第1? 代数学特論

対称群の表現論 / $\mathbb{C}$ ($\mathbb{Q}$でも同じ)

$\lambda \in \mathrm{Par}(n)$ ごとに

$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$: Young対称化子

$S^\lambda := \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cdot c_\lambda \subseteq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$: $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-submod

Thm (前回のmain thm)

$$\{S^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Par}(n)\} = \mathrm{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n\text{-mod})/\mathrm{isom}$$

assuming 標準的事実 for 有限群の表現論 / $\mathbb{C}$

e.g. G: 有限群

$$\left|\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G\text{-mod})/\mathrm{isom}\right| = |G\text{の共役類}|$$

e.g. M : fin dim $\mathbb{C}G$-moduleは完全可約

i.e. $M \simeq \bigoplus_{[S] \in \quad} S^{\oplus m_S}$ as $\mathbb{C}G$-mod

e.g. 上の設定で

$$m_S = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(S, M)$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, S)$$

ここに $[S], [T] \in \quad$

$$S \simeq T \iff \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(S, T) = 1$$

e.g. $S \in \mathbb{C}G$-mod, f.d.

S : 既約 $\iff$ $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(S, S) = 1$

Recall $\lambda < \mu \Rightarrow c_\lambda c_\mu = 0$

実際は $\forall x \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ $\quad a_\lambda x b_\mu = 0$ を示した

Eg $\mathfrak{S}_3$ の指標

共役類	単位 (1コ)	互換 (3コ)	巡回 (2コ)
$S^{(3)}$ 自明	1	1	1
$S^{(2,1)}$ std	2	0	-1
$S^{(1,1,1)}$ 符号	1	-1	1

今日示すこと

例えば

$$\dim_{\mathbb{C}} S^\lambda = f^\lambda = \#\mathrm{Std}(\lambda)$$

$$\text{自明} \oplus \text{std} \cong \mathbb{C}^3 \curvearrowleft \mathfrak{S}_3$$

事実 $V, W \in \mathbb{C}G\text{-mod}$ 定義参照

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\chi_W(g^{-1})$$

categorification (圏論化)

対称群の表現

$\mathfrak{S}_n = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(\{1,\cdots,n\})$

圏論化

Young図形

の変数

対称多項式環

c.f. 圏論の歩き方 14章

$$\uparrow$$

$$(x_1+x_2+\cdots)^2$$
$$= x_1^2+x_2^2+\cdots$$
$$+2(x_1x_2+\cdots)$$

違うものが関係式

$\wedge$

sl_2 の表現論

$\Uparrow$

∞次元一環

RR

$A : m\times n$

$\mathrm{rank}\,A = \dim \mathrm{Im}(\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m)$

$\vec{v} \mapsto A\vec{v}$

消える自然な変換

c.f. 数学ガールの著者(結城さん)との対話

非負性

Def $M^\mu := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\mu}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{triv}$ "Verma の類"

$\mu \in \mathrm{Par}(n)$ $= \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cdot a_\mu \subseteq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$

Ex

$n=6$ $\mu=(3,2,1)$

$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathfrak{S}_{\{4,5\}} \times \mathfrak{S}_{\{6\}} \subseteq \mathfrak{S}_6$ S^{μ}

ψ

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$ parabolic subgroup

注 一般に G : fin. grp $\supseteq H$: subgroup

$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{triv} = \mathbb{C}G \cdot a$ $\quad a = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$

$\shortparallel$

$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}$

$\mathbb{C}G$-mod はいつでも $\mathbb{C}H$-mod と思える (制限) これの"逆"

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{triv}, M)$$

$$\cong$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(\mathrm{triv}, \mathrm{Res}_H^G M)$$

随伴

free construction

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

$U(\mathfrak{g})$

c.f. ベーシック圏論(4章)

他には

$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{triv}$ は

商集合 G/H

に G が作用するやつの線型化

i.e. $G = \bigsqcup_{[x] \in G/H} xH$

$G \curvearrowright G/H$

$g'[g] := [g'g]$

prop $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \vdash n$

$\mu = (1^{m_1} \cdots n^{m_n}) \vdash n \quad (m_i \geq 0)$

M^λ の $C(\mu)$ 共役類での指標値

$\chi_{M^\lambda}(C(\mu))$ は $\prod_{i=1}^{n} (x_1^i + \cdots + x_n^i)^{m_i}$

の $x_1^{\lambda_1} \cdots x_\ell^{\lambda_\ell}$ の係数 $\boxed{= \xi^\lambda_\mu}$

prop $\exists k_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $M^\lambda \cong S^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} (S^\mu)^{\oplus k_{\mu\lambda}}$

