

続・宇宙際 Teichmüller 理論入門 (Introduction to Inter-universal Teichmüller Theory, Continued)

By

星 裕一郎 (Yuichiro HOSHI)*

Abstract

The present article is a sequel to the previous article [2]. In the present article, we continue to survey the inter-universal Teichmüller theory established by Shinichi Mochizuki.

目次

- § 0. 序
- § 1. 初期 Θ データと Hodge 劇場
- § 2. エタールの対象と Frobenius 的对象と Kummer 同型
- § 3. 多輻的 Kummer 両立系
- § 4. Hodge 劇場の加法的対称性
- § 5. Hodge 劇場の乗法的対称性
- § 6. 行進
- § 7. 局所的幾何学的設定の復習
- § 8. 共役同期化
- § 9. 加法的対称化同型
- § 10. 乗法的対称化同型
- § 11. 対数リンク

Received April 20, 201x. Revised September 11, 201x.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14H25.

Key Words: *inter-universal Teichmüller theory.*

Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K04780.

*RIMS, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.

e-mail: yuichiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

- § 12. 対数殻
 - § 13. テンソルパッケージ
 - § 14. 対数列
 - § 15. 大域的対数 Kummer 対応
 - § 16. 単テータ系
 - § 17. テータモノイド
 - § 18. テータモノイドの多輻的 Kummer 離脱
 - § 19. テータ関数の Galois 理論的代入
 - § 20. Gauss モノイドと代入同型
 - § 21. 大域的 Gauss フロベニオイド
 - § 22. $\Theta^{\times\mu}$ リンクと $\Theta_{\text{gau}}^{\times\mu}$ リンク
 - § 23. 対数 Gauss 行進モノイド
 - § 24. テータ値の対数 Kummer 対応と $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク
 - § 25. $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンクと両立的な多輻的表示とその帰結
 - § 26. Diophantus 幾何学的不等式
- 参考文献

§ 0. 序

本稿は、題目のとおり、望月新一氏によって創始された宇宙際 Teichmüller 理論への入門的解説をその目標として書かれたものです。また、本稿は、再び題目のとおり、筆者による [2] “宇宙際 Teichmüller 理論入門” の続編です。

[2] では、“Diophantus 幾何学的帰結を得るために宇宙際 Teichmüller 理論ではどのような定理を証明するのか” という観点を中心として、目標を達成するためにどのようなアイデアを実現しなければならないかという事柄を、たくさんの“不正確な記述”を用いて非常に大雑把に説明しました。本稿では、その“アイデア”のもと、目標を達成するために、実際にどのような対象を定義するのか、実際にどのような議論を行うのか、といった事柄を ([2] と比較すれば“より数学的に”) 説明します。理論が、全体として、どのような構成/議論によって作り上げられていくのか、その概観の説明が本稿の内容の中心であり、特に、様々な対象やその構成に関する細かい注意点などは説明されていません。[2], §0, でも述べたとおり、宇宙際 Teichmüller 理論の本格的な理解を目指すならば、原論文の精読がどうしても不可欠である、という当たり前な事実を、再びここに指摘します。

§ 1. 初期 Θ データと Hodge 劇場

本稿を通じて, 1 の原始 4 乗根を含む数体 F , そして, F のすべての素点において高々分裂乗法的還元を持つ F 上の楕円曲線 E を固定しましょう. また, 再び本稿を通じて, [2], §17, で解説が与えられた — この E/F が登場する — 初期 Θ データ

$$(\overline{F}/F, X, l, \underline{C}_K, \underline{V}, \mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}, \epsilon)$$

を固定することにしましょう. つまり,

- $\overline{F}$ は F の代数閉包,
- X は E からその原点を取り除くことで得られる F 上の $((1,1)$ 型) 双曲的曲線,
- l は (5 以上の) 奇素数,
- $\underline{C}_K$ は F の有限次 Galois 拡大 $K \stackrel{\text{def}}{=} F(E[l](\overline{F}))$ 上の双曲的軌道曲線,
- $\underline{V}$ は K の素点のなす集合 $\mathbb{V}(K)$ の (無限) 部分集合,
- $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}$ は E のモジュライの体 $F_{\text{mod}} (\subseteq F)$ の素点のなす集合 $\mathbb{V}_{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{V}(F_{\text{mod}})$ の (有限素点からなる空でない有限) 部分集合,
- ϵ は双曲的軌道曲線 $\underline{C}_K$ のカスプ

であって, 適当な条件を満たすものです. 正整数 N に対して, $\overline{F}$ 内の 1 の N 乗根のなす群を

$$\mu_N \stackrel{\text{def}}{=} \mu_N(\overline{F})$$

と書くことに, その上, $\overline{F}$ 内のすべての 1 の n 乗根のなす群を

$$\mu_\infty = \mu_\infty(\overline{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_n \mu_n$$

— ただし, n はすべての正整数を走る — と書くことにしましょう.
固定された初期 Θ データから,

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}_K & \longrightarrow & X_K \stackrel{\text{def}}{=} X \times_F K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}_K & \longrightarrow & C_K \end{array}$$

という K 上の双曲的軌道曲線の有限次エタール被覆による図式が一意的に定まります. ([2], §17, を参照ください.) また, 数体の拡大 $F_{\text{mod}} \subseteq K$ が定める自然な全射 $\mathbb{V}(K) \twoheadrightarrow \mathbb{V}_{\text{mod}}$

は, 全単射 $\underline{\mathbb{V}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}_{\text{mod}}$ を定めます. そして, この全単射によって $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}} \subseteq \mathbb{V}_{\text{mod}}$ に対応する $\underline{\mathbb{V}}$ の部分集合を

$$\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}} \subseteq \underline{\mathbb{V}}$$

と書くことにします. すると, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ (あるいは, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{good}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mathbb{V}} \setminus \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$) に対して,

$$\underline{X}_{\underline{v}} \quad (\text{あるいは, } \underline{X}_{\underline{v}}) \longrightarrow \underline{X}_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{X}_K \times_K K_{\underline{v}}$$

— ただし,

$$K_{\underline{v}}$$

は K の $\underline{v}$ での完備化 — という $K_{\underline{v}}$ 上の双曲的曲線の間の有限次エタール被覆が存在します. $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ のときには, $\underline{X}_{\underline{v}}$ の緩和基本群を

$$\Pi_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^{\text{temp}}(\underline{X}_{\underline{v}})$$

と書き, そして, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ のときには, $\underline{X}_{\underline{v}}$ のエタール基本群を

$$\Pi_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_{\underline{v}})$$

と書くことにしましょう. ([2], §17, を参照ください.) また, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, 緩和/エタール基本群 $\Pi_{\underline{v}}$ の定義に用いられた基点によって定まる $\underline{v}$ の $\overline{F}$ への延長を $\tilde{v}$ と書き, そして, $\overline{F}$ と $\tilde{v}$ によって定まる $K_{\underline{v}}$ の代数閉包を

$$\overline{F}_{\tilde{v}}$$

と, $\overline{F}_{\tilde{v}}$ によって定まる $K_{\underline{v}}$ の絶対 Galois 群を

$$G_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{F}_{\tilde{v}}/K_{\underline{v}})$$

としましょう. これにより, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が有限素点の場合には, それぞれ $K_{\underline{v}}$, $\overline{F}_{\tilde{v}}$ の下部加法加群として得られる加法的な加群

$$(K_{\underline{v}})_+, \quad (\overline{F}_{\tilde{v}})_+,$$

それぞれ $K_{\underline{v}}$, $\overline{F}_{\tilde{v}}$ の整数環

$$\mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}, \quad \mathcal{O}_{\overline{F}_{\tilde{v}}},$$

その下部加法加群として得られる加法的な加群

$$(\mathcal{O}_{K_{\underline{v}}})_+, \quad (\mathcal{O}_{\overline{F}_{\tilde{v}}})_+,$$

乗法的な $G_{\underline{v}}$ 作用付きモノイド

$$\mathcal{O}_{\overline{F}_{\tilde{v}}}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{F}_{\tilde{v}} \text{ 内の } 1 \text{ の巾根}\} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{F}_{\tilde{v}}}^{\times} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{F}_{\tilde{v}}}^{\geq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\overline{F}_{\tilde{v}}} \setminus \{0\} \subseteq \overline{F}_{\tilde{v}}^{\times},$$

それらの G_v 不変部分として生じる乗法的なモノイド

$$\mathcal{O}_{K_v}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \{K_v \text{ 内の } 1 \text{ の中根}\} \subseteq \mathcal{O}_{K_v}^\times \subseteq \mathcal{O}_{K_v}^> \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{K_v} \setminus \{0\} \subseteq K_v^\times,$$

そして, G_v 作用付き加群

$$\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^{\times\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times / \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\mu$$

などといった対象を考察することができます. また, [2], §6, の後半で述べたとおり, G_v 作用付き加群 $\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^{\times\mu}$ に対して, $\times\mu$ -Kummer 構造と呼ばれる整構造

$$\{\mathcal{I}_H^\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}((\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times)^H \hookrightarrow \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^{\times\mu}) \subseteq \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^{\times\mu}\}_{H \subseteq G_v: \text{開部分群}}$$

を付加することができます. (簡単に確認できるとおり, G_v の開部分群 H に対して, $\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^{\times\mu}$ や $(\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^{\times\mu})^H$ は $\mathbb{Q}_p$ 線型空間の構造を自然に有しますが, 一方, $\mathcal{I}_H^\kappa$ は有限階数自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群, 特に, コンパクトな加群です.)

初期 Θ データの定義から, $\mathbb{V}^{\text{bad}}$ の元 $v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ において, K 上の楕円曲線 $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E \times_F K$ は, 良還元を持ちません. 各 $v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ に対して, E_K の v での q パラメータを

$$q_v \in \mathcal{O}_{K_v}^>$$

と書き, そして, そのある $2l$ 乗根を

$$\underline{q}_v \stackrel{\text{def}}{=} q_v^{1/2l} \in \mathcal{O}_{K_v}^>$$

と書くことにしましょう. (したがって, $\underline{q}_v$ は, μ_{2l} 倍の不定性を除いてしか定まりません.)

再び, 上述の固定された初期 Θ データから出発して, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場 ([2], §20, を参照)

$$\dagger\mathfrak{D}_> \xleftarrow{\dagger\phi_\pm^{\Theta^\pm} = \{\dagger\phi_t^{\Theta^\pm}\}_{t \in T}} \dagger\mathfrak{D}_T = \{\dagger\mathfrak{D}_t\}_{t \in T} \xrightarrow{\dagger\phi_\pm^{\Theta^{\text{ell}}} = \{\dagger\phi_t^{\Theta^{\text{ell}}}\}_{t \in T}} \dagger\mathcal{D}^{\odot\pm},$$

$\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\text{NF}}$ Hodge 劇場 ([2], §21, を参照)

$$\dagger\mathcal{D}^\odot \xleftarrow{\dagger\phi_*^{\text{NF}} = \{\dagger\phi_j^{\text{NF}}\}_{j \in J}} \dagger\mathfrak{D}_J = \{\dagger\mathfrak{D}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger\phi_*^\Theta = \{\dagger\phi_j^\Theta\}_{j \in J}} \dagger\mathfrak{D}_>,$$

それら $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\text{NF}}$ Hodge 劇場の貼り合わせとして得られる $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ellNF}}$ Hodge 劇場 ([2], §26, を参照)

$$\begin{array}{ccc} \dagger\mathfrak{D}_> & \xleftarrow{\dagger\phi_\pm^{\Theta^\pm}} & \dagger\mathfrak{D}_T \xrightarrow{\dagger\phi_\pm^{\Theta^{\text{ell}}}} \dagger\mathcal{D}^{\odot\pm} \\ & \downarrow \text{glue} & \\ \dagger\mathfrak{D}_> & \xleftarrow{\dagger\phi_*^\Theta} & \dagger\mathfrak{D}_J \xrightarrow{\dagger\phi_*^{\text{NF}}} \dagger\mathcal{D}^\odot, \end{array}$$

$\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の上部構造である $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場 ([2], §20, を参照)

$$\dagger\mathfrak{F}_{\succ} \xleftarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta\pm}=\{\dagger\psi_t^{\Theta\pm}\}_{t\in T}} \dagger\mathfrak{F}_T = \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t\in T} \xrightarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta\text{ell}}=\{\dagger\psi_t^{\Theta\text{ell}}\}_{t\in T}} \dagger\mathcal{D}^{\odot\pm},$$

$\mathcal{D}\text{-}\Theta\text{NF}$ Hodge 劇場の上部構造である ΘNF Hodge 劇場 ([2], §25, を参照)

$$\dagger\mathcal{F}^{\otimes} \xleftarrow{\dagger\psi_{*}^{\text{NF}}=\{\dagger\psi_j^{\text{NF}}\}_{j\in J}} \dagger\mathcal{F}^{\odot} \xleftarrow{\dagger\psi_{*}^{\text{NF}}=\{\dagger\psi_j^{\text{NF}}\}_{j\in J}} \dagger\mathfrak{F}_J = \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j\in J} \xrightarrow{\dagger\psi_{*}^{\Theta}=\{\dagger\psi_j^{\Theta}\}_{j\in J}} \dagger\mathfrak{F}_{>} \dashrightarrow \dagger\mathcal{HT}^{\Theta}$$

— ただし,

$$\dagger\mathcal{HT}^{\Theta} = \{\dagger\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v\in\underline{\mathbb{V}}}, \dagger\mathfrak{F}^{\text{ll}},$$

$$\dagger\mathfrak{F}^{\text{ll}} = (\dagger\mathcal{C}^{\text{ll}}, \text{Prime}(\dagger\mathcal{C}^{\text{ll}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}}, \dagger\mathfrak{F}^{\text{ll}}, \{\dagger\rho_v\}_{v\in\underline{\mathbb{V}}})$$

— それら $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場, ΘNF Hodge 劇場の貼り合わせとして得られる (そして, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場の上部構造である) $\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場 ([2], §26, を参照)

$$\dagger\mathfrak{F}_{\succ} \xleftarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta\pm}} \dagger\mathfrak{F}_T \xrightarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta\text{ell}}} \dagger\mathcal{D}^{\odot\pm}$$

$\downarrow \text{glue}$

$$\dagger\mathcal{HT}^{\Theta} \xleftarrow{\dagger\psi_{*}^{\Theta}} \dagger\mathfrak{F}_{>} \xleftarrow{\dagger\psi_{*}^{\Theta}} \dagger\mathfrak{F}_J \xrightarrow{\dagger\psi_{*}^{\text{NF}}} \dagger\mathcal{F}^{\odot} \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\otimes}$$

という概念を定義することができます.

[2], §19, や [2], §21, の最後の議論でまとめられているとおり, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場や $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の構成で重要な役割を果たす対称性は,

“ $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) (\cong \mathbb{F}_l^{\times\pm}) \curvearrowright (\mathbb{F}_l \cong) \text{LabCusp}_K^{\pm}$ ” という加法的/幾何学的な対称性

です. 一方, [2], §21, の最後の議論でまとめられているとおり, $\mathcal{D}\text{-}\Theta\text{NF}$ Hodge 劇場や ΘNF Hodge 劇場の構成で重要な役割を果たす対称性は,

“ $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の部分商 $\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_{\underline{e}}(\underline{C}_K) (\cong \mathbb{F}_l^{*}) \curvearrowright (\mathbb{F}_l^{*} \cong) \text{LabCusp}_K$ ”

という乗法的/数論的な対称性

です. これら対称性について, それぞれ §4, §5 で, 簡単に復習しましょう.

