

## 准教授 星 裕一郎 (数論幾何の研究)

私は、遠アーベル幾何学や  $p$  進タイヒミュラー理論などといった観点を中心として、双曲的な代数曲線の数論幾何学の研究を行っている。これまでにに行った研究の成果として、例えば、以下が挙げられる。

- セクション予想の研究：数体や  $p$  進局所体上の双曲的代数曲線に対するセクション予想の副  $p$  版の反例の構成 [1]、有理数体や虚二次体上の代数曲線の双有理ガロアセクションの幾何学性研究。

- 代数曲線に対する遠アーベル幾何学の研究：有限体上の射影的双曲的代数曲線の遠アーベル副  $l$  カスプ化の研究、玉川安騎男氏・松本真氏による準モノドロミー充満性の  $l$  独立性問題の否定的解決、クンマー忠実体上の非射影的双曲的代数曲線に対する遠アーベル予想の半絶対版の研究、潜在的通常安定還元を持つ  $p$  進局所体上の射影的双曲的代数曲線に対する副  $p$  遠アーベル良還元判定法の確立、ある条件を満たす一般化劣  $p$  進体上の準三点基に対する遠アーベル予想の絶対版の解決 [4]。飯島優氏との共同研究による、関連する数値的不変量がある条件を満たす、準モノドロミー充満な双曲的代数曲線の幾何学的同型類のガロア理論的特徴付けの確立。

- 高次元代数多様体に対する遠アーベル幾何学の研究：次元 4 以下の双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決 [2]、狭義単調減少型双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の解決、Grothendieck による非特異代数多様体に対する遠アーベル多様体から成る開基の存在問題の一般化劣  $p$  進体上への一般化の解決、またその絶対版の研究 [4]。木下亮氏と中山能力氏との共同研究による付加構造付き楕円曲線のモジュライ空間に対する遠アーベル予想の解決。

- 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究：望月新一氏との共同研究による、節点非退化型外表現に関する組み合わせ論版遠アーベル予想の研究、数体や混標数局所体上の双曲的代数曲線に付随する外ガロア表現の忠実性の証明、円分物の同期化の理論の確立、副有限デーン捻りの基礎理論の整備、写像類群の曲面群への外表現に関する位相幾何学版遠アーベル予想の解決、三点基の同期化の理論の確立、組み合わせ論的カスプ化の貼り合わせの理論の研究、セクション予想の組み合わせ論的遠アーベル幾何学的類似の研究、組み合わせ論的遠アーベル幾何学の離散版の確立、有限型双曲的リーマン面上のサイクルの正準的持ち上げの理論の確立。非カスプ的な場合の PIPSC 型副有限群に対する付随する副有限グラフの単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立。南出新氏と望月新一氏との共同研究による、有限型双曲的リーマン面の純組紐群の副有限完備化の研究、また、その応用としての、グロタンディーク・タイヒミュラー群の純組み合わせ論的・純位相群論的表示の確立 [7]。

- 数論的な体に対する遠アーベル幾何学の研究：混標数局所体の絶対ガロア群の間の開準同型射に対して、その準同型射が体拡大の間の射から生じること、その準同型射がガロア表現のホッジ・テイト性を保つことの同値性の証明。混標数局所体に関連する様々な遠アーベル幾何学的话题の研究、特に、例えば、整数環と対数殻という 2 つの整構造の比較、特殊な混標数局所体に関連するいくつかの単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立、絶対ノルム射の単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立などといった研究。数体の可解閉ガロア拡大のガロア群に対する単遠アーベル的復元アルゴリズムの確立 [5]。西尾優氏との共同研究による混標数局所体の絶対ガロア群の外部自己同型群の中の体論的な有限部分群の非正規性の研究。辻村昇太氏との共同研究による体の自己同型群からその体の絶対ガロア群の外部自己同型群への自然な射の単射性の研究。

- 宇宙際タイヒミュラー理論の研究：望月新一氏、Ivan Fesenko 氏、南出新氏、Wojciech Porowski 氏との共同研究による、剰余標数 2 の設定におけるエタールテータ関数の理論の研究、また、有理数体や虚二次体上でのディオファントス幾何学へのその応用、特に、Fermat 予想の新しい証明の確立 [6]。