$\lambda, \mu \vdash n$

(∵) $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(M^\lambda, S^\lambda) = \dim a_\lambda \mathbb{C}S_n c_\lambda$

$M^\lambda = \mathbb{C}S_n a_\lambda$, $S^\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda$, $a_\lambda \mathbb{C}S_n c_\lambda$ の dim $= 1$

$a_\lambda b_\lambda$

$\mu < \lambda$ とすると

$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\cancel{S^\mu, M^\lambda}) = 0$ を言いたい

$M^\lambda \quad S^\mu$

$a_\lambda \mathbb{C}S_n a_\mu b_\mu$

$\dim \cancel{a_\mu b_\mu \mathbb{C}S_n a_\lambda}$

一般に G : fin grp

$\tau : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ は半自己 invol

$\sum a_g \cdot g \mapsto \sum a_g \cdot g^{-1}$

$\tau(xy) = \tau(y)\tau(x)$

$\tau^2 = \mathrm{id}$

$\tau(a_\mu b_\mu \mathbb{C}S_n a_\lambda)$

$\parallel$

$a_\lambda \mathbb{C}S_n b_\mu a_\mu$

無限対称多項式との関係

Def $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in \mathrm{Par}$

$m_\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_l^{\lambda_l}$ をふくむ

最小の∞変数対称多項式

Eg. $m_{\square} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$

$m_{\square\square} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots$

$m_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} = x_1 x_2 + \cdots = \sum_{i<j} x_i x_j$

よって

$m_{\square}^2 = m_{\square\square} + m_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$

Def $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in Par$

$p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}$

$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_\ell}$

$s_\lambda := \sum_{T \in SSTab(\lambda)} x^T$

$p_n = x_1^n + x_2^n + \cdots$ 巾和

$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = s_{\underbrace{\boxed{\;\;\;\;}}_{n}}$ 完全

注 基本对称多项式

$e_n = s_{\boxed{\vdots}} \}n$

$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_\ell}$

$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$

$e_2 = x_1 x_2 + \cdots$

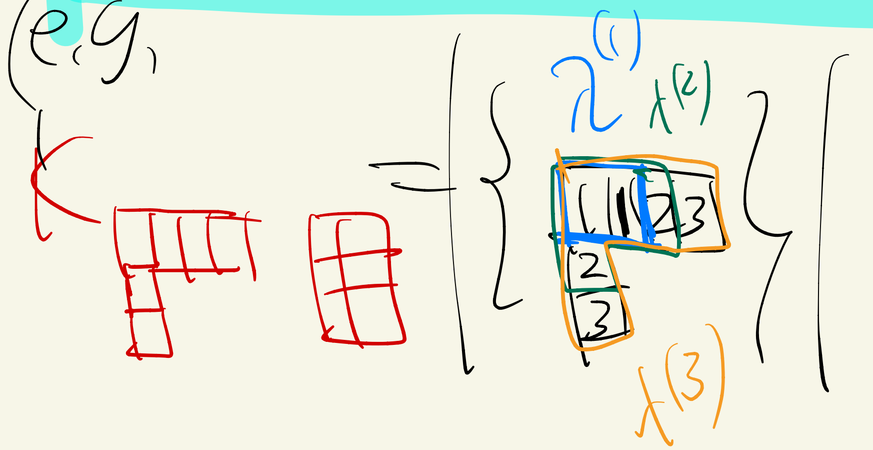
$e_3 = x_1 x_2 x_3 + \cdots$

Def (コストカ数)　GCT　P≠NP 2000

$$K_{\mu\lambda} = \#\{T \in SSTab(\mu) \mid cont(T) = \lambda\}$$

1がλ_1コ　2がλ_2コ …

e.g.



$$= \#\{(\lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \cdots) \mid |\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}| = \lambda_i,$$
かつ同じ列に2つない$\}$