§ 2. エタールの対象と Frobenius 的对象と Kummer 同型

Hodge 劇場の構成で重要な役割を果たす対称性の復習の前に, §2 と §3 において, [2] の §4 から §12 で行った “宇宙際 Teichmüller 理論による Diophantus 幾何学的不等式へのアプローチ” の説明を, “エタールの対象と Frobenius 的对象と Kummer 同型” という観点を中心に, 簡単に復習したいと思います.

宇宙際 Teichmüller 理論では, §3 で説明する予定である (あるいは, [2], §12, の “宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把版” を参照) 重要な 3 つ組 “ $\mathfrak{T}$ ” の適切な表示を確立するために, 関心のある様々な対象のエタールの構造/側面と Frobenius 的な構造/側面を区別して考察して, そして, それらを Kummer 同型で関連付けます. まず最初に, この §2 では, エタールの対象, Frobenius 的对象, そして, それらを結び付ける Kummer 同型について, 簡単に復習しましょう.

[2], §2, における例のとおり, エタールの ([2], §2, を参照) 対象は, しばしば, 適当な正則的 ([2], §5, を参照) 設定におけるエタール基本群や緩和基本群 (特に, Galois 群) (の同型物) として生じる抽象的な位相群によって表現されます. また, 再び [2], §2, での例のとおり, Frobenius 的 ([2], §2, を参照) 対象は, しばしば, 適当な正則的設定の下部単解的 ([2], §5, を参照) 構造 (の同型物) として生じる抽象的なモノイドによって表現されます. 例えば, §1 で導入された位相群やその作用付きモノイド $\Pi_{\underline{v}} \rightarrow G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ を考えた場合, 位相群 $\Pi_{\underline{v}}$ や $G_{\underline{v}}$ はエタールの対象であり, モノイド $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times}$ や $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ は Frobenius 的对象です.

同義反復的ですが, エタールの対象, Frobenius 的对象のいずれも, その対象を規定する正則的設定の正則構造を尊重する枠組みに対して, 両立性を持ちます. 一方, エタールの対象は, しばしば, 非正則的な枠組みにおいても, その両立性を発揮します. エタールの対象のそのような両立性の例を挙げましょう. $\mathbb{V}$ の元 $\underline{v} \in \mathbb{V}$ を有限素点とすると, 体 $\overline{F}_{\underline{v}}$ の正則構造 (つまり, 環構造) によって, 対数写像 $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times} \rightarrow (\overline{F}_{\underline{v}})_{+}$ を定義することができます. 当然ですが, 対数写像は, 写像の “左辺” と “右辺” の対象 (つまり, “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times}$ ” と “ $(\overline{F}_{\underline{v}})_{+}$ ”) の正則構造 (つまり, 環構造) と両立的ではありません. 一方, しかしながら, 良く知られているとおり, 対数写像は, 写像の “左辺” と “右辺” の対象への $G_{\underline{v}}$ の自然な作用と両立的です. つまり, 対数写像によって実現されている枠組みは,

考察下の設定の Frobenius 的对象の正則構造とは非両立的であるが, 一方, 考察下の設定のエタールの構造とは両立的

です. このように, “対数写像” という Frobenius 的对象の正則構造と非両立的な枠組みにおいて, エタールの構造は両立性を持ちます. そして, この両立性に, 次に説明を行う復元アルゴリズムの単遠アーベル性 (すなわち, 純群論性) を組み合わせることで, エタールの対象に剛性がもたらされます.

[2], §2, での例のとおり, 単遠アーベル的 (復元) アルゴリズムによって, エタールの対象から, モノイドや環などといった数学的对象を復元/構成することが可能です. 具体的には, 例えば [2], §2, での例のとおり, $\underline{v} \in \mathbb{V}$ を有限素点とすると, $G_{\underline{v}}$ の同型物 G から, 位相群作用付きモノイド $G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times}$, $G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ の同型物 $G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(G)$, $G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}(G)$ を復元/構成することが可能です. あるいは, [2], §16, (f), の直前の議論と (たとえ $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ であっても) 同様に, $\Pi_{\underline{v}}$ の同型物 Π から, 位相群作用付き (代数閉) 体 $G_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{F}_{\underline{v}}$ の同型物を復元/構成することが可能です. (この観点から, $\Pi_{\underline{v}}$ を “エタールのな正則構造” と考えることができます.) このような “エタールの出力” (つまり, 単遠アーベル的アルゴリズムを通じてエタールの対象から復元/構成された対象) も, “エタールの対象” と見做す

ことにします. エタールの出力を Frobenius 的対象と見做すためには, “単遠アーベル的アルゴリズムによって復元/構成された” というその “出自” の忘却を実行する必要があります — この議論の内容の数学的な定式化の 1 つの (代表的な) 側面は, 以下のとおりです: 例えば上で例として挙げた “ $G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(G)$ ” の場合,

- “エタールの出力としての自己同型” を, “ G の自己同型が関手的に誘導する $G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(G)$ の自己同型” と定義して,
- “出自の忘却を実行した対象としての自己同型” を, “抽象的な位相群作用付きモノイド $G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(G)$ の自己同型” と定義

します. したがって, エタールの出力の場合には同義反復的な同型

$$\mathrm{Aut}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\text{エタールの出力としての } G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(G))$$

が存在する一方, 出自の忘却を実行した対象の場合には, ([2], §3, の議論から)

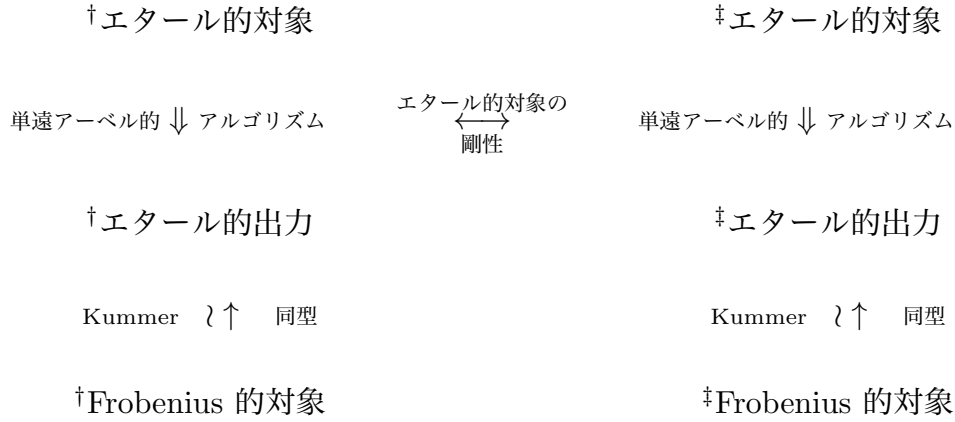
$$\mathrm{Aut}(G) \times \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\text{出自の忘却を実行した対象としての } G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(G))$$

という同型が存在します. エタールの対象から Frobenius 的対象への “忘却” による移行によって, ($\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ の分) 剛性が失われたことになり, 特に, これらはまったく異なる対象と解釈されます.

[2], §3, での説明のとおり, Kummer 同型を考えることによって, Frobenius 的対象とエタールの出力の間の適切な — つまり, (適当な不定性のもと) 正則構造を用いた従来の同一視と一致する — 同型が得られます. そして, 再び [2], §3, での説明のとおり, Kummer 同型は, しばしば, 円分剛性同型 — つまり, 円分物の間の同型であって, (適当な不定性のもと) 正則構造を用いた従来の同一視と一致するもの — から生じます:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{エタールの対象} & \xrightarrow[\text{アルゴリズム}]{\text{単遠アーベル的}} & \text{エタールの出力} & \xleftarrow[\text{Kummer 同型}]{\sim} & \text{Frobenius 的対象.} \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \text{円分剛性} &
 \end{array}$$

この §2 で復習した概念を用いて,



という図を描くことができます. つまり, (“ $\dagger$ ”, “ $\ddagger$ ” という記号でそれぞれラベル付けされた) 2 つの独立した正則的設定から出発して,

- (上で観察した “エタールの構造の剛性” の例のように) それら正則的設定を, それぞれの正則的設定に属するあるエタールの対象が剛性を持つような形で結び付けて,
- エタールの対象から単遠アーベル的アルゴリズムによってエタールの出力を復元/構成して,
- Kummer 同型によって, エタールの出力と Frobenius の対象を関連付けて,
- “エタールの対象の剛性” と “Kummer 同型” の合成として, それぞれ独立した正則的設定に属する Frobenius の対象を関連付ける

ことが可能です. これが, **単遠アーベル的輸送** (mono-anabelian transport) です. ([2], §3, や [2], §6, を参照ください.) Frobenius の対象からエタールの対象への Kummer 同型を通じた移行を, **Kummer 離脱** (Kummer-detachment — cf. [9], Introduction) と呼ぶことにしましょう ([2], §3, も参照ください):

$$\text{Kummer 離脱} + \text{エタールの対象の剛性} \implies \text{単遠アーベル的輸送.}$$

§ 3. 多輻的 Kummer 両立系

[2] の §4 から §12 まですで与えられた説明のとおり, Diophantus 幾何学的不等式 (§26 の冒頭の主張を参照) を得るために, 我々は,

- (§1 で固定した) 楕円曲線 E に関連する正則的設定の, 2 つの独立した “コピー” を用意して,

- それら 2 つの正則的設定を

テータ関数の特殊値 $\{(q_v^{1^2}, q_v^{2^2}, \dots, q_v^{(l^*)^2})\}_{v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}}$ (§4, (a), や §7, (b), を参照)

$$\xrightarrow{\Theta} q \text{ パラメータ (の } 2l \text{ 乗根)} \{q_v\}_{v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}}$$

という形で結び付けて,

- この結び付き Θ の“左辺”と“右辺”がそれぞれ定める数論的直線束の次数を比較

します. 楕円曲線 E に関連するそのような正則的設定に属する

- (a) 各々の $v \in \mathbb{V}$ に対する局所的な対数殻 (つまり, 数論的直線束を定義するための局所的加法的整構造 “ $(\mathcal{O}_{K_v})_+$ ” の近似 — [2], §8, を参照),
- (b) テータ関数の特殊値 $\{(q_v^{1^2}, q_v^{2^2}, \dots, q_v^{(l^*)^2})\}_{v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}}$ (とその (a) への作用),
- (c) 数体 F_{mod} (とその (a) への作用)

というデータからなる 3 つ組を

$$\mathfrak{T}$$

と書くことにしましょう. Diophantus 幾何学的不等式を得るためにもっとも肝心となる“数論的直線束の次数の比較”は, 結び付き Θ に対する, この 3 つ組 $\mathfrak{T}$ の一種の両立性を用いて実行されます ([9], Corollary 3.12, を参照). そして, この一種の両立性が, 宇宙際 Teichmüller 理論の主定理 ([9], Theorem 3.11, を参照) の基本的な内容です:

宇宙際 Teichmüller 理論の主定理, つまり, Θ に対する $\mathfrak{T}$ の一種の両立性

$$\implies \Theta \text{ の “左辺” と “右辺” の次数の比較 } \implies \text{Diophantus 幾何学的不等式.}$$

一方, 上述の “ Θ ” や “ $\mathfrak{T}$ ” の説明から,

結び付き Θ は, その“左辺”と“右辺”にそれぞれ対応する正則的設定の正則構造とは両立的ではないにも関わらず, 3 つ組 $\mathfrak{T}$ — の少なくとも従来の定義/構成の方法 — は, $\mathfrak{T}$ が属する正則的設定の正則構造に強く依存している

という事実を簡単に確認することができます. つまり, (一種の) 両立性を主張したい対象 $\mathfrak{T}$ は, 正則的な対象であるにも関わらず, 2 つの正則的設定の間の結び付き Θ は, 設定の正則構造を放棄して単解的設定へ移行しなければ考察することはできないということです. この観察により, 所望の両立性を証明するためには,

従来的には正則的である 3 つ組 $\mathfrak{S}$ を, 結び付き Θ の (その定義から単解的な) コアの対象 (つまり, 結び付き Θ で両立/共有可能な対象 — [2], §5, を参照) の観点から記述する必要がある

ということになります. [2], §7, で解説された用語を用いるならば, 所望の両立性を証明するためには,

結び付き Θ で両立/共有可能な対象をコア的データとする, 3 つ組 $\mathfrak{S}$ の多輻的な表示を確立する必要がある

ということになります:

$\mathfrak{S}$ の多輻的な (= コアの対象の観点からの) 表示 $\implies \Theta$ に対する $\mathfrak{S}$ の一種の両立性.

§2 の冒頭で述べたとおり, 宇宙際 Teichmüller 理論では, $\mathfrak{S}$ の多輻的な表示を確立するために, 関心のある様々な対象のエタールの構造/側面と Frobenius 的な構造/側面を区別して考察して, そして, それらを Kummer 同型で関連付けます. §2 で行った復習から, 所望の “(Frobenius 的) $\mathfrak{S}$ の多輻的な表示” を得るためには,

“ $\mathfrak{S}$ ” をエタールの出力とする多輻的な単遠アーベル的アルゴリズムを与えて, そして, “ $\mathfrak{S}$ ” に対する多輻的な Kummer 同型を確立

すれば充分であるということがわかります:

$\mathfrak{S}$ に対する多輻的 Kummer 離脱

(= 多輻的エタールの $\mathfrak{S}$ の構成 + $\mathfrak{S}$ に対する多輻的 Kummer 同型)

$\implies \mathfrak{S}$ の多輻的な表示.

また, §2 での Kummer 同型の説明で触れたとおり, Kummer 同型は円分剛性同型から生じます. したがって, $\mathfrak{S}$ に対する多輻的な Kummer 同型を確立するためには, $\mathfrak{S}$ に対する多輻的な円分剛性を確立すれば充分です:

$\mathfrak{S}$ に対する多輻的円分剛性 $\implies \mathfrak{S}$ に対する多輻的 Kummer 同型.

[2], §6, や [2], §8, で説明されているとおり, $\mathfrak{S}$ を構成する対象の 1 つである (a) (= 対数殻) は, そもそも, コアの対象の 1 つです. それでは, (b) (= テータ関数の特殊値) と (c) (= 数体) に対する “多輻的エタールの表示” と “多輻的円分剛性” は, どのようにして得られるのでしょうか. [2], §11, で説明されているとおり, 我々は, それぞれ (b) と (c) の多輻的な表示を得るために,

(b') テータ関数,

(c') κ コア的関数

の多輻的な表示を経由します. 結論としては,

(b') の多輻的エタールの表示として, [2], §16, (e), で与えられている表示,

(c') の多輻的エタールの表示として, [2], §24, (i), で与えられている表示

を用いて,

(b') のそのような表示の “コア的部分と輻的 ([2], §7, を参照) 部分との分離” を, [2], §16, (h), で与えられている分解によって実現,

(c') のそのような表示の “コア的部分と輻的部分との分離” を, E の非自明な 2 等分点から定まる点に付随する分解群による Galois 代入から生じる分解 ([2], §24, の冒頭の “ κ コア的関数” の定義の 3 つ目の “ $\bullet$ ” を参照) によって実現

して, そして,

(b') に対する多輻的円分剛性として, [2], §15, で説明された “単テータ環境の円分剛性性質によって得られる円分剛性同型”,

(c') の多輻的円分剛性として, [2], §24, で説明された “初等的な事実 $\mathbb{Q}_{>0} \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \{1\}$ から得られる円分剛性同型”

を用います.