- 代数曲線の双曲的通常性研究：標数 3 での冪零許容固有束や冪零通常固有束に付随するハッセ不変量とカルティエ固有形式との関連の確立、有限次エタール被覆に対する冪零固有束の通常性の安定性に関する  $p$  進タイヒミュラー理論における基本問題の否定的解決、数値的不変量が小さい場合の冪零許容固有束や冪零通常固有束に付随する超特異因子の具体的記述の研究、標数 3 での四点基の 9 を法とする正準的持ち上げ及び付随する正準的フロベニウス持ち上げの具体的記述。

- 正標数双曲的代数曲線の幾何学研究：標数  $p$  の射影的双曲的代数曲線上の階数  $p-1$  の休眠午の同型類の一意性の証明。標数  $p$  の射影的双曲的代数曲線上の、ハッセ・ヴィット不変量が正となる次数  $p-1$  の巡回有限次エタール被覆の存在の証明。リーマン面の古典的理論に登場する正則座標、複素射影構造、固有束の間の自然な関連の正標数類似である、正標数射影的双曲的代数曲線上の擬座標、フロベニウス射影構造、フロベニウス固有構造の間の自然な関連の確立 [3]、また、そのアフィン版の確立や、正標数射影的双曲的代数曲線上の丹後関数との関連の研究。若林泰央氏との共同研究による、正標数射影的双曲的代数曲線上の安定ベクトル束のモジュライ空間の、フロベニウス引き戻しを考えることによって得られる自己有理写像の次数の明示的上限の確立。シュワルツ系の理論の確立、そして、この概念を通じた、シュワルツ微分を用いたコンパクトリーマン面上の複素射影構造の存在の証明と、杉山・安田局所完全微分形式を用いた標数 2 の射影的代数曲線上のレベル 2 の丹後関数の存在の証明の統一的な説明の確立。

また、比較的最近の研究の成果として、以下が挙げられる。

- 数体の可解閉ガロア拡大のガロア群の間の連続開準同型射がいつでも体拡大の間の射から生じるであろうという内田興二氏による予想の研究を行った。特に、そのような連続開準同型射に対して、その準同型射が体拡大の間の射から生じることと、その準同型射の円分指標との両立性が同値であることを証明した [8]。
- 望月新一氏と辻村昇太氏との共同研究として、グロタンディーク・タイヒミュラー群に埋め込まれた有理数体の絶対ガロア群の共役類の純組み合わせ論的・純位相群論的な表示を確立した。また、トーラス的クンマー非退化かつアーベル多様体的クンマー忠実な体上の種数 0 の双曲的代数曲線に付随する 2 次元以上の配置空間に対する遠アーベル予想の半絶対版を解決した [9]。
- 望月新一氏との共同研究として、組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究を行い、緩和基本群の理論への応用を与えた。特に、数体の絶対ガロア群の中の素点の分解群の、その数体上の双曲的代数曲線とその素点での局所化に付随する外ガロア表現を用いた特長付けを確立した [10]。

- [1] Existence of nongeometric pro- $p$  Galois sections of hyperbolic curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), no. **4**, 829–848.
- [2] The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **21** (2014), no. **2**, 153–219.
- [3] Frobenius-projective structures on curves in positive characteristic, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **56** (2020), no. **2**, 401–430.
- [4] The absolute anabelian geometry of quasi-tripods, *Kyoto J. Math.* **62** (2022), no. **1**, 179–224.
- [5] Mono-anabelian reconstruction of solvably closed Galois extensions of number fields, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **29** (2022), no. **3**, 257–283.
- [6] Explicit estimates in inter-universal Teichmüller theory (with Shinichi Mochizuki, Ivan Fesenko, Arata Minamide, and Wojciech Porowski), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **2**, 175–236.
- [7] Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups (with Arata Minamide and Shinichi Mochizuki), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **3**, 295–348.
- [8] Homomorphisms of global solvably closed Galois groups compatible with cyclotomic characters, *Tohoku Math. J. (2)* **77** (2025), no. **1**, 17–32.
- [9] Combinatorial construction of the absolute Galois group of the field of rational numbers (with Shinichi Mochizuki and Shota Tsujimura), *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **32** (2025), no. **1**, 1–125.
- [10] Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves III: tripods and tempered fundamental groups (with Shinichi Mochizuki), *Kyoto J. Math.* **65** (2025), no. **4**, 787–875.