$\phi = \lambda^{(0)} \subseteq$

注　$K_{\lambda\mu} \neq 0 \iff \mu \trianglelefteq \lambda$

$\Updownarrow$ def

$\forall k,\ \mu_1 + \cdots + \mu_k \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$

$K_{\lambda\lambda} = 1$

$\underline{\text{Lem}}$ $\lambda \vdash n$

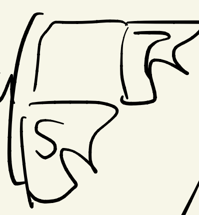
$$h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu\lambda} s_\mu$$

$\because$ $\{ U_1 \cdots U_\ell \mid U_i \in SST(\lambda_i) \}$ 多重集合

に $v \in SSTab(\mu)$ は $K_{\mu\lambda}$ 回現れる

(Row bumping Lemma)

$\underline{\text{Recall}}$ $S \cdot T = S \leftarrow row(T)$

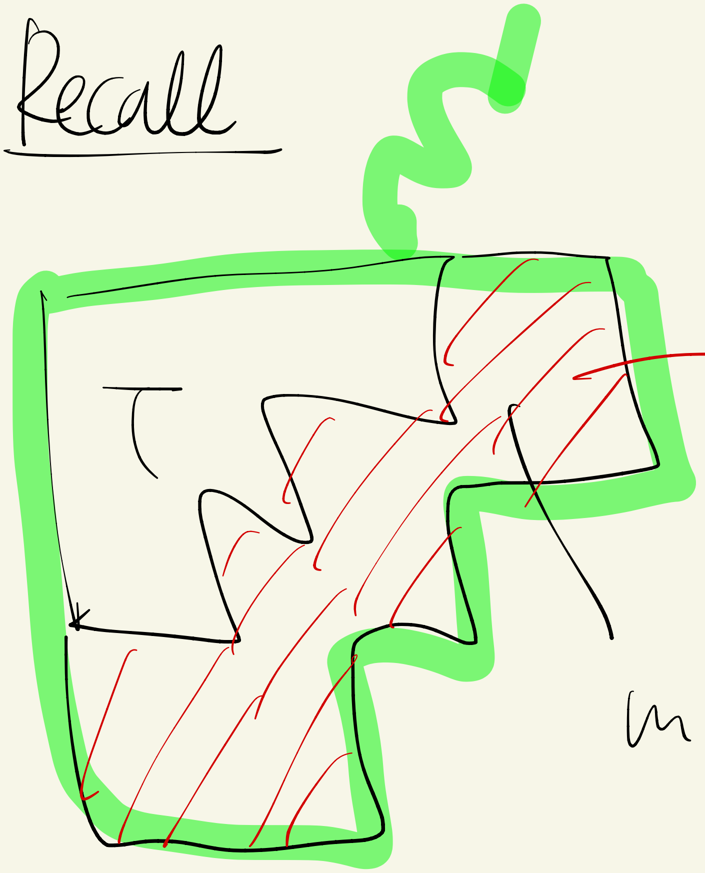
$= \text{jeu}\Big($  $\Big)$

$\underline{\text{Eg.}}$ $h_2 = m_{\square\square} + m_{\boxminus} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$

$x_1x_2 + \cdots$

$$h_3 = x_1^3 + \cdots + x_1^2 x_2 + \cdots x_1x_2x_3$$

Recall



同じ列にない
(水平列島)

m]　寺田-原田([illegible]論

$\exists! \, x_1 \leq \cdots \leq x_m$ s.t. $S = T \leftarrow x_1 \leftarrow \cdots \leftarrow x_m$

Def $\Lambda_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q} m_\lambda$　次数付

$\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_n$ は環

Prop ① $\{h_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$, $\{s_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は Λ_n の $\mathbb{Q}$-basis

② $\{p_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は $\Lambda_{\mathbb{Q},n} = \Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$-basis

(ii) $s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} {}^{\exists} c_{\mu\lambda} m_\mu$

$c_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

h_λについては $\boxed{}$ より

p_λについては

$$\boxed{n h_n - p_1 h_{n-1} - p_2 h_{n-2} - \cdots - p_n = 0}$$

から従う

$\log(1-z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\right)$

母関数より

$\frac{A'(t)}{A(t)} = (\log A(t))'$

$A(t) = \sum_{n\geq 0} h_n(x_1, \cdots) t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x_i t}$