我々に残された課題は, 上述の様々な “多輻的 Kummer 離脱に関連する対象たち” を大域的に編成して, そのような対象たちのなす大きな両立的な系, つまり, “多輻的 Kummer 両立系” を構成することです:

([2] で説明された様々な対象による) “多輻的 Kummer 両立系” の編成

$\implies$ $\mathfrak{T}$ の多輻的な表示 $\implies$ Θ に対する $\mathfrak{T}$ の一種の両立性

$\implies$ Θ の “左辺” と “右辺” の次数の比較 $\implies$ Diophantus 幾何学的不等式.

§4 から §25 までの間で, そのような複雑な多輻的 Kummer 両立系の編成/設営の説明を行いましょう.

§ 4. Hodge 劇場の加法的対称性

各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, $K_{\underline{v}}$ 上の双曲的曲線 $\underline{X}_{\underline{v}}$ のカスプのなす集合

$$\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$$

の上には, 考察下の幾何学的設定から, 自然に $\mathbb{F}_l^{\pm}$ 群の構造が定まります. つまり, $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ は, $\mathbb{F}_l$ との間の全単射の自然な $\{\pm 1\}$ 軌道を有します:

$$\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm} \xrightarrow{\{\pm 1\} \curvearrowright} \mathbb{F}_l \left(\cong \left\{ l^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l-1}{2}, l^* - 1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -l^* + 1, -l^* \right\} \right).$$

そして, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に含まれる場合には, $\underline{X}_{\underline{v}}$ のコンパクト化の上の適切な連結緩和 Kummer 対数エタール被覆上で, テータ関数

$$\underline{\Theta}_{\underline{v}}$$

という重要な関数を定義することができて, その上, この関数に代入するべき点たちの内, 宇宙際 Teichmüller 理論において重要となるものは, この集合 $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ の元たちによって自然にラベル付けされます. 特に, 特殊値に関して,

(a) $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ の元

$$t \in \{l^*, l^* - 1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -l^* + 1, -l^*\} \xleftarrow{\sim \{\pm 1\} \curvearrowright} \text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$$

でラベル付けされた代入点でのテータ関数 $\underline{\Theta}_{\underline{v}}$ の値は, $\mu_{2l} \cdot \underline{q}_{\underline{v}}^{t^2} \subseteq \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^{\times}$ の元となる

という事実が知られています. ([2], §13, (m), を参照ください.)

上の議論に登場する “ $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ ” の大域版として, K 上の双曲的曲線 $\underline{X}_K$ のカスプのなす集合を

$$\text{LabCusp}_K^{\pm}$$

と書くことにしましょう. すると, 初期 Θ データの一部である $\underline{\epsilon}$ と, 再び考察下の幾何学的設定を用いることによって, この集合 $\text{LabCusp}_K^{\pm}$ の上にも自然に $\mathbb{F}_l^{\pm}$ 群の構造を定めることができます. そして, 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, 自然な射 $\underline{X}_{\underline{v}} \rightarrow \underline{X}_K$ が, (それぞれの $\mathbb{F}_l^{\pm}$ 群の構造と両立的な) 全単射

$$\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm} \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}_K^{\pm}$$

を誘導します. この事実により,

(b) 大域的なカスプの集合 $\text{LabCusp}_K^{\pm}$ によって, 局所的なカスプの集合たち (つまり, 局所的な代入点のラベルの集合たち) $\{\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}\}_{\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}}$ が, 一斉に大域的に管理されている

と考えることができます. その上,

(c) $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) = \text{Gal}(\underline{X}_K/C_K)$ は,

$$\mathbb{F}_l^{\times \pm} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_l \rtimes \{\pm 1\}$$

という “加法的” な群の同型物であり, 自然な作用 $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) \curvearrowright \text{LabCusp}_K^{\pm}$ は, 自然な作用 $\mathbb{F}_l^{\times \pm} \curvearrowright \mathbb{F}_l$ の同型物となっている ([2], §17, を参照)

ため, 特に,

(d) 加法的作用 $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm}) \curvearrowright (\mathbb{F}_l \cong) \text{LabCusp}_K^\pm$ によって, 単数的/コア的なラベル $0 \in \text{LabCusp}_K^\pm$ と値群的/輻的なラベル $\in \text{LabCusp}_K^\pm \setminus \{0\}$ を幾何学的に置換することができる

という事実が従います. ([2], §20, を参照ください.)

これまでに行った $\text{LabCusp}_v^\pm, \text{LabCusp}_K^\pm$ やその対称性に関する議論 (の一部) を, Hodge 劇場のエタールの観点から記述しましょう. §1 で復習した $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の部品である $\mathcal{D}$ 素点縞 ${}^\dagger\mathcal{D}_\succ = \{{}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}}$ の各成分 ${}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}$ から, $\text{LabCusp}_v^\pm$ の同型物

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$$

を単遠アーベル的に復元/構成することができます. 具体的には, 例えば $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ の場合には, ${}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}$ は, $\underline{X}_{\underline{v}}$ の緩和基本群 $\Pi_{\underline{v}}$ の同型物 ${}^\dagger\Pi_{\underline{v}}$ とだいたい等価なデータです. この同型物 ${}^\dagger\Pi_{\underline{v}}$ から, $\underline{X}_{\underline{v}}$ の緩和基本群

$$(\Pi_{\underline{v}} \subseteq) \Pi_{\underline{v}}^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^{\text{temp}}(\underline{X}_{\underline{v}})$$

の同型物 $({}^\dagger\Pi_{\underline{v}} \subseteq) {}^\dagger\Pi_{\underline{v}}^\pm$, 及び, そのカスプ的惰性群たち (に対応する部分群たち) を単遠アーベル的に復元/構成することが可能であるため,

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \{{}^\dagger\Pi_{\underline{v}}^\pm \text{ のカスプ的惰性群 }\} / \text{Inn}({}^\dagger\Pi_{\underline{v}}^\pm)$$

として, $\text{LabCusp}_v^\pm$ を復元/構成することができます. また, やはり §1 で復習した $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の部品である ${}^\dagger\mathcal{D}^{\odot \pm}$ から, $\text{LabCusp}_K^\pm$ の同型物

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}^{\odot \pm})$$

を単遠アーベル的に復元/構成することができます. 具体的には, ${}^\dagger\mathcal{D}^{\odot \pm}$ は, $\underline{X}_K$ のエタール基本群

$$\Pi^{\odot \pm} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_K)$$

の同型物 ${}^\dagger\Pi^{\odot \pm}$ とだいたい等価なデータです. ですので, ${}^\dagger\Pi^{\odot \pm}$ からそのカスプ的惰性群たち (に対応する部分群たち) を単遠アーベル的に復元/構成することができるという事実を用いることによって,

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}^{\odot \pm}) \stackrel{\text{def}}{=} \{{}^\dagger\Pi^{\odot \pm} \text{ のカスプ的惰性群 }\} / \text{Inn}({}^\dagger\Pi^{\odot \pm})$$

として, $\text{LabCusp}_K^\pm$ を復元/構成することができます. ここで, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の構造を用いて, $({}^\dagger\mathcal{D}_0 \in {}^\dagger\mathcal{D}_T$ を経由して) ${}^\dagger\mathcal{D}_\succ$ と ${}^\dagger\mathcal{D}^{\odot \pm}$ を関連付けることによって, 自然な全単射

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}^{\odot \pm})$$

が得られることに注意しましょう. 様々な $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する “ $\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$ ” をこの全単射たちによって同期化することで, 集合

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$$

と (同義反復的な) 全単射

$$\mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm})$$

を定義することができます. その上, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\mathrm{ell}}$ Hodge 劇場や $\Theta^{\pm\mathrm{ell}}$ Hodge 劇場に登場する添字集合 T は, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\mathrm{ell}}$ Hodge 劇場の構造によって, 集合 $\mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm})$ と — し
たがって, $\mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ})$ と — (それぞれの $\mathbb{F}_l^{\pm}$ 群の構造と両立的な形で) 自然
に関連付けられます:

$$\mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm}) \xrightarrow{\sim} T.$$

以降, この全単射を用いて,

$$\mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ}) \text{ と } \mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm}) \text{ と } T \text{ を同一視}$$

しましょう. これが, 上記の (b) に関わる議論の “Hodge 劇場版” です. ([2], §20, を参照
ください.) ここで,

(e) 例えば $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\mathrm{bad}}$ の場合, 上述の全単射 $\mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm})$
は, 自然な射 $\underline{X}_{\underline{v}} \rightarrow \underline{X}_K$ から定まるある多重 ([2], §6, を参照) (単) 射 $\dagger\Pi_{\underline{v}}^{\pm} \hookrightarrow$
 $\dagger\Pi^{\odot\pm}$ が誘導する全単射

$$\{\dagger\Pi_{\underline{v}}^{\pm} \text{ のカスプ的惰性群 } \} / \mathrm{Inn}(\dagger\Pi_{\underline{v}}^{\pm}) \xrightarrow{\sim} \{\dagger\Pi^{\odot\pm} \text{ のカスプ的惰性群 } \} / \mathrm{Inn}(\dagger\Pi^{\odot\pm})$$

として生じる

という事実を強調しておきます. (このような事実から生じるある問題が, §8 で議論され
ます.)

次に, 副有限群 $\dagger\Pi^{\odot\pm}$ から, C_K のエタール基本群

$$(\Pi^{\odot\pm} \subseteq) \Pi^{\mathrm{cor}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1^{\mathrm{ét}}(C_K)$$

に対応する副有限群 $(\dagger\Pi^{\odot\pm} \subseteq) \dagger\Pi^{\mathrm{cor}}$ や, $\Pi^{\odot\pm} \subseteq \Pi^{\mathrm{cor}}$ の幾何学的部分

$$\Delta^{\odot\pm} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1^{\mathrm{ét}}(\underline{X}_K \times_K \overline{F}) \subseteq \Delta^{\mathrm{cor}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1^{\mathrm{ét}}(C_K \times_K \overline{F})$$

に対応する部分群 $\dagger\Delta^{\odot\pm} \subseteq \dagger\Delta^{\mathrm{cor}}$ の, 単遠アーベル的な復元/構成が知られていることを
指摘します. そして,

(f) この単遠アーベル的事実により考察可能な図式

$$\dagger\Delta^{\mathrm{cor}} / \dagger\Delta^{\odot\pm} \xrightarrow{\sim} \dagger\Pi^{\mathrm{cor}} / \dagger\Pi^{\odot\pm} \rightarrow \mathrm{Out}(\dagger\Pi^{\odot\pm}) = \mathrm{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm}) \leftarrow \mathrm{Aut}(\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\mathrm{ell}}}) \rightarrow \mathrm{Aut}(T)$$

が, $(\mathrm{LabCusp}_K^{\pm} \xrightarrow{\sim} T) \left(\xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l \right)$ に関する $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性

$$(\mathbb{F}_l^{\times\pm} \cong) \dagger\Delta^{\mathrm{cor}} / \dagger\Delta^{\odot\pm} \xrightarrow{\sim} \dagger\Pi^{\mathrm{cor}} / \dagger\Pi^{\odot\pm} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\mathrm{ell}}}) \rightarrow \mathrm{Aut}(T)$$

を定める

ことがわかります. これが, 上記の (c) や (d) に関わる議論の “Hodge 劇場版” です. その上, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場全体の自己同型群は, $\{\pm 1\}$ ($\subseteq \mathbb{F}_l^{\times\pm}$) に対応しており, この構造により, ${}^\dagger\mathcal{D}_\succ = \{{}^\dagger\mathcal{D}_{\succ,w}\}_{w \in \underline{\mathbb{V}}}$ の各局所成分 ${}^\dagger\mathcal{D}_{\succ,v}$ での $\{\pm 1\}$ の作用が, 大域的に同期化/管理されているのです. ([2], §20, を参照ください.)

§ 5. Hodge 劇場の乗法的対称性

[2], §17, での説明のとおり, $0 \in \mathbb{F}_l^{\{\pm 1\}^\vee} \curvearrowright \text{LabCusp}_K^\pm$ に対応する $\underline{X}_K$ のカスプや, (被覆 $\underline{X}_K \rightarrow \underline{C}_K$ による) その像として得られる $\underline{C}_K$ のカスプは, 零カスプと呼ばれます. その上, 各 $v \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, 零カスプの局所化として生じる $\underline{X}_v$ や $\underline{C}_v \stackrel{\text{def}}{=} \underline{C}_K \times_K K_v$ のカスプも, 零カスプと呼ばれます. 各 $v \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, K_v 上の双曲的軌道曲線 $\underline{C}_v$ の非零カスプのなす集合

$$\text{LabCusp}_v$$

は, 被覆 $\underline{X}_v \rightarrow \underline{C}_v$ を通じて,

$$(\text{LabCusp}_v^\pm \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$$

という集合と自然に同一視されるので, 特に,

$$\mathbb{F}_l^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_l^\times / \{\pm 1\}$$

という集合との間の全単射を有します:

$$\text{LabCusp}_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*.$$

そして, $v \in \underline{\mathbb{V}}$ が $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に含まれる場合には, §4, (a), の観察から, $\text{LabCusp}_v (\cong \mathbb{F}_l^*)$ の $\text{LabCusp}_v^\pm (\cong \mathbb{F}_l)$ の部分商としてのこの構造は, “代入点のラベルの集合からテータ関数 $\underline{\Theta}_v$ の特殊値の集合への移行” と両立的です. すなわち,

(a) 非零ラベル

$$a, b \in \{l^*, l^* - 1, \dots, 2, 1, -1, -2, \dots, -l^* + 1, -l^*\} \xrightarrow[\sim]{\{\pm 1\}^\vee} \text{LabCusp}_v^\pm \setminus \{0\}$$

に対して, それぞれ a と b の LabCusp_v への像が一致することと, それぞれ a と b でラベル付けされた代入点でのテータ関数 $\underline{\Theta}_v$ の値が μ_{2l} 倍の差を除いて一致することは同値

となります. ([2], §18, を参照ください.)

上の議論の “LabCusp $_v$ ” の大域版として, K 上の双曲的軌道曲線 $\underline{C}_K$ の非零カスプのなす集合を

$$\text{LabCusp}_K$$

と書くことにしましょう. すると, “ $\text{LabCusp}_{\underline{v}}$ ” の場合と同様に, この集合 LabCusp_K が, $\mathbb{F}_l^*$ との間の自然な全単射を有することがわかります. そして, 自然な射 $\underline{C}_{\underline{v}} \rightarrow \underline{C}_K$ が, 全単射

$$\text{LabCusp}_{\underline{v}} \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}_K$$

を定めます. この事実により,

(b) 大域的な非零カスプの集合 LabCusp_K によって, 局所的な非零カスプの集合たち (つまり, テータ関数の非単数的特殊値たちのなす集合たち) $\{\text{LabCusp}_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}}$ が, 一斉に大域的に管理されている

と考えることができます. ([2], §18, を参照ください.)

