\Leftarrow$ 対称群

1/24

1/25　　1/29

2/1