$B(t) = \sum p_n(x_1, \cdots) \frac{t^n}{n} = \log \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x_i t}$

Ex

$$2\left(\begin{matrix} x_1^2+x_2^2+\cdots \\ x_1x_2+\cdots \end{matrix}\right)-(x_1+x_2+\cdots)^2$$

$$-(x_1^2+x_2^2+\cdots)) = 0$$

Def Λ_n に $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ で "内積" を定める

Def
$$p_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda_\mu s_\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} \xi^\lambda_\mu m_\lambda$$

Prop $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$

(∵)
$$\prod_{i,j\geq 1} \frac{1}{1-x_iy_j} \overset{\text{RSK}}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}} s_\lambda(x_1,\cdots) s_\lambda(y_1,\cdots)$$

$$\|$$

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}} h_\lambda(x_1,\cdots) m_\lambda(y_1,\cdots) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x_1\cdots) p_\lambda(y_1,\cdots)$$

Def $R_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}[S^\lambda]$: $\mathbb{Q}$-module

Λ_n

Λ $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$: 次数付き

注 $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}_1 \subseteq \cdots$ と全て考える

注 $M \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{\oplus m_\lambda}$ as $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-mod

$[M] = \sum_{\lambda \vdash n} \underline{m_\lambda} [S^\lambda]$ in $R_n \subseteq R$

非負整数

Def

$R_m \times R_n \longrightarrow R_{n+m}$ $[V \otimes W]$

$([V], [W]) \mapsto \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \otimes W$

V : $\mathbb{C}\mathfrak{S}_m$-mod, W : $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-mod

Thm ◇によってRは環になる

(結合法則が非自明)

$R_a \quad R_b \quad R_c$

$M_a \quad M_b \quad M_c$

$\mathfrak{S}_a\text{-mod} \quad \mathfrak{S}_b\text{-mod} \quad \mathfrak{S}_c\text{-mod}$

$$\left([M_a] \diamond [M_b]\right) \diamond [M]_c \overset{?}{=} (M_a \diamond (M_b \diamond M_c))$$

実は

$$\left[\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b \times \mathfrak{S}_c}^{\mathfrak{S}_{a+b+c}} M_a \otimes M_b \otimes M_c\right]$$

と同じであることが言える//

Def R_n に $\langle [S^\lambda], [S^\mu] \rangle = \delta_{\lambda\mu}$

で内積を入れる　ONB

これは $M, N \in \mathfrak{S}_n$-mod

$$\langle [M], [N] \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \left(\chi_M(g) \chi_N(g^{-1}) \right)$$

と同じ

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Thm}\ \ \psi : \Lambda \to R \ \text{は} \\ \qquad\qquad s_\lambda \mapsto [S^\lambda] \\ \mathbb{Z}\text{-graded, ring isom で } \langle \, , \rangle \text{ を保つ} \end{array}}$$

proof of thm $\hat{\Phi} : \Lambda \to R$

$\hat{\Phi}(h_\lambda) = [M^\lambda]$ とほぼ必然的に def

は積を保つとみとめる

あたり前だが次数を保ち、全単射

$\hat{\Phi}$ が $\langle , \rangle$ を保つこと

逆写像を def して、それが $\langle , \rangle$ を保つこと

$$[M^\lambda] \mapsto h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \xi^\lambda_\mu p_\mu$$

$$\xi^\lambda_\mu = \chi_{M^\lambda}(C_\mu)$$

$\boxed{}$ の系

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda_\mu p_\mu, \quad h_\lambda = \sum_\mu \frac{1}{z_\mu} \xi^\lambda_\mu p_\mu$$

F, 2

$$\Theta : R_n \longrightarrow \overset{\Lambda_n}{\cancel{\Lambda_{\mathbb{Q}}}}, n$$

$$[V] \longmapsto \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi_V(C_\mu)\, p_\mu$$

とすると

$$\Theta \circ \hat{\Phi} : \Lambda_n \hookrightarrow \Lambda_{\mathbb{Q},n} : \text{包含準同型}$$

かつ $\hat{\Phi}$ は全射なので

$\Theta : R_n \to \Lambda_n$ になっている

$\underline{\Theta \text{ が } \langle\, ,\, \rangle \text{ を保つこと}}$ $\qquad \langle p_\lambda, p_\mu \rangle$

$$\langle \Theta[V], \Theta[W] \rangle = \sum_{\lambda, \mu \vdash n} \frac{1}{z_\lambda z_\mu} \chi_V(C_\lambda) \chi_W(C_\mu)$$