ここで, F_{mod} が E のモジュライの体であるという事実から, $\underline{C}_K$ の (軌道曲線としての) 自己同型群 $\text{Aut}(\underline{C}_K)$ からの自然な射 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Aut}(K)$ が, 部分群 $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}}) \subseteq \text{Aut}(K)$ を経由することがわかります. そして, $\underline{C}_K$ の K 上の自己同型は自明なものしか存在しないという事実から, この射 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ は, 単射となります:

$$\text{Aut}(\underline{C}_K) \hookrightarrow \text{Gal}(K/F_{\text{mod}}).$$

$\text{Aut}(\underline{C}_K)$ の部分群

$$\text{Aut}_{\underline{\epsilon}}(\underline{C}_K) \subseteq \text{Aut}(\underline{C}_K)$$

を, $\underline{C}_K$ のカスプのなす集合への $\text{Aut}(\underline{C}_K)$ の自然な作用に関する $\underline{\epsilon} \in \text{LabCusp}_K$ の固定化部分群として定義しましょう. また,

$$E[l](\overline{F}) \twoheadrightarrow Q$$

を, (l 次の Galois) 被覆 $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ から定まる (1 次元 $\mathbb{F}_l$ 線型空間である) 商とします. すると, $\underline{X}_K$ の零カスプを用いることによって, 自然な全単射

$$\text{LabCusp}_K \xrightarrow{\sim} (Q \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$$

を定めることができます. そして, 自然な ($\{\pm 1\}$ の作用という不定性が付加された) 表現 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(Q)/\{\pm 1\}$ は, 群の同型

$$\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_{\underline{\epsilon}}(\underline{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$$

を誘導します. ([2], §21, を参照ください.) これらの考察により,

(c) 単射 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \hookrightarrow \text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ と同型 $\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_{\underline{\epsilon}}(\underline{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$ により, $\mathbb{F}_l^*$ を自然に $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の部分商と見做せ,

(d) 同型 $\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_{\underline{\epsilon}}(\underline{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$ と自然な作用 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \curvearrowright \text{LabCusp}_K$ により, LabCusp_K を, “乗法的” な群 $\mathbb{F}_l^*$ 上のトーサーと見做せる

ことがわかります. そして, その上, 部分群 $\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) (\subseteq \text{Aut}(\underline{C}_K) \subseteq \text{Gal}(K/F_{\text{mod}}))$ の元たちを $\underline{V} \subseteq \mathbb{V}(K)$ の元たちに作用させることで得られる $\mathbb{V}(K)$ の部分集合を

$$(\underline{V} \subseteq) \quad \underline{V}^{\pm \text{un}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \cdot \underline{V} \subseteq \mathbb{V}(K)$$

と書くことにすると,

(e) $\mathbb{F}_l^*$ 作用による $\underline{V}^{\pm \text{un}}$ の軌道のなす集合と LabCusp_K との間に, $\mathbb{F}_l^*$ の作用と両立的な全単射が存在する

ことがわかります. ([2], §21, を参照ください.)

これまでに行った LabCusp_v , LabCusp_K やその対称性に関する議論 (の一部) を, Hodge 劇場のエタールの観点から記述しましょう. §1 で復習した $\mathcal{D}$ - Θ NF Hodge 劇場の部品である $\mathcal{D}$ 素点縞 ${}^\dagger \mathcal{D}_> = \{{}^\dagger \mathcal{D}_{>, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \underline{V}}$ の各成分 ${}^\dagger \mathcal{D}_{>, \underline{v}}$ から, LabCusp_v の同型物

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}_{>, \underline{v}})$$

や自然な全単射 $\text{LabCusp}_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$ の同型物

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}_{>, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$$

を単遠アーベル的に復元/構成することができます. 様々な $\underline{v} \in \underline{V}$ に対する “ $\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}_{>, \underline{v}})$ ” をこの全単射たちによって同一視することで, 集合

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}_>)$$

と (同義反復的な) 全単射

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}_>) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$$

を定義することができます. また, やはり §1 で復習した $\mathcal{D}$ - Θ NF Hodge 劇場の部品である ${}^\dagger \mathcal{D}^\odot$ から, LabCusp_K の同型物

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}^\odot)$$

を単遠アーベル的に復元/構成することができます. 具体的には, ${}^\dagger \mathcal{D}^\odot$ は, $\underline{C}_K$ のエタール基本群

$$\Pi^\odot \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^{\text{ét}}(\underline{C}_K)$$

の同型物 ${}^\dagger \Pi^\odot$ とだいたい等価なデータです. ですので, ${}^\dagger \Pi^\odot$ からその (非零) カスプ的惰性群たち (に対応する部分群たち) を単遠アーベル的に復元/構成することができるという事実を用いることによって,

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}^\odot) \stackrel{\text{def}}{=} \{{}^\dagger \Pi^\odot \text{ の非零カスプ的惰性群 }\} / \text{Inn}({}^\dagger \Pi^\odot)$$

として, $\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot)$ を復元/構成することが可能です. その上, $\mathcal{D}$ - Θ NF Hodge 劇場や Θ NF Hodge 劇場に登場する添字集合 J は, $\mathcal{D}$ - Θ NF Hodge 劇場の構造によって, 集合 $\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm})$ や $\mathbb{F}_l^*$ と自然に関連付けられます:

$$\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot) \xrightarrow{\sim} J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*.$$

以降, この全単射を用いて,

$$\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot) \text{ と } J \text{ を同一視}$$

することがあります. そして, $\mathcal{D}$ - Θ NF Hodge 劇場の構造から, 添字集合 J の元を与える毎に, 全単射

$$\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}_{>}) \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot)$$

を定めることができます. ([2], §18, の最後の議論や [2], §21, を参照ください.) これが, 上記の (b) に関わる議論の “Hodge 劇場版” です. ([2], §21, を参照ください.)

次に, ${}^\dagger\mathcal{D}^\odot$ から $(\text{Out}({}^\dagger\Pi^\odot))$ の $\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot)$ への自然な作用を考えることによって, 部分群 $\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \subseteq \text{Aut}(\underline{C}_K)$ に対応する部分群

$$\text{Aut}_\epsilon({}^\dagger\mathcal{D}^\odot) \subseteq \text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot)$$

の復元/構成が可能であることを観察しましょう. そして, (c) の直前の議論と同様の議論によって, 同型

$$\text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot)/\text{Aut}_\epsilon({}^\dagger\mathcal{D}^\odot) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$$

を定義することができ, その上,

(f) これら単遠アーベル幾何学的事実により考察可能な図式

$$\text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm})/\text{Aut}_\epsilon({}^\dagger\mathcal{D}^{\odot\pm}) \longleftarrow \text{Aut}({}^\dagger\phi_*^{\text{NF}}) \longrightarrow \text{Aut}(J)$$

が, $(\text{LabCusp}_K \xrightarrow{\sim} J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*)$ に関する $\mathbb{F}_l^*$ 対称性

$$\mathbb{F}_l^* \xleftarrow{\sim} \text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}^\odot)/\text{Aut}_\epsilon({}^\dagger\mathcal{D}^\odot) \xleftarrow{\sim} \text{Aut}({}^\dagger\phi_*^{\text{NF}}) \longrightarrow \text{Aut}(J)$$

を定める

ことがわかります. これが, 上記の (c) や (d) に関わる議論の “Hodge 劇場版” です. ([2], §21, を参照ください.)

§ 6. 行進

Hodge 劇場に登場する添字集合 T に対して,

$$T^\times \stackrel{\text{def}}{=} T \setminus \{0\}, \quad |T| \stackrel{\text{def}}{=} T/\{\pm 1\}, \quad T^* \stackrel{\text{def}}{=} T^\times/\{\pm 1\} = |T| \setminus \{0\}$$

と書くことにします. (その定義から, T は $\mathbb{F}_l^\pm$ 群の構造を有するため, 上述のような部分商が意味を持つことに注意しましょう.) したがって, [2], §26, で説明が与えられた貼り合わせ同型の定義から, 自然な全単射

$$(|T| \supseteq) \quad T^* \xrightarrow{\sim} J$$

が存在します. また, $t \in T$ の $|T|$ 内の像を

$$|t| \in |T|$$

と書くことにします. 記号の濫用ですが, 以下, しばしば $|0|$ と 0 を同一視することがあります.

§4 や §5 で説明したとおり, Hodge 劇場に登場する添字集合 (から生じる集合) $J \subseteq |T|$ と $\mathbb{F}_l^* \subseteq |\mathbb{F}_l|$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_l / \{\pm 1\}$ — 上で定義した記号を参照) との間には, Hodge 劇場の構造から定まる全単射が存在します. 一方, 値群の変形の実現を目的とするリンクによって, この全単射を共有することはできません. つまり, ここで議論になっているデータは, 登場する代数曲線の幾何学的基本群に依存する単輻的なデータであり, 特に, コア的でないということです. (詳しくは [10], Remark 3.6.3, (ii), を参照ください.) したがって, Hodge 劇場の構造から得られる $J \subseteq |T|$ という集合 (そのものや, それら) に対する “ $\mathbb{F}_l^* \subseteq |\mathbb{F}_l|$ ” という解釈 — したがって, それに加えて, $J (\subseteq |T|)$ に働く重要な対称性 — を, 値群の変形を表現するリンクの両側に対して同時に意味を持つ形で実現することはできません.

値群の変形を表現するリンクの両側に対して同時に意味を持つ形で “ $J \subseteq |T|$ ” という集合を理解するためのもっとも安直な方法として, (例えば J の方を考えた場合) J をただの “濃度 l^* の抽象的な集合” として扱う, というアプローチが考えられます. すなわち, 別の言い方をすれば, リンクの両側に存在するそれぞれ “ J ” を, J の自己全単射全体のなす群の作用という不定性のもとで扱うということです. 当然ですが, このように考えれば — 同義反復的に — リンクの両側に対して同時に意味を持つ形で, J という集合を取り扱うことが可能になります:

$$\begin{array}{ccc} J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^* & \xrightarrow[\text{放棄}]{\text{付加構造を}} & \text{任意の置換} \curvearrowright J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^* \\ & & j_1 \mapsto ? \\ \implies J \ni \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} & \in \mathbb{F}_l^* = \{1, \dots, l^*\} & \\ & & j_{l^*} \mapsto ? \end{array}$$

しかしながら, 以下の理由によって, 我々は, この “もっとも安直なアプローチ” を採用することができません. このアプローチを採用すると, 直前の図が示すように, $\mathbb{F}_l^* = \{1, \dots, l^*\}$ の各元に対して, 対応する J の元として, $\sharp J = l^*$ 通りの可能性を考慮しなければならなくなります. その結果, 全体として, J と $\mathbb{F}_l^*$ との関連として, $\sharp J \sharp J = (l^*)^{l^*}$ 通りの可能性を考慮しなければなりません. 一方, この可能性の個数 — つまり, 不定

性 — は、我々の目標の観点からは多過ぎます。特に、楕円曲線の高さの評価の観点から考えると、この過大な不定性を許容してしまうと、所望の不等式よりも“弱い不等式”しか得ることができなくなってしまうのです。

上述の問題を解決するために、**行進** (procession — cf. [7], Definition 4.10) という概念を導入しましょう。

$$1 \leq j \leq l^\pm \stackrel{\text{def}}{=} l^* + 1$$

に対して、 T の $\mathbb{F}_l^\pm$ 群の構造から定まる (単一の正準的な) 全単射 $|T| \xrightarrow{\sim} |\mathbb{F}_l|$ によって部分集合 $\{|0|, |1|, \dots, |j-1|\} \subseteq \{|0|, |1|, \dots, |l^*|\} = |\mathbb{F}_l|$ に対応する $|T|$ の部分集合を $S_j^\pm \subseteq |T|$ と書くことにします:

$$S_j^\pm \subseteq |T| \longleftrightarrow \{|0|, |1|, \dots, |j-1|\} \subseteq |\mathbb{F}_l|.$$

そして、この部分集合たちによる埋め込みの列

$$S_1^\pm \hookrightarrow \dots \hookrightarrow S_j^\pm \hookrightarrow \dots \hookrightarrow S_{l^\pm}^\pm (= |T|)$$

を考えて、そして、その上、各 $S_j^\pm$ を、 $S_j^\pm$ の自己全単射全体のなす群の作用という不定性のもとで扱うことにします。こういったデータを考えることによって、それぞれ J と $\mathbb{F}_l^*$ 、 $|T|$ と $|\mathbb{F}_l|$ の間の関連の不定性を縮減することができます。すなわち、各 $0 \leq j \leq l^*$ に対して、部分集合 $S_{j+1}^\pm$ を “ $|0|, \dots, |j|$ という ($j+1$ 個の) ラベルたちの入れ物” と考えることが、したがって、“ $|j| \in |\mathbb{F}_l|$ は、 $S_{j+1}^\pm$ のある元に対応する” と考えることができます。これにより、 $|j| \in |\mathbb{F}_l|$ に対応する元として、 $j+1$ 通りの可能性 (つまり、 $S_{j+1}^\pm$ の元) を考慮すれば充分です。その結果、 $|T|$ と $|\mathbb{F}_l|$ の関連の可能性として、 $((l^\pm)^{l^\pm})$ よりもだいぶ少ない $(l^\pm)!$ 通りの可能性を考慮すれば充分だということになります。([7], Proposition 4.11, (i); [7], Proposition 6.9, (i), を参照ください.)

$|T|$ の各元 $|t| \in |T|$ で添字付けられた D^+ 素点縞 ${}^\dagger \mathcal{D}_{|t|}^+$ から出発して、

$$\text{Prc}({}^\dagger \mathcal{D}_{|T|}^+) \stackrel{\text{def}}{=} (\{{}^\dagger \mathcal{D}_{|t|}^+\}_{|t| \in S_1^\pm} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \{{}^\dagger \mathcal{D}_{|t|}^+\}_{|t| \in S_j^\pm} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \{{}^\dagger \mathcal{D}_{|t|}^+\}_{|t| \in S_{l^\pm}^\pm})$$

— ただし、各 $2 \leq j \leq l^\pm$ に対して、

$$\{{}^\dagger \mathcal{D}_{|t|}^+\}_{|t| \in S_{j-1}^\pm} \hookrightarrow \{{}^\dagger \mathcal{D}_{|t|}^+\}_{|t| \in S_j^\pm}$$

という記号は、すべての単射 $\phi: S_{j-1}^\pm \hookrightarrow S_j^\pm$ と、各 ϕ に対する充満多重同型 ([2], §6, を参照) 全体の集まり $\{\mathcal{D}_{|i|}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\phi(|i|)}^+\}_{|i| \in S_{j-1}^\pm}$ を意味する — というデータを考察することが可能です。このデータ $\text{Prc}({}^\dagger \mathcal{D}_{|T|}^+)$ を D^+ 素点縞の行進と呼びます。まったく同様の方法によって、様々な対象に対する行進を定義することができます。

これまでの議論において、

行進を考えた場合の方が、ただの抽象的な集合と見做した場合よりも、ラベルの集合に関する不定性が小さくなる

という重要な事実を観察しました. 行進という概念を用いることの別の利点として,

零ラベルの隔離

という点も挙げられます. $|T|$ をただの集合と見做す, つまり, $|T|$ を, $|T|$ の自己全単射全体のなす群の作用という不定性のもとで扱う場合, 零ラベル $0 \in |T|$ とその他の元 $\in T^*$ を区別することは不可能です. 一方, 行進を考えた場合, (“ $\mathbb{S}_1^\pm$ ” というデータによって) $0 \in |T|$ は “特別な元” ということになり, その他の元 $\in T^*$ との区別が可能となります. そして, 実際, 宇宙際 Teichmüller 理論において,

零ラベルは単数的/コア的なラベル, 非零ラベルは値群的/輻的なラベル

という観察のとおり, 零ラベルと非零ラベルは, まったく異なる役割を果たします. (§4, (d), や [2], §21, の前半の議論を参照ください.) この観点から, “零ラベルの隔離可能性” は重要です. (詳しくは [8], Remark 4.7.3, (iii), を参照ください.)

