

准教授 星 裕一郎 (数論幾何の研究)

私は、遠アーベル幾何学や p 進タイヒミュラー理論などといった観点を中心として、双曲的な代数曲線の数論幾何学の研究を行っている。

これまでに行った研究の成果として、例えば、以下が挙げられる。

- セクション予想の研究：数体や p 進局所体上の双曲的代数曲線に対するセクション予想の副 p 版の反例の構成 [1]、有理数体や虚二次体上の代数曲線の双有理ガロアセクションの幾何学性研究。

- 代数曲線に対する遠アーベル幾何学の研究：有限体上の射影的代数曲線の遠アーベル副 l カスプ化の研究、モノドロミー充滿な種数 0 の双曲的代数曲線の同型類や準モノドロミー充滿な双曲的代数曲線の有理点の同値類のガロア理論的特徴付け、玉川安騎男氏・松本眞氏による準モノドロミー充滿性の l 独立性問題の否定的解決、クンマー忠実体上の非射影的代数曲線に対する遠アーベル予想の半絶対版の研究、潜在的通常安定還元を持つ p 進局所体上の射影的代数曲線に対する副 p 遠アーベル良還元判定法の確立、ある条件を満たす一般化劣 p 進体上の準三点基に対する遠アーベル予想の絶対版の解決 [3]。

- 高次元代数多様体に対する遠アーベル幾何学の研究：次元 4 以下の双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決 [2]、木下亮氏・中山能力氏との共同研究による付加構造付き楕円曲線のモジュライ空間に対する遠アーベル予想の解決、狭義単調減少型双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決、Grothendieck による非特異代数多様体に対する遠アーベル多様体から成る開基の存在問題の一般化劣 p 進体上への一般化の解決、辻村昇太氏・室谷岳寛氏との共同研究による実閉体上のある条件を満たす代数多様体の代数的基本群における幾何学的部分群の単遠アーベル的還元アルゴリズムの確立、ある条件を満たす一般化劣 p 進体上での非特異代数多様体に対する遠アーベル多様体から成る開基の存在問題の絶対版の解決 [3]。

- 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究：望月新一氏との共同研究による、NN 型外表現に関する組み合わせ論版遠アーベル予想の研究、円分物の同期化の理論の確立、副有限デーン捻りの基礎理論の整備、写像類群の曲面群への外表現に関する位相幾何学版遠アーベル予想の解決、数体や混標数局所体上の双曲的代数曲線に付随する外ガロア表現の忠実性の証明、有限型双曲的リーマン面の純組紐群の副有限完備化のファイバー保存的な連続外部自己同型射に対する組み合わせ論的カスプ化の研究、三点基の同期化の理論の確立、組み合わせ論的カスプ化の貼り合わせの理論の研究。非カスプ的な場合の PIPSC 型副有限群に対する付随する副有限グラフの単遠アーベル的還元アルゴリズムの確立。南出新氏と望月新一氏との共同研究による、有限型双曲的リーマン面の純組紐群の副有限完備化の研究、特に、そのような副有限完備化の一般化ファイバー部分群の単遠アーベル的還元アルゴリズムの確立と、その応用としての、グロタンディーク・タイヒミュラー群の純群論的表示の確立 [5]。

- 数論的な体に対する遠アーベル幾何学の研究：混標数局所体の絶対ガロア群の間の開準同型射に対して、その開準同型射が体の拡大から生じること、その開準同型射がガロア表現のホッジ・テイト性を保つことと同値性の証明。数体のある局所的乗法的構造による加法構造の復元の研究。混標数局所体に関連する様々な遠アーベル幾何学的话题の研究、特に、例えば、整数環と対数殻という 2 つの整構造の比較、混標数局所体の絶対ガロア群の間の開準同型射の遠アーベル幾何学的観点による研究、特殊な混標数局所体に関連するいくつかの単遠アーベル的還元アルゴリズムの確立、絶対ノルム射の単遠アーベル的還元アルゴリズムの確立などといった研究。数体の可解開拡大のガロア群に対する単遠アーベル的還元アルゴリズムの確立。西尾優氏との共同研究による、混標数局所体の絶対ガロア群の外部自己同型群の中の体論的な有限部分群の研究。

- 宇宙際タイヒミュラー理論の研究：望月新一氏、Ivan Fesenko 氏、南出新氏、Wojciech Porowski 氏との共同研究による、剰余標数 2 の設定におけるエタールデータ関数の理論の研究、有理数体や虚二次体上でのディオファントス幾何学への応用、特に、Fermat 予想の新しい証明の確立 [4]。