$V, W : \mathfrak{S}_n\text{-mod}$

$$= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \chi_V(C_\lambda) \chi_W(C_\mu)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1})$$

注

$$\frac{n!}{z_\lambda} = |C(\lambda)|$$

$$= \left\langle [V], [W] \right\rangle$$

・ $\hat{\Phi}(s_\lambda) = [S^\lambda]$ をcheckする

∵ $h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu\lambda} s_\mu$

$$M^\lambda \cong S^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \rhd \lambda} (S^\mu)^{\oplus K_{\mu\lambda}}$$

これから帰納的に

$$\hat{\Phi}(s_\lambda) = [S^\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} m_{\mu\lambda} [S^\mu]$$

$\mathbb{Z}$
$\cup$

$\hat{\Phi}$ は $\langle , \rangle$ を保つので

$$1 = 1 + \sum_{\mu \rhd \lambda} m_{\mu\lambda}^2$$

これから $\hat{\Phi}(s_\lambda) = [S^\lambda]$

(注) $\Theta : R_n \to \Lambda_n$

$$[V] \mapsto \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi_V(C_\mu) p_\mu$$

系 $M^\lambda \simeq S^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \rhd \lambda} (S^\mu)^{\oplus K_{\mu\lambda}}$

$$h^\lambda = s^\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu\lambda} s_\mu$$

系 $\chi_{S^\lambda}(C_\mu) = \chi^\lambda_\mu$

$\Uparrow$

$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda_\mu p_\mu$

$\Theta[S^\lambda] = s_\lambda$

系 $\lambda \vdash n,\ \mu \vdash m$

$$S^\lambda \diamond S^\mu \cong \bigoplus_{\nu \vdash n+m} \left(S^\nu\right)^{\oplus c^\nu_{\lambda\mu}}$$

$$\Leftarrow\ s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu$$

系 $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \underset{+}{\overset{\cdot}{\supset}} \lambda} S^\mu$ as $\mathfrak{S}_{n+1}$-mod

$\lambda \vdash n$

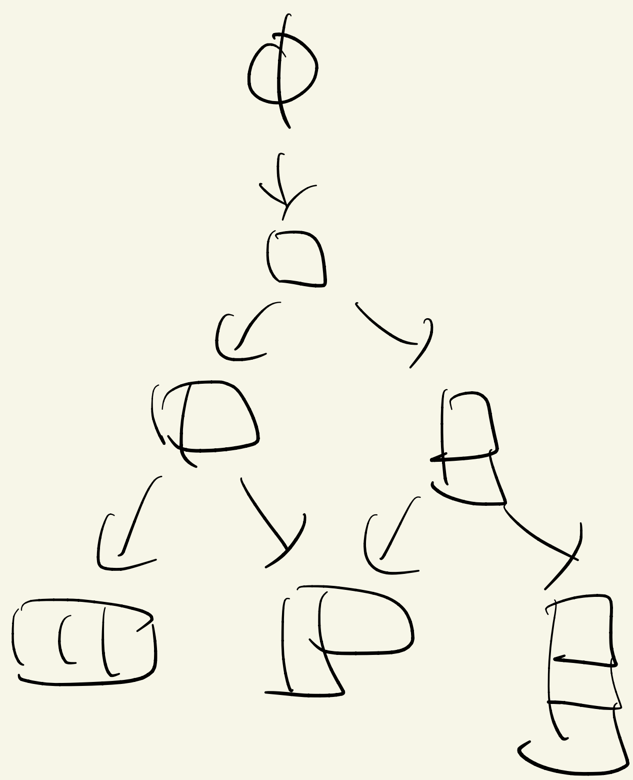
(ii)

$\mu=(1)$ のとき

$$S^\lambda \circ S^\mu = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_{n+1}} S^\lambda \otimes \mathbb{C}$$

$$= \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} S^\lambda$$

分岐則



これから帰納的に $\dim S^\lambda = f^\lambda$ が分かる

一般論から $n! = \sum_{\lambda\vdash n} (\dim S^\lambda)^2$

よって $n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^{\lambda})^2$ が ― ・・・