§ 7. 局所的幾何学的設定の復習

§4 で復習を行った Hodge 劇場の加法的対称性は, [2], §20, での説明のとおり (そして, §4, (d), のとおり), 単数的/コア的なラベル $0 \in \text{LabCusp}_K^\pm$ と値群的/輻的なラベル $\in \text{LabCusp}_K^\pm \setminus \{0\}$ を幾何学的に置換することをその 1 つの目的として導入されました. つまり, この対称性を用いて, 零ラベル $0 \in \text{LabCusp}_K^\pm$ でラベル付けされた対象と, 非零ラベル $\in \text{LabCusp}_K^\pm \setminus \{0\}$ でラベル付けされた対象との間の同期化を実現します. その実現の説明のために, この §7 では, 我々の局所的な幾何学的設定を復習します. ここでは, 宇宙際 Teichmüller 理論においてもっとも重要な場合である “ $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ の元に対する設定” を復習することにしましょう.

この §7 から §9 までの間, $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ の元 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ を固定

します. p を $\underline{v}$ の剰余標数としましょう.

[2], §13, のとおり, 既に登場している K_v 上の双曲的軌道曲線たち (あるいは, その局所化) による有限次エタール被覆による可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \underline{X}_v & \longrightarrow & \underline{X}_v & \longrightarrow & X_v \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \underline{C}_v & \longrightarrow & C_v \stackrel{\text{def}}{=} C \times_K K_v \end{array}$$

を延長する, 連結緩和被覆の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \ddot{Y}_v & \longrightarrow & \underline{Y}_v & \longrightarrow & \underline{X}_v & \longrightarrow & X_v \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \underline{C}_v & \longrightarrow & C_v \end{array}$$

が存在します.

$\underline{X}_v$ のカスプたち (つまり, $\text{LabCusp}_v^\pm$ の元たち) の, $\underline{X}_v$ の (コンパクト化の) $\mathcal{O}_{K_v}$ 上の安定還元への延長を考えることで, $\underline{X}_v$ の安定還元の特異ファイバーの既約成分の集合と $\text{LabCusp}_v^\pm$ との間の全単射が得られます. ([2], §13, (d), を参照ください.) $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ に対応する特殊ファイバーの既約成分を, $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた成分と呼ぶことにしましょう.

$\underline{X}_v$ のコンパクト化には, その零カスプ (§5 の冒頭を参照) を原点とする楕円曲線の構造が一意的に定まります. そして, この楕円曲線は, その安定還元への延長が $0 \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた成分と交わる, 唯一の (その定義から K_v 有理的な) 2 等分点を持ちます. $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ に対して, この 2 等分点と $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ の (楕円曲線の構造に関する) 和として得られる $\underline{X}_v$ の K_v 有理点は, $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた代入点と呼ばれます. また, $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた代入点の上にある (その定義から K_v 有理的な) $\underline{X}_v$ や $\underline{Y}_v$ の点も, $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた代入点と呼ばれます. ([2], §13, (k), の下の議論を参照ください.)

$\underline{Y}_v$, $\underline{X}_v$, $\underline{X}_v$ の特殊ファイバーの双対グラフをそれぞれ

$$\Gamma_{\underline{Y}_v}, \quad \Gamma_{\underline{X}_v}, \quad \Gamma_{\underline{X}_v}$$

と書くことにします. このとき, 被覆 $\underline{X}_v \rightarrow \underline{X}_v$ は, 頂点の集合の間に全単射を引き起こす射

$$\Gamma_{\underline{X}_v} \longrightarrow \Gamma_{\underline{X}_v}$$

を誘導します. ([2], §13, (g), を参照ください.) また, $l^*, -l^* \in \{-l^*, \dots, 0, \dots, l^*\} \xleftarrow{\{\pm 1\}} \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた成分に対応する $\Gamma_{\underline{X}_v}$ の頂点を結ぶ唯一の辺を取り除くことで得られる $\Gamma_{\underline{X}_v}$ の (その定義から可縮な) 部分グラフを

$$\Gamma_{\underline{X}_v}^\blacktriangleright \subseteq \Gamma_{\underline{X}_v}$$

と書くことに, その上, この部分グラフと射 $\Gamma_{\underline{X}_v} \rightarrow \Gamma_{\underline{X}_v}$ によって定まる $\Gamma_{\underline{X}_v}$ の (その定義から可縮な) 部分グラフを

$$\Gamma_{\underline{X}_v}^\blacktriangleright \subseteq \Gamma_{\underline{X}_v}$$

と書くことにします.

ここで,

- (a) $0 \in \{-l^*, \dots, 0, \dots, l^*\} \xleftarrow{\{\pm 1\}} \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた $\underline{Y}_v$ の代入点 μ — すなわち, (その定義から K_v 有理的となる) $\underline{Y}_v$ の点 μ であって, $0 \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた ($\underline{X}_v$ の) 代入点の上にあるもの — を固定

しましょう. このとき, [2], §13, (c), (d), から簡単にわかるとおり, 以下の性質を満たす $\Gamma_{\underline{Y}_v}$ の唯一の (その定義から可縮な) 部分グラフ

$$\Gamma_{\underline{Y}_v}^\blacktriangleright \subseteq \Gamma_{\underline{Y}_v}$$

が存在します:

μ (の延長) は, 部分グラフ $\Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^\blacktriangleright$ に対応する部分に含まれて, かつ, 被覆 $\underline{\underline{Y}}_v \rightarrow \underline{\underline{X}}_v$ は, 頂点の集合の間に全単射を引き起こす射

$$\Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^\blacktriangleright \longrightarrow \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright$$

を導く.

そして, $\underline{\underline{Y}}_v$ の上に, 以下の性質を満たす関数 $\underline{\underline{\Theta}}_v$ を定義することができます ([2], §13, の後半の議論を参照):

(b) ξ_t を, $t \in \{-l^*, \dots, 0, \dots, l^*\} \xleftarrow{\{\pm 1\} \curvearrowright} \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた $\underline{\underline{Y}}_v$ の代入点であって, ξ_t (の延長) が部分グラフ $\Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^\blacktriangleright$ に対応する部分に含まれているものとする. このとき, $\underline{\underline{\Theta}}_v$ の ξ_t での値は, $\mu_{2l} \cdot q_v^{t^2}$ の元となる.

これが, 宇宙際 Teichmüller 理論で重要な役割を果たすテータ関数 (§3, (b'), を参照) です. 上の議論のとおり, $\underline{\underline{\Theta}}_v$ は, (a) での “ μ ” の選択に依存します. “ μ ” の選択に依存しない対象を得るために, $\underline{\underline{\Theta}}_v$ の

$$\text{Gal}(\underline{\underline{Y}}_v/\underline{\underline{X}}_v) = (\text{Gal}(\underline{\underline{Y}}_v/\underline{\underline{Y}}_v) \times \text{Gal}(\underline{\underline{Y}}_v/\underline{\underline{X}}_v)) \times \text{Gal}(\underline{\underline{X}}_v/\underline{\underline{X}}_v) = (\mu_2 \times l \cdot \mathbb{Z}) \times \mu_l$$

— [2], §13, での記号や議論を参照 — の作用による軌道

$$\underline{\underline{\theta}}_v \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\underline{\underline{Y}}_v/\underline{\underline{X}}_v) \cdot \underline{\underline{\Theta}}_v = \mu_l \cdot (\mu_2 \times l \cdot \mathbb{Z}) \cdot \underline{\underline{\Theta}}_v$$

を考えましょう. 関数 $\underline{\underline{\Theta}}_v$ とは違い, この集合 $\underline{\underline{\theta}}_v$ は, “ μ ” の選択に依存しない, $\underline{\underline{X}}_v$ の観点から内在的な概念です.

次に, 各 $t \in \text{LabCusp}_v^\pm$ に対して, t でラベル付けされた成分に対応する頂点のみからなる $\Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright$ の部分グラフを

$$\Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^{\bullet t} \subseteq \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright$$

と書くことに, そして, この部分グラフと既に登場した射 $\Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^\blacktriangleright \rightarrow \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright \rightarrow \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright$ (最初の射は, (a) での “ μ ” の選択に依存することに注意) によって定まる (これらの射が頂点の集合の間に全単射を引き起こすことに注意) $\Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^\blacktriangleright, \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright$ の部分グラフを

$$\Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^{\bullet t} \subseteq \Gamma_{\underline{\underline{Y}}_v}^\blacktriangleright, \quad \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^{\bullet t} \subseteq \Gamma_{\underline{\underline{X}}_v}^\blacktriangleright$$

と書くことにしましょう.

最後に, 緩和基本群の記号を設定しましょう. 双曲的軌道曲線 C_v の緩和基本群を Π_v^{cor} と書くことに, 連結緩和被覆による列

$$\underline{\underline{Y}}_v \longrightarrow \underline{\underline{Y}}_v \longrightarrow \underline{\underline{X}}_v \longrightarrow \underline{\underline{X}}_v \longrightarrow C_v \quad (\longrightarrow \text{Spec}(K_v))$$

に登場する対象によって定まる Π_v^{cor} の開部分群 (その上, 最後の $\text{Spec}(K_v)$ に対するエタール基本群) を考えることで得られる, 位相群とその間の連続開準同型射の列を

$$\Pi_v^{\infty} \longrightarrow \Pi_v^{\infty} \longrightarrow \Pi_v \longrightarrow \Pi_v^{\pm} \longrightarrow \Pi_v^{\text{cor}} \quad (\longrightarrow G_v)$$

と書くことに, そして, この位相群の列に登場する各々の位相群 (ただし, 最初の 2 つを除く) の副有限完備化を考えることで得られる副有限群の列を

$$\hat{\Pi}_v \longrightarrow \hat{\Pi}_v^{\pm} \longrightarrow \hat{\Pi}_v^{\text{cor}} \quad (\longrightarrow G_v)$$

と書くことにします. また, これら位相群の 2 つの列に登場する各位相群の, G_v への全射の核 (つまり, 幾何学的部分) を考えることで得られる位相群の列を

$$\begin{aligned} \Delta_v^{\infty} &\longrightarrow \Delta_v^{\infty} \longrightarrow \Delta_v \longrightarrow \Delta_v^{\pm} \longrightarrow \Delta_v^{\text{cor}}, \\ \hat{\Delta}_v &\longrightarrow \hat{\Delta}_v^{\pm} \longrightarrow \hat{\Delta}_v^{\text{cor}} \end{aligned}$$

と書くことにしましょう. 上で導入した部分グラフ $\Gamma_{\underline{X}_v}^{\bullet t} \subseteq \Gamma_{\underline{X}_v}^{\blacktriangleright} \subseteq \Gamma_{\underline{X}_v}$ (ただし, $t \in \text{LabCusp}_v^{\pm}$) は, Π_v の共役作用を除いて, 分解群

$$\Pi_{v \bullet t} \subseteq \Pi_{v \blacktriangleright} \subseteq \Pi_v$$

を定めます. これらの分解群を用いて,

$$\begin{aligned} \Pi_{v \bullet t}^{\pm} &\stackrel{\text{def}}{=} N_{\Pi_v^{\pm}}(\Pi_{v \bullet t}) \subseteq \Pi_{v \blacktriangleright}^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} N_{\Pi_v^{\pm}}(\Pi_{v \blacktriangleright}) \subseteq \Pi_v^{\pm}, \\ \Pi_{v \bullet t} &\stackrel{\text{def}}{=} \Pi_v^{\infty} \cap \Pi_{v \bullet t} \subseteq \Pi_{v \blacktriangleright} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_v^{\infty} \cap \Pi_{v \blacktriangleright} \subseteq \Pi_v^{\infty} \end{aligned}$$

と, $\Pi_v^{\pm}$ と Π_v^{∞} の閉部分群を定義しましょう.

§ 8. 共役同期化

§7 で復習した局所的な幾何学的設定に登場する様々な対象を, $\mathcal{D}$ 素点縞 — つまり, エタールの正則構造 (§2 の議論を参照) — を用いて記述しましょう. §1 で復習した Hodge 劇場内の $\mathcal{D}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ} = \{{}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, w}\}_{w \in \underline{V}}$ から, その v 成分 ${}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, v}$ を持ってきます. §4 で復習したとおり, これは, Π_v の同型物 ${}^{\dagger}\Pi_v$ とだいたい等価なデータです.

遠アーベル幾何学の研究によって, この位相群 ${}^{\dagger}\Pi_v$ から単遠アーベル的に,

(a) §7 の後半の議論で導入した位相群の列に対応する列

$$\begin{aligned} {}^{\dagger}\Pi_v^{\infty} &\longrightarrow {}^{\dagger}\Pi_v^{\infty} \longrightarrow {}^{\dagger}\Pi_v \longrightarrow {}^{\dagger}\Pi_v^{\pm} \longrightarrow {}^{\dagger}\Pi_v^{\text{cor}} \quad (\longrightarrow {}^{\dagger}G_v), \\ {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v &\longrightarrow {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\pm} \longrightarrow {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\text{cor}} \quad (\longrightarrow {}^{\dagger}G_v), \\ {}^{\dagger}\Delta_v^{\infty} &\longrightarrow {}^{\dagger}\Delta_v^{\infty} \longrightarrow {}^{\dagger}\Delta_v \longrightarrow {}^{\dagger}\Delta_v^{\pm} \longrightarrow {}^{\dagger}\Delta_v^{\text{cor}}, \\ {}^{\dagger}\hat{\Delta}_v &\longrightarrow {}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\pm} \longrightarrow {}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\text{cor}}, \end{aligned}$$

- (b) $\Pi_{\underline{v}}$ の部分商 $l \cdot \Delta_{\Theta}$ — つまり, エタールの幾何学的円分物に対応する ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ の部分商 —

$$(l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})$$

を復元/構成することができます. (一部の対象については, [2], §14, を参照ください.) このとき, §4, (c), での議論から,

- (c) §4 で復習した加法的対称性は, 局所的には, 現在の我々の設定において,

$$\text{商 } {}^{\dagger}\Delta_{\underline{v}}^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\Delta_{\underline{v}}^{\pm} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm} (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm}) \text{ の共役作用}$$

として記述可能である

ということがわかります. また, (§4 の後半の記号のもと) 自然な射 $\Pi_{\underline{v}}^{\pm} \hookrightarrow \Pi^{\odot \pm}$, $\Pi_{\underline{v}}^{\text{cor}} \hookrightarrow \Pi^{\text{cor}}$ が同型 $\widehat{\Delta}_{\underline{v}}^{\pm} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\odot \pm}$, $\widehat{\Delta}_{\underline{v}}^{\text{cor}} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\text{cor}}$ を導くことが簡単に確認できます. そのため, §4, (f), での議論から,

- (d) §4 で復習した加法的対称性は, 大域的には, 現在の我々の設定において,

$$\begin{array}{ccc} {}^{\dagger}\widehat{\Delta}_{\underline{v}}^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\widehat{\Delta}_{\underline{v}}^{\pm} & \xrightarrow{\sim} & {}^{\dagger}\widehat{\Pi}_{\underline{v}}^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\widehat{\Pi}_{\underline{v}}^{\pm} \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ \Delta^{\text{cor}} / \Delta^{\odot \pm} & \xrightarrow{\sim} & \Pi^{\text{cor}} / \Pi^{\odot \pm} \quad (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm}) \end{array}$$

の共役作用として理解されるべきである

ということがわかります.