- 代数曲線の双曲的通常性研究：標数 3 での冪零許容固有束や冪零通常固有束に付随するハッセ不変量とカルティエ固有形式との関連の確立、有限次エタール被覆に対する冪零固有束の通常性の安定性に関する p 進タイヒミュラー理論における基本問題の否定的解決、数値的不変量が小さい場合の冪零許容固有束や冪零通常固有束に付随する超特異因子の具体的記述の研究、標数 3 での種数 5 以下の射影的代数曲線の超楕円的代数曲線の双曲的通常性の証明。

- 正標数双曲的代数曲線の幾何学研究：標数 p の射影的代数曲線上の階数 $p-1$ の休眠午の同型類の一意性の証明。標数 p の射影的代数曲線上の、ハッセ・ヴィット不変量が正となる次数 $p-1$ の巡回有限次エタール被覆の存在の証明。丹後曲線の存在に関する研究。古典的なリーマン面の理論における正則座標、複素射影構造、固有束の間のある自然な関連の正標数類似である、正標数射影的代数曲線上の擬座標、フロベニウス射影構造、フロベニウス固有構造の間の自然な関連の確立。

また、比較的最近の研究の成果として、以下が挙げられる。

- 双曲的代数曲線という概念の遠アーベル幾何学的観点における純位相群論的抽象化として、双曲的代数曲線という概念を導入して、その一般的な幾何学の研究を行い、特に、その部分的コンパクト化の理論、及び、その有限群による商の理論を整備した [6]。

- 上述の古典的なリーマン面の理論における正則座標、複素射影構造、固有束の間のある自然な関連の正標数類似のアフィン版として、正標数射影的双曲的代数曲線上の丹後関数、フロベニウスアフィン構造、フロベニウスアフィン固有構造の間の自然な関連を確立した [7]。

- 辻村昇太氏と共同で、体の自己同型群からその体の絶対ガロア群の外部自己同型群への自然な射の単射性の研究を行なった。特に、与えられた体が、例えば、混標数ネーター局所整域の商体の部分体と同型であるとき、あるいは、非自明な離散付値を持つ正標数の体であるときには、そのような射が単射となることを証明した [8]。

- 飯島優氏と共同で、準モノドロミー充満な双曲的代数曲線の幾何学的同型類のガロア理論的特徴付けの研究を行なった。具体的には、与えられた設定の数値的不変量がある条件を満たす場合に、劣 ℓ 進体上の準 ℓ モノドロミー充満な双曲的代数曲線の幾何学的同型類が、曲線に付随する外ガロア表現の核の通約類によって完全に決定されることを証明した [9]。

- 若林泰央氏と共同で、正標数射影的双曲的代数曲線の上の安定ベクトル束のモジュライ空間の研究を行なった。具体的には、固定された正標数射影的双曲的代数曲線に対して、その上の行列式束が自明な階数 2 の安定ベクトル束のモジュライ空間の、フロベニウス引き戻しを考えることによって得られる自己有理写像の次数の上限を与えた [10]。

- [1] Existence of nongeometric pro- p Galois sections of hyperbolic curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), no. **4**, 829–848.
- [2] The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **21** (2014), no. **2**, 153–219.
- [3] The absolute anabelian geometry of quasi-tripods, *Kyoto J. Math.* **62** (2022), no. **1**, 179–224.
- [4] Explicit estimates in inter-universal Teichmüller theory (with Shinichi Mochizuki, Ivan Fesenko, Arata Minamide, and Wojciech Porowski), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **2**, 175–236.
- [5] Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups (with Arata Minamide and Shinichi Mochizuki), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **3**, 295–348.
- [6] The geometry of hyperbolic curvoids, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **59** (2023), no. **1**, 1–55.
- [7] Frobenius-affine structures and Tango curves, *Nagoya Math. J.* **250** (2023), 385–409.
- [8] On the injectivity of the homomorphisms from the automorphism groups of fields to the outer automorphism groups of the absolute Galois groups (with Shota Tsujimura), *Res. Number Theory* **9** (2023), no. **2**, Paper No. **44**, 13 pp.
- [9] Galois-theoretic characterization of geometric isomorphism classes of quasi-monodromically full hyperbolic curves with small numerical invariants (with Yu Iijima), *J. Algebra* **634** (2023), 480–511.
- [10] An upper bound on the generic degree of the generalized Verschiebung for rank two stable bundles (with Yasuhiro Wakabayashi), *J. Pure Appl. Algebra* **228** (2024), no. **6**, Paper No. **107605**, 14 pp.