その上, [2], §16, での説明のとおり, 位相群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ から単遠アーベル的に,

- (e) §1 で紹介した (乗法的) 代数的対象 $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\mu} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright} \subseteq \overline{F}_{\underline{v}}^{\times}$ の Kummer 類のなすモノイドに対応するモノイド

$$\mathcal{O}_{\overline{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\mu} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\triangleright} \subseteq \overline{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})^{\times} \subseteq {}_{\infty}H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}))$$

— [2], §3, の冒頭で導入された記号や [2], §16, (f), の上の議論を参照 —

- (f) Kummer 類

$$(\underline{\theta}_{\underline{v}} \text{ の元たちの Kummer 類}) \subseteq (\underline{\theta}_{\underline{v}} \text{ の元たちの巾根たちの Kummer 類})$$

に対応する対象

$$\underline{\theta}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \subseteq {}_{\infty}\underline{\theta}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \subseteq {}_{\infty}H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}))$$

— [2], §16, (d), に関するアルゴリズムを参照 —

(g) ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ の定点反転自己同型 “ (l, D) ” ([2], §16, (g), を参照) たち全体

を復元/構成することができます. そして, 更に,

(h) §7 の最後に定義した様々な閉部分群に対応する閉部分群

$${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \bullet t} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \blacktriangleright} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}, \quad {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \bullet t}^{\pm} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \blacktriangleright}^{\pm} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}, \quad {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \bullet t} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \ddot{\blacktriangleright}} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$$

— ただし, $t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$ —

や

(i) $(l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}), {}^{\dagger}G_{\underline{v}}$ によってそれぞれ定まる ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \blacktriangleright}$ の部分商

$$(l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \blacktriangleright}), \quad G_{\underline{v}}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v} \blacktriangleright})$$

も復元/構成することが可能です. ([8], Proposition 2.2, (i); [8], Corollary 2.5, (i), を参照ください.) 以上のように, $\mathcal{D}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}$ を用いて, 様々な対象の同型物を復元/構成することができます.

次に, Hodge 劇場による代入点のラベルの大域的な管理から生じる問題について考察しましょう. [2], §17, の冒頭の議論のとおり, 所望の多輻的表示に到達するためには, 様々な素点におけるラベル集合 “ $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ ” を大域的に管理する必要があります. そして, その大域的な管理を, §4, (b), で復習した形で実現しました. ここで, その管理に対する観察である §4, (e), を思い出しましょう. §4, (e), で説明されているとおり, $\underline{v} \in \underline{V}^{\text{bad}}$ に対して, 局所的なラベル集合と大域的なラベル集合との間の全単射は, 緩和基本群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ からエタール基本群 (したがって, 副有限群) ${}^{\dagger}\Pi^{\circ \pm}$ へのある多重 (単) 射が誘導する

カスプ的惰性群の **緩和共役類** の集合とカスプ的惰性群の **副有限共役類** の集合
の間の全単射

として実現されています. また, [2], §20, での議論のとおり, 所望の多輻的表示を達成するためには, ラベル集合 “ $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm} \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}_K^{\pm}$ ” への大域的 $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ 対称性を考察しなければならず, それは, 上の (d) の観察のとおり,

カスプ的惰性群の **緩和共役類** の集合に対する, (緩和基本群ではなく) **副有限群の共役作用** — したがって, 特に, (緩和基本群ではなく) 副有限群 ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_{\underline{v}}^{\pm}$ の共役作用が不定性として発生 —

として理解されるべきものとなっています. これらの観察により, §4 で復習した Hodge 劇場の大域的加法的対称性による “ $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ ” の管理を有効に活用するためには,

緩和基本群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ のカスプ的惰性群に対する, **緩和共役たち** と **副有限共役たち** の
比較

を行わなければならないということがわかります. この問題, つまり,

局所的なラベル集合は緩和基本群のカスプ的惰性群の緩和共役類の集合として理解されるが、しかしながら、Hodge 劇場の加法的対称性によるラベル集合の大域的な管理の仕組みから、それら惰性群の副有限共役たちをも考察しなければならない

という問題は、以下で与えられる簡単な解説のとおり、**遠半グラフ** (semi-graph of anabelioids — cf. [3], Definition 2.1) の理論を適切に適用することで解決されます. (日本語で“遠半グラフ”という概念に触れられる文献として, [1], §3, が挙げられます.)

直前の議論が示唆するもう少し具体的な (そして, “問題点” が比較的容易に見て取れる) 問題を考えてみましょう. 緩和基本群 ${}^{\dagger}\Pi_v$ のカスプ的惰性群 $I \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v$ を固定します. ここで, より大きい緩和基本群 ${}^{\dagger}\Pi_v^{\pm} (\supseteq {}^{\dagger}\Pi_v)$ の元 $\gamma \in {}^{\dagger}\Pi_v^{\pm}$ による共役 $\gamma \cdot I \cdot \gamma^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v^{\pm}$ が, 再び ${}^{\dagger}\Pi_v$ に含まれたと仮定しましょう. すると, 基本群の一般論から簡単に確認できるとおり, この $\gamma \cdot I \cdot \gamma^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v$ は, (“ ${}^{\dagger}\Pi_v^{\pm}$ の” だけではなく) ${}^{\dagger}\Pi_v$ のカスプ的惰性群です. (再び簡単に確認できるとおり, この場合, $\gamma \cdot I \cdot \gamma^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v$ は, $I \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v$ の ${}^{\dagger}\Pi_v$ のある元による共役と一致します.) つまり,

$$\gamma \cdot I \cdot \gamma^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v \implies \gamma \cdot I \cdot \gamma^{-1} \text{ は } {}^{\dagger}\Pi_v \text{ のカスプ的惰性群.}$$

一方, 次に, 副有限完備化 ${}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\pm} (\supseteq {}^{\dagger}\Pi_v)$ の元 $\hat{\gamma} \in {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\pm}$ による共役 $\hat{\gamma} \cdot I \cdot \hat{\gamma}^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\pm}$ が, 再び ${}^{\dagger}\Pi_v$ に含まれたと仮定しましょう. この場合には, さきほどの場合とは違い, 少なくとも直ちに同様の結論 — つまり, “ $\hat{\gamma} \cdot I \cdot \hat{\gamma}^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v$ が ${}^{\dagger}\Pi_v$ のカスプ的惰性群である” という主張 — を得ることができません.

$$\hat{\gamma} \cdot I \cdot \hat{\gamma}^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v \stackrel{?}{\implies} \hat{\gamma} \cdot I \cdot \hat{\gamma}^{-1} \text{ は } {}^{\dagger}\Pi_v \text{ のカスプ的惰性群.}$$

ここではカスプに付随する惰性群についての問題を述べましたが, 特殊ファイバーの既約成分や連結部分グラフの分解群/惰性群についても同様の問題を考えることが可能です. このように, 緩和共役類から副有限共役類への移行によって, 非自明な問題が発生します. そして, 上で述べたように, 大域的なラベルの管理の実行には, 副有限群による共役作用という不定性が常に伴うため, この問題は避けられません.

結論として, この問題は, 遠半グラフの理論から得られる以下の事実から解決可能です ([8], Corollary 2.4, (i), を参照):

$t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\prec, v})$, $\square \in \{\bullet t, \blacktriangleright\}$ として, $I \subseteq {}^{\dagger}\Pi_v$ を, t に対応するカスプに付随する惰性群であって, ${}^{\dagger}\Pi_{v\square}$ に含まれるものとする. このとき, $\hat{\gamma} \in {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\pm}$ に対して, $\hat{\gamma} \in {}^{\dagger}\Pi_{v\square}^{\pm}$ となることと $\hat{\gamma} \cdot I \cdot \hat{\gamma}^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{v\square}$ となることは同値.

この事実により, 商 ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\pm} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\hat{\Pi}_v^{\pm} (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm})$ の共役作用を活用しようと試みる際に生じる ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\pm}$ の共役不定性は, 我々の議論に深刻な問題を引き起こしません. その上, この事実により, 遠アーベル幾何学の研究を組み合わせることで, (上の“事実”における記号のもと) 緩和基本群のカスプ的惰性群 $I \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{v\blacktriangleright}$ の, $\hat{\gamma} \cdot I \cdot \hat{\gamma}^{-1} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{v\blacktriangleright}$ となる副有限共役から, t でラベル付けされた代入点に付随する分解群 ($\subseteq {}^{\dagger}\Pi_{v\blacktriangleright}$) を — 商 ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\hat{\Delta}_v^{\pm}$

の共役作用と両立する形で — 復元/構成することができます. ([8], Corollary 2.4, (ii), (iii), を参照ください.) つまり, 簡単にまとめてしまいますと,

(j) 2つのデータ

(j-1) ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}$ の任意の ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_{\underline{v}}^{\pm}$ 共役 J と

(j-2) 各 $t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$ に対応する ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ のカスプ的惰性群の任意の ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_{\underline{v}}^{\pm}$ 共役 J_t であって, $J_t \subseteq J$ なるものたちのなす組 $\{J_t \subseteq J\}_{t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})}$

から出発して — それぞれ (j-1), (j-2) に対する独立した ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_{\underline{v}}^{\pm}$ の共役作用と両立する形で, したがって, ${}^{\dagger}\hat{\Delta}_{\underline{v}}^{\text{cor}}$ の共役作用から生じる $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ 対称性と両立する形で — 各 $t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$ でラベル付けされた代入点に付随する分解群たちのなす組 $\{D_{t, \mu} \subseteq J\}_{t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})}$ を復元/構成することができる

ということになります.

次に, (簡単のため, (j) の “ J ” を ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}$ として) 各 $t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$ での Galois 代入を, 以下のように, 一旦 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}$ を経由する形で表現しましょう:

$$\begin{aligned} \infty H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})) &\longrightarrow \infty H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm})) \\ &\longrightarrow \infty H^1(D_{t, \mu}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm})) \xleftarrow{\sim} \infty H^1(G_{\underline{v}}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}), (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm})) \end{aligned}$$

— ここで, 最初の矢印は自然な単射 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm} \hookrightarrow {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ によって, 2 番目の矢印は自然な単射 $D_{t, \mu} \hookrightarrow {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}$ によって, 最後の矢印は自然な同型 $D_{t, \mu} \xrightarrow{\sim} G_{\underline{v}}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm})$ によって誘導される射. 最後の “ $\infty H^1(G_{\underline{v}}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}), (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\pm}))$ ” を, §9 で説明される対称化同型によって, t に依存しない対象と考えることができます. このように, (j) によって, (考察したい代入点をすべて含む) 単一の連結グラフ “ $\mathbf{T}_{\underline{v}}^{\pm}$ ” に代入の状況を制限することで, 本来的には各 t 毎に独立な “ t でラベル付けされた代入点での Galois 代入の出力の入れ物” ([2], §20, の前半の議論を参照) を, “単一” の対象とすることができます. つまり, “ t でラベル付けされた対象” に従来発生するはずの, “ t に依存した — つまり, 各ラベル $t \in T$ 毎に独立した — 共役不定性” を **同期化** することが可能になります. このような現象は, **共役同期化** (conjugate synchronization — cf. [8], Remark 2.6.1, (i)) と呼ばれています. この共役同期化は, 例えば後に行われる “テータ関数の特殊値の適切な遠アーベル的輸送” (§9 や §20 や §21 を参照) を遂行するために, 必要となります. 適切な遠アーベル的輸送を行うためには, ラベル毎に独立した共役不定性を許容するわけにはいきません.

ここで,

上述の共役同期化は, §4 で復習した大域的なラベルの管理や加法的対称性 — つまり, “ $\text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} T$ ” やそれへの大域的 $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ 対称性 — から生じる対称化同型 (§9 を参照) と両立的である

という事実が — 実質的には (j) から — 従うことに注意しましょう. また, (d) のとおり, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性を与えるために, “ ${}^\dagger\hat{\Pi}_v^{\text{cor}}$ の共役作用” ではなく, その幾何学的部分 “ ${}^\dagger\hat{\Delta}_v^{\text{cor}}$ の共役作用” を採用することができるという事実にも注意しましょう. この幾何学性によって, “ ${}_\infty H^1(G_v({}^\dagger\Pi_{v\blacktriangleright}), (l \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger\Pi_{v\blacktriangleright}))$ ” に新たな余計な不定性が生じないことになります.

§ 9. 加法的対称化同型

この §9 では, §7 の冒頭で述べたとおり, §4 で復習を行った Hodge 劇場の加法的対称性を用いて, 零ラベル $0 \in T$ でラベル付けされた対象と, 非零ラベル $\in T^\times$ でラベル付けされた対象との間の同期化を実現しましょう.

$t \in T$ に対して,

$$({}^\dagger G_v)_t$$

を, $t \in T$ でラベル付けされた G_v のコピー (例えば, §8, (j), の “ $D_{t,\mu}$ ” として生じるコピー) とします. すると, §8, (c), で議論された (局所的) $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 作用 — つまり, ${}^\dagger\Delta_v^{\text{cor}}/{}^\dagger\Delta_v^\pm (\cong \mathbb{F}_l^{\times\pm})$ の共役作用 — によって, T の各元でラベル付けされたこれらコピーたちの間の同型が得られます:

$$({}^\dagger G_v)_t \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger G_v)_{t'}.$$

このように, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性を用いることで, T の異なる元でラベル付けされた対象たちを関連付けることができます. このようにして得られる同型を, **対称化同型** (symmetrizing isomorphism) — 特に, この場合, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性から生じる対称化同型なので, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ **対称化同型** ($\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ -symmetrizing isomorphism — cf. [8], Corollary 3.5, (i)), あるいは, 簡単に, “加法的対称化同型” — と呼びます. ここで再び, §8 の後半で議論した, “ T の各元 $t \in T$ に対して, t でラベル付けされた対象には, 本来的には, t に依存した — つまり, t 毎に独立した — 共役不定性が生じる” という事実を思い出しましょう. 一方, この対称化同型によって, 本来的には発生してしまうその共役不定性を, 同期化することが可能になるのです. ここでも再び (§8 の最後の議論を参照), 対称化同型を与えるために, “ ${}^\dagger\Pi_v^{\text{cor}}$ の共役作用” ではなく, その幾何学的部分 “ ${}^\dagger\Delta_v^{\text{cor}}$ の共役作用” を考えていることに注意しましょう. この幾何学性によって, 様々な ${}^\dagger G_v$ のコピーに, 新たな余計な共役作用が生じないことになります.

次に, 位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ (§1 の前半で導入した記号を参照) の同型物 ${}^\dagger G_v \curvearrowright {}^\dagger \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ に対して, 同様の対称化同型を考察しましょう. (ここで, $\mathcal{F}$ 素点縞の v 成分が, 位相群作用付きモノイド $\Pi_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ の同型物とだいたい等価なデータであったことを思い出しましょう — [2], §17, の最後の議論を参照ください.) $t \in T$ に対して,

$$({}^\dagger G_v)_t \curvearrowright ({}^\dagger \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright)_t$$

を, $t \in T$ でラベル付けされた ${}^\dagger G_v \curvearrowright {}^\dagger \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ のコピー (例えば, 上の議論で考察したコピー $({}^\dagger G_v)_t$ から単遠アーベル的に復元/構成された同型物 — [2], §2, を参照 — あるいは

は, $\mathcal{F}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\sim, \underline{v}}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\sim, \underline{v}}$ として得られる位相群作用付きモノイドを, §8, (j), の “ $D_{t, \mu}$ ” に制限することで得られる対象) とします. すると, 適切な Kummer 同型の存在によって, 上の “ $G_{\underline{v}}$ ” に対する対称化同型 “ $({}^{\dagger}G_{\underline{v}})_t \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}G_{\underline{v}})_{t'}$ ” が, この位相群作用付きモノイドの間の対称化同型

$$(({}^{\dagger}G_{\underline{v}})_t \curvearrowright ({}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright})_t) \xrightarrow{\sim} (({}^{\dagger}G_{\underline{v}})_{t'} \curvearrowright ({}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright})_{t'})$$

を誘導します:

$$\begin{aligned} & \text{エタールの } \mathbb{F}_l^{\times \pm} \text{ 対称性 } {}^{\dagger}\Delta_{\underline{v}}^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\Delta_{\underline{v}}^{\pm} (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm}) \curvearrowright T \\ \implies & \text{エタールの対称化同型 } \xrightarrow{\text{Kummer 同型}} \text{Frobenius 的対称化同型.} \end{aligned}$$

次に, A を, 上の “ $G_{\underline{v}}$ ” や “ $G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\underline{F}_{\bar{v}}}^{\triangleright}$ ” のような, 対称化同型の対象としましょう. したがって, 各 $t \in T$ でラベル付けされたコピー A_t たちを考えますと, ${}^{\dagger}\Delta_{\underline{v}}^{\text{cor}} / {}^{\dagger}\Delta_{\underline{v}}^{\pm} (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm})$ の共役作用によって, これらコピーたちの間の同型 $A_t \xrightarrow{\sim} A_{t'}$ が得られます. $t \in T$ に対して,

(a) 対称化同型 $A_t \xrightarrow{\sim} A_{-t}$ によって同一視を行うことで得られる A のコピーを

$$A_{|t|}$$

と書くことにします. (特に, $A_{|t|}$ という対象を, $|t| \in |T|$ でラベル付けされたコピーであると考えることができます.) また, 対称化同型によって, 直積 $\prod_{|t| \in |T|} A_{|t|}$ や直積 $\prod_{|t| \in T^*} A_{|t|}$ の “対角成分” を考えることができ,

(b) $\prod_{|t| \in |T|} A_{|t|}$, $\prod_{|t| \in T^*} A_{|t|}$ の “対角成分” として生じる A のコピーに対して, それぞれ, $\langle |T| \rangle$, $\langle T^* \rangle$ というラベルを与える

ことができます:

$$A_{\langle |T| \rangle} \subseteq \prod_{|t| \in |T|} A_{|t|}, \quad A_{\langle T^* \rangle} \subseteq \prod_{|t| \in T^*} A_{|t|}.$$

簡単に確認できるとおり, 自然に $A_{\langle |T| \rangle} \subseteq A_0 \times A_{\langle T^* \rangle}$ と考えることができ, その上, この埋め込みを “グラフ” と考えることによって, A_0 と $A_{\langle T^* \rangle}$ の間の同型が得られ,

(c) 0 でラベル付けされたコピーと $\langle T^* \rangle$ でラベル付けされたコピーをこの同型によって同一視することで得られるコピーに Δ というラベルを与える

ことができます:

$$A_0 \xleftarrow{\sim} A_{\Delta} \xrightarrow{\sim} A_{\langle T^* \rangle}.$$

上では, 対称化同型の対象の例として, エタールの対象である “ $G_{\underline{v}}$ ” や, Frobenius 的対象も含まれる “ $G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\underline{F}_{\bar{v}}}^{\triangleright}$ ” を挙げました. これらに対する上述の対称化同型に関する重要な事実として,

(局所的な加法的対称性から生じる) 上述の対称化同型は, 大域的な加法的対称性や (連結部分グラフ $\Gamma_{\underline{Y}_v}^\blacktriangleright$ を考えることで得られる) §8 の共役同期化と両立的である

という — §8 の後半の議論から従う — 事実が挙げられます.

§8 と同様に, ${}^\dagger\Pi_v$ を, $\mathcal{D}$ 素点縞 ${}^\dagger\mathcal{D}_\succ$ の v 成分 ${}^\dagger\mathcal{D}_{\succ,v}$ に対応する位相群としましょう. すると, §8, (e), のとおり, 位相群作用付きモノイド $\Pi_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ の同型物 ${}^\dagger\Pi_v \curvearrowright \mathcal{O}_{k({}^\dagger\Pi_v)}^\triangleright$ が, したがって, 位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ の同型物

$$\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)_v \stackrel{\text{def}}{=} ({}^\dagger G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{k({}^\dagger\Pi_v)}^\triangleright)$$

が得られます. そして, T の元でラベル付けされたこの対象のコピーたち $\{\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)_{t,v}\}_{t \in T}$ に, (a) の直前の議論の対称化同型と同様の対称化同型を適用しましょう. これまで我々は, $\mathbb{V}^{\text{bad}}$ の元 $v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ のみを考察の対象としてきました. 一方, 同様の議論を, ($\mathbb{V}^{\text{bad}}$ に含まれるとは限らない) $\mathbb{V}$ のすべての元 $w \in \mathbb{V}$ に対して適用することが可能です. ([8], Proposition 4.1, (iii); [8], Proposition 4.3, (iii), を参照ください.) その結果として,

(d) $\square \in T \cup |T| \cup \{\triangle\}$ でラベル付けされるある対象たち (有限素点 $w \in \mathbb{V}$ では, $G_w \curvearrowright \mathcal{O}_{F_w}^\triangleright$ の同型物) の集まり

$$\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)_\square \stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)_{\square,w}\}_{w \in \mathbb{V}}$$

が得られます.

(e) この $\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)_\square$ からアルゴリズム的に復元/構成される $\mathcal{F}^+$ 素点縞, $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞をそれぞれ

$$\mathfrak{F}_\square^+({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \quad \mathfrak{F}_\square^{+\times\mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$$

と書くことにしましょう. ([9], Theorem 1.5, (iii), を参照ください.)

次に, $\mathcal{F}$ 素点縞 ${}^\dagger\mathfrak{F}_\succ = \{{}^\dagger\mathcal{F}_{\succ,w}\}_{w \in \mathbb{V}}$ の v 成分 ${}^\dagger\mathcal{F}_{\succ,v}$ を考えましょう. この §9 の前半で復習したとおり, ${}^\dagger\mathcal{F}_{\succ,v}$ は, 位相群作用付きモノイド $\Pi_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ の同型物 ${}^\dagger\Pi_v \curvearrowright {}^\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ とだいたい等価なデータです. したがって, やはりこの対象から, 位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ の同型物

$$\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathfrak{F}_\succ)_v \stackrel{\text{def}}{=} ({}^\dagger G_v \curvearrowright {}^\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright)$$

が得られます. そして, T の元でラベル付けされたこの対象のコピーたち $\{\Psi_{\text{cns}}({}^\dagger\mathfrak{F}_\succ)_{t,v}\}_{t \in T}$ に対する同様の対称化同型を考えることが可能です. $\mathcal{D}$ 素点縞のときと同じように, この議論と同様の議論を ($\mathbb{V}^{\text{bad}}$ に含まれるとは限らない) $\mathbb{V}$ のすべての元 $w \in \mathbb{V}$ に対して適用することで ([8], Proposition 4.2, (iii); [8], Proposition 4.4, (iii), を参照),

(f) $\square \in T \cup |T| \cup \{\triangle\}$ でラベル付けされるある対象たち (有限素点 $w \in \mathbb{V}$ では, $G_w \curvearrowright \mathcal{O}_{F_w}^\triangleright$ の同型物) の集まり

$$\Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\square} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\square, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}$$

が得られます.

(g) この $\Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\square}$ からアルゴリズム的に復元/構成される $\mathcal{F}^+$ 素点縞, $\mathcal{F}^{+ \times \mu}$ 素点縞をそれぞれ

$$\dagger \mathfrak{F}_{\square}^+, \quad \dagger \mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}$$

と書くことに, そして,

(h) $\dagger \mathfrak{F}_{\square}^+$ の (したがって, $\dagger \mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}$ の) 下部 $\mathcal{D}^+$ 素点縞を

$$\dagger \mathcal{D}_{\square}^+$$

と書くことにします. ([8], Corollary 4.10, (i), (iv), を参照ください.) その上,

(i) この $\mathcal{D}^+$ 素点縞 $\dagger \mathcal{D}_{\square}^+$ からアルゴリズム的に復元/構成される $\mathcal{F}^{+ \times \mu}$ 素点縞を

$$\mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}(\dagger \mathcal{D}_{\square}^+)$$

と書くことにします. したがって, 定義から, 自然な同一視

$$\mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}(\mathcal{D}_{\succ}) = \mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}(\mathcal{D}_{\square}^+)$$

が存在することに注意しましょう. ([9], Theorem 1.5, (iii), を参照ください.) また,

(j) $\Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\Delta}$ からアルゴリズム的に復元/構成される $\mathcal{F}^+$ 素点縞 ([2], §23, を参照) を

$$\dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^+ = (\dagger \mathcal{C}_{\Delta}^+, \text{Prime}(\dagger \mathcal{C}_{\Delta}^+) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^+, \{\dagger \rho_{\Delta, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

と書くことにします. ([7], Remark 5.2.1, (ii); [8], Corollary 4.10, (i), を参照ください.)

次に, [2], §3, で紹介した “ $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^{\geq}$ ” の場合の Kummer 同型に関する議論から, Kummer 同型 $\Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\underline{v}} \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathcal{D}_{\succ})_{\underline{v}}$ が構成できることに注意します. ([8], Proposition 4.2, (i); [8], Proposition 4.4, (i), を参照ください.) このような Kummer 同型を $(\mathbb{V}^{\text{bad}}$ に含まれるとは限らない) $\mathbb{V}$ のすべての元 $\underline{w} \in \mathbb{V}$ に対して適用することで,

(k) 各 $\square \in T \cup |T| \cup \{\Delta\}$ に対する Kummer 同型

$$\Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\square} \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{cns}}(\dagger \mathcal{D}_{\succ})_{\square}$$

が得られます. そして, この Kummer 同型が,

(l) Kummer 同型

$$\dagger \mathfrak{F}_{\square}^{\perp \times \mu} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_{\square}^{\perp \times \mu}(\mathfrak{D}_{\succ}) = \mathfrak{F}_{\square}^{\perp \times \mu}(\dagger \mathfrak{D}_{\Delta}^{\perp})$$

を誘導します. ([9], Theorem 1.5, (iii), を参照ください.)

ここで, 記号の導入です. [2], §23, での $\mathcal{F}^{\perp}$ 素点縞の定義の説明に登場する 4 つ組 $(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}^{\perp}, \{\rho_{\underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$ を思い出しましょう. [2], §23, の冒頭の説明のとおり, この 4 つ組の中の $\mathfrak{F}^{\perp}$ の

- $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ での成分は, $G_{\underline{w}} \curvearrowright (\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{w}}}^{\times} \times \underline{q}_{\underline{w}}^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times \underline{q}_{\underline{w}}^{\mathbb{N}})$ とだいたい等価なデータ,
- 有限素点 $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ での成分は, $G_{\underline{w}} \curvearrowright (\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{w}}}^{\times} \times p_{\underline{w}}^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times p_{\underline{w}}^{\mathbb{N}})$ — ただし, $p_{\underline{w}}$ は $\underline{w}$ の剰余標数 — とだいたい等価なデータ

です. これら局所成分を,

- $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ においては $G_{\underline{w}} \curvearrowright (\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{w}}}^{\times \mu} \times \underline{q}_{\underline{w}}^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times \underline{q}_{\underline{w}}^{\mathbb{N}})$ と $G_{\underline{w}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{w}}}^{\times \mu}$ の $\times \mu$ -Kummer 構造の組とだいたい等価なデータに,
- 有限素点 $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ においては, $G_{\underline{w}} \curvearrowright (\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{w}}}^{\times \mu} \times p_{\underline{w}}^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times p_{\underline{w}}^{\mathbb{N}})$ と $G_{\underline{w}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{w}}}^{\times \mu}$ の $\times \mu$ -Kummer 構造の組とだいたい等価なデータに

取り替えることで (そして, 無限素点での成分にも同様の適切な修正を適用することで) 得られる対象を,

$$\mathfrak{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}$$

と書くことにしましょう. ([8], Definition 4.9, (vi), を参照ください.) そして, 新たに得られた 4 つ組

$$\mathfrak{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}, \{\rho_{\underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

の同型物を, $\mathcal{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}$ 素点縞 ($\mathcal{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}$ -prime-strip — cf. [8], Definition 4.9, (viii)) と呼びます. したがって, (j) の $\dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\perp}$ から,

(m) $\mathcal{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}$ 素点縞

$$\dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\perp \blacktriangleright \times \mu} = (\dagger \mathcal{C}_{\Delta}^{\perp}, \text{Prime}(\dagger \mathcal{C}_{\Delta}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}, \{\dagger \rho_{\Delta, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

が得られます. ([8], Corollary 4.10, (iii), を参照ください.)

次に, 一般論の復習です. $\mathcal{D}^{\perp}$ 素点縞から — $\mathcal{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}$ 素点縞の定義に登場する 4 つ組 $\mathfrak{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu} = (\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}^{\perp \blacktriangleright \times \mu}, \{\rho_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}})$ の一部である — $(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \{\rho_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}})$ という 3 つ組の同型物を, 単遠アーベル的に復元/構成することが可能です. ([8], Corollary 4.5, (ii), を参照ください.)

(n) $\mathcal{D}^{\perp}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{D}_{\Delta}^{\perp}$ から復元/構成された “ $(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \{\rho_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}})$ ” というデータの同型物を

$$(\mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger\mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lt}}), \text{Prime}(\mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger\mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lt}}))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \{\dagger\rho_{\mathcal{D}^{\text{lt}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}\}$$

と書くことにします. このとき, $\dagger\mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lt}}$ と $\dagger\mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lt}}$ の定義から, $\mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lt}} \times^{\mu}$ から単遠アーベル的に, これら大域的実化対象の間の

(o) Kummer 同型

$$\begin{aligned} & (\dagger\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lt}})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \{\dagger\rho_{\Delta, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}\} \\ & \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger\mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lt}}), \text{Prime}(\mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger\mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lt}}))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \{\dagger\rho_{\mathcal{D}^{\text{lt}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}\} \end{aligned}$$

を構成することができます. ([8], Corollary 4.10, (v), を参照ください.)

この §9 の最後に, q 標対象 ([2], §12, の後半の議論を参照) という概念を導入します. (m) で定義された対象

$$\dagger\mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lt}} \times^{\mu} = (\dagger\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lt}})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger\mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lt}} \times^{\mu}, \{\dagger\rho_{\Delta, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}\}$$

を思い出しましょう. この対象の $\dagger\mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lt}} \times^{\mu}$ という (3 つ目の) データの各 $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ での “分裂モノイド” — つまり, $\underline{w}$ 成分 $\dagger\mathcal{F}_{\Delta, \underline{w}}^{\text{lt}} \times^{\mu}$ の “ $\{1\} \times \underline{q}_{\underline{w}}^{\mathbb{N}}$ ” に対応する部分 — たちの (各々の $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ に対してただ 1 つ存在する) 生成元たちは, $\{\dagger\rho_{\Delta, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}\}$ というデータを通じて, 大域的実化フロベニオイド $\dagger\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lt}}$ の対象を定めます.

(p) こうして得られる大域的実化フロベニオイド $\dagger\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lt}}$ の対象を **q 標対象** と呼ぶ

ことにします. したがって, 具体的には, q 標対象を,

$$\{\underline{q}_{\underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}} \text{ が定める数論的直線束}$$

(= 各 $\underline{w} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ に対する $\underline{q}_{\underline{w}}^{-1}$ が定める数論的因子に対応する数論的直線束 — [2], §4, の冒頭の議論を参照) と理解することが可能です. [2], §12, で説明された “宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把版” のとおり, この q 標対象が, 値群の変形を実現するリンク (つまり, $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク — §24 を参照) の “変形の目印 = 道標” となります.

§ 10. 乗法的対称化同型

§9 では, 加法的対称性 — つまり, $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の構造に深く関わる $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性 (§4 を参照) — から生じる対称化同型について論じました. この §10 では, ΘNF Hodge 劇場の構造に深く関わる $\mathbb{F}_l^*$ 対称性 (§5 を参照) から生じる乗法的な対称化同型について, 簡単に解説をします.

乗法的対称化同型を実現する対称性は, 大域的な $\mathbb{F}_l^*$ の作用によるものです. この作用は, 具体的には, §5, (f), に登場する同型 $\mathbb{F}_l^* \xleftarrow{\sim} \text{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\odot})/\text{Aut}_{\epsilon}(\dagger\mathcal{D}^{\odot})$ が表現する, $\mathbb{F}_l^*$ の $\dagger\mathcal{D}^{\odot}$ への多重作用 (つまり, $\text{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\odot})$ の $\dagger\mathcal{D}^{\odot}$ への作用の $\text{Aut}_{\epsilon}(\dagger\mathcal{D}^{\odot})$ 軌道) と

いう, エタール的な対象を用いて定義される作用です. 一方, Frobenius 的な視点においては, この多重作用は, $\mathbb{F}_l^*$ の ${}^\dagger\mathcal{F}^\circ$ への多重作用 (つまり, $\text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)$ の ${}^\dagger\mathcal{F}^\circ$ への作用の $\text{Aut}_\epsilon({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)$ 軌道) を誘導します. ([2], §24, で議論されたいくつかの円分剛性同型, 及び, それから生じる Kummer 同型を参照ください.) 以下, これらの多重作用から生じる対称化同型を, 具体的に見てみましょう.

[2], §25, で説明したとおり, 各 $j \in J$ に対して, “ δ 付値” という概念を用いることで, ${}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j \stackrel{\text{def}}{=} {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_{\delta_j}$ という $\mathcal{F}$ 素点縞を, (同型を除いて) 定義することができます. そして, §1 で復習した Hodge 劇場の NF 橋の定義の一部として, 充満多重同型 ${}^\dagger\mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim} {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j$ が与えられています. この $\mathcal{F}$ 素点縞 “ ${}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j$ ” の構成と同様の構成を, ${}^\dagger\mathcal{F}^\circ$ のエタール版である $\mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)$ ([2], §24, (g), を参照) に適用することで, 各 $j \in J$ に対して,

$$\mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_{\delta_j}$$

という $\mathcal{F}$ 素点縞, そして, それに対する

(a) Kummer 同型

$$({}^\dagger\mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim}) \quad {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_j$$

が得られます. ([8], Corollary 4.7, (ii); [8], Corollary 4.8, (ii), を参照ください.) これら J の各元でラベル付けされた $\mathcal{F}$ 素点縞たち ${}^\dagger\mathfrak{F}_j, {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j, \mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_j$ とその間の多重同型 ${}^\dagger\mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim} {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_j$ に対して, 上述の $\mathbb{F}_l^*$ の多重作用による大域的な対称性を適用することで, ラベルの異なる対象たちの間の同型が得られます ([8], Corollary 4.7, (ii); [8], Corollary 4.8, (ii), を参照):

$$({}^\dagger\mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim} {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_j) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger\mathfrak{F}_{j'} \xrightarrow{\sim} {}^\dagger\mathcal{F}^\circ|_{j'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\circ({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)|_{j'}).$$

§9 で説明された加法的な場合と同様に, こういった同型を, 対称化同型 — 特に, この場合, $\mathbb{F}_l^*$ 対称性から生じる対称化同型なので, $\mathbb{F}_l^*$ **対称化同型** ($\mathbb{F}_l^*$ -symmetrizing isomorphism — cf. [8], Corollary 4.7, (ii); [8], Corollary 4.8, (ii)), あるいは, 簡単に, “乗法的対称化同型” — と呼びます:

エタールの $\mathbb{F}_l^*$ 対称性 $\text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)/\text{Aut}_\epsilon({}^\dagger\mathcal{D}^\circ) (\cong \mathbb{F}_l^*) \curvearrowright J \implies$ エタールの対称化同型
 $\xrightarrow{\text{Kummer 同型}} \text{Frobenius 的 } \mathbb{F}_l^* \text{ 対称性, Frobenius 的対称化同型.}$

乗法的対称化同型の対象は, 上述の $\mathcal{F}$ 素点縞だけではありません. エタール的大域的フロベニオイド $\mathcal{F}_{\text{mod}}^*({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)$ ([2], §24, (h), を参照) と, Frobenius 的大域的フロベニオイド ${}^\dagger\mathcal{F}_{\text{mod}}^*$ ([2], §24, (k), を参照), 及び, それらに関する Kummer 同型 ${}^\dagger\mathcal{F}_{\text{mod}}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^*({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)$ ([8], Corollary 4.8, (i), を参照) も, この対称化同型の対象となります. つまり, $j \in J$ に対して, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^*({}^\dagger\mathcal{D}^\circ)_j, ({}^\dagger\mathcal{F}_{\text{mod}}^*)_j,$

(b) Kummer 同型

$$(\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})_j$$

を, j でラベル付けされたそれら対象のコピーとすると, 上述の $\mathbb{F}_l^*$ の多重作用による大域的な対称性を適用することで, これらコピーの間の同型が得られます ([8], Corollary 4.8, (ii), を参照):

$$((\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})_j) \xrightarrow{\sim} ((\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{j'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})_{j'}).$$

上の議論に登場した乗法的対称化同型の対象である $\mathcal{F}$ 素点縞と大域的フロベニオイド (= mod で添字付けられているフロベニオイド) は, 局所化写像で関連付けられます. すなわち, 各 $j \in J$ に対して,

(c) 可換図式

$$\begin{array}{ccc} (\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_j & \longrightarrow & \dagger \mathfrak{F}_j \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})_j & \longrightarrow & \mathcal{F}^{\odot}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})|_j \end{array}$$

— ただし, 垂直の矢は Kummer 同型, 水平の矢は局所化写像 —

が存在します. ([2], §25, の最後の議論を参照ください.) また, 上の議論に登場した乗法的対称化同型の対象である大域的フロベニオイド $\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}, \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})$ の実化

$$\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}}, \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})$$

— [2], §22, の後半の議論を参照 — は, §1 で復習した Hodge 劇場内のデータから構成される大域の実化フロベニオイドと — その Hodge 劇場の構造によって — 自然に関連付けられます. すなわち, 各 $j \in J$ に対して,

- $j \in J$ でラベル付けされた $\dagger \mathcal{C}^{\text{lf}}$ のコピーを $\dagger \mathcal{C}_j^{\text{lf}}$ と書き,
- $\mathcal{F}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim} \dagger \mathcal{F}^{\odot}|_j$ の下部 $\mathcal{D}^{\text{lf}}$ 素点縞を $\dagger \mathfrak{D}_j^{\text{lf}}$ と書き,
- $\dagger \mathfrak{D}_j^{\text{lf}}$ に対して §9, (n), の直前の手続きを適用することで得られる大域の実化フロベニオイドを $\mathcal{D}^{\text{lf}}(\dagger \mathfrak{D}_j^{\text{lf}})$ と書く

ことにすると,

(d) 可換図式

$$\begin{array}{ccc} (\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j & \xrightarrow{\sim} & \dagger \mathcal{C}_j^{\text{lf}} \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})_j & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}^{\text{lf}}(\dagger \mathfrak{D}_j^{\text{lf}}) \end{array}$$

— ただし、垂直の矢は Kummer 同型 —

が存在します. そして, (c), (d) の 2 つの図式は, それぞれの図式に登場する対象たちに関する上述の乗法的対称化同型と両立的となります. ([8], Corollary 4.7, (iii); [8], Corollary 4.8, (iii), を参照ください.)

最後に, 体 F_{mod} の同型物に対する乗法的対称化同型を紹介しましょう. [2], §24, の説明のとおり, [2], §24, の 2 番目の円分剛性同型から生じる Kummer 同型

$$F_{\text{mod}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{F}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})^{\times}$$

によって, (κ コア関数 — [2], §24, を参照 — を経由して得られるモノイド) $F_{\text{mod}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{F}^{\otimes})$ (と $\{0\}$ の和集合) に体の構造が定まります.

(e) この結果として得られる体を

$${}^{\dagger}F_{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{F}^{\otimes}) = F_{\text{mod}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{F}^{\otimes}) \cup \{0\}$$

と書くことにしましょう. したがって, ${}^{\dagger}F_{\text{mod}}$ は F_{mod} の同型物です. また, その定義から同義反復的に, Kummer 同型

$${}^{\dagger}F_{\text{mod}} \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})$$

が存在します. $\mathbb{F}_l^*$ による大域的な対称性によって, この体に対する対称化同型が得られます. つまり, $j \in J$ に対して, $({}^{\dagger}F_{\text{mod}})_j, F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})_j$,

(f) Kummer 同型

$$({}^{\dagger}F_{\text{mod}})_j \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})_j$$

を $j \in J$ でラベル付けされた ${}^{\dagger}F_{\text{mod}}, F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes}), {}^{\dagger}F_{\text{mod}} \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})$ のコピーとすると, $\mathbb{F}_l^*$ による大域的な対称性によって, ラベルの異なるコピーたちの間の同型が得られます ([8], Corollary 4.8, (ii), を参照):

$$({}^{\dagger}F_{\text{mod}})_j \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})_j \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}F_{\text{mod}})_{j'} \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})_{j'}.$$

この §10 では, 乗法的対称化同型の大域的対象の基本的な例である ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}, \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes}), {}^{\dagger}F_{\text{mod}}, F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\mathcal{D}^{\otimes})$ について解説しました. これらはどれも, “ F_{mod} ” という数体に直接的に関連する対象であり, したがって, Galois 群 $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の作用 — 特に, $\mathbb{F}_l^*$ の多重作用 — に関して, 不変な対象であることに注意しましょう. ([2], §21, の冒頭の議論も参照ください.) この事実から, $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の作用 (から誘導される作用) によって, 上述の様々な大域的対象に, 新たな余計な作用が生じないことになります.

§9, (b), と同様に, これまで考察を行ってきた乗法的対称化同型によって, 対称化同型の対象の直積の “対角” という概念を考えることができます. すなわち, A を乗法的対称化同型の対象として, A_j を $j \in J$ でラベル付けされた A のコピーとすると, 乗法的対称化同型によって, 直積 $\prod_{j \in J} A_j$ の “対角” を定義することが可能となります. 再び §9, (b), と同様に,

(g) $\prod_{j \in J} A_j$ の“対角”として生じる A のコピーに対して, $\langle J \rangle$ というラベルを与える

ことにしましょう:

$$A_{\langle J \rangle} \subseteq \prod_{j \in J} A_j.$$

§6 の冒頭で述べられているとおり, 加法的な対称性に関連するラベル集合 T から生じるラベル集合 T^* は, Hodge 劇場の貼り合わせ同型によって, 乗法的な対称性に関連するラベル集合 J と自然に関連付けられます. この関連付けにより, 加法的対称化同型から生じる $\langle T^* \rangle$ ラベル付き対象は, Hodge 劇場の貼り合わせ同型によって, 乗法的対称化同型から生じる $\langle J \rangle$ ラベル付き対象と自然に関連付けられることになります:

$$\langle J \rangle \longleftrightarrow \langle T^* \rangle \quad (\longleftrightarrow \triangle \longleftrightarrow 0)$$

— ただし, “ $(\longleftrightarrow \triangle \longleftrightarrow 0)$ ” については, §9, (c), を参照.

§ 11. 対数リンク

[2], §9, で議論したとおり, 宇宙際 Teichmüller 理論では, 乗法的な対象と加法的な対象を関連付けるために, 対数リンクという概念を考察する必要があります. この §11 では, [2], §9, や [2], §26, で説明が与えられたその対数リンクという概念を, 簡単に復習しましょう. 簡単のため, 我々の議論の対象となる素点を, 有限素点とします.

この §11 から §13 の間では, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ を有限素点として,

そして, p をその剰余標数としましょう.

[2], §6, で述べたとおり, p 進対数写像 $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times} \rightarrow (\overline{F}_{\underline{v}})_{+}$ (§1 を参照) は, 同型 $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times \mu} \xrightarrow{\sim} (\overline{F}_{\underline{v}})_{+}$ を誘導します. この全単射により, $(\overline{F}_{\underline{v}})_{+}$ の上の体構造を移送することで, $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times \mu}$ の上に — その従来の (乗法的) 演算が加法に対応する — 体構造を定義することができます. ここで, ${}^{\dagger}\mathfrak{F} = \{{}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{w}}\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}}$ を $\mathcal{F}$ 素点縞としましょう. したがって, §9 で復習した ($\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ の) 場合と同様に, ${}^{\dagger}\mathfrak{F}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}$ は, 位相群作用付きモノイド $\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ の同型物 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}$ とだいたい等価なデータです. ([2], §17, の最後の議論を参照ください.) 直前で行った “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times \mu}$ の上の体構造” に関する議論を, この $\underline{v}$ 成分に対して適用しましょう. ${}^{\dagger}\mathfrak{F}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}} = ({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright})$ に登場するモノイド ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}$ の

- 可逆元全体のなす部分群を ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times} \subseteq {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}$ と,
- その捻れ元全体のなす部分群を ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\mu} \subseteq {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}$ と,
- 商 ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times} / {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\mu}$ を ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times \mu}$ と

書くことにしましょう. (“†” で添字付けられていない記号については, §1 を参照ください.) すると, [2], §9, での議論のとおり, エタールの正則構造である ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ の ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ への作用 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ から, 単遠アーベル的に, ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ の上 — その従来の (乗法的) 演算が加法に対応する — 体構造を復元/構成することができます.

(a) この体構造によって定まる (位相群作用付き代数閉) 体を

$${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})$$

と書くことにしましょう. (§8, (e), の記法を参照ください.) (したがって, この位相群作用付き体 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})$ は, $\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{F}_{\underline{v}}$ の同型物です. その上, 体 $\tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})$ の下部加法加群 $\tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})_{+}$ は, 加群 ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ と自然に同一視されます.) そして,

(b) (a) で得られた体の非零整数による乗法モノイドを考えることで得られる位相群作用付きモノイドを

$$\log({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} ({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})}^{\times})$$

と書くことにします. ([9], Definition 1.1, (i), を参照ください.) したがって, この位相群作用付きモノイド $\log({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})$ は, 元々の ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}$ の同型物, つまり, ある “ $\mathcal{F}$ 素点縞の $\underline{v}$ 成分” です. また, ここで行った構成と類似的な構成は, 無限素点の場合にも存在します. ([9], Definition 1.1, (ii), を参照ください.)

(c) この新しい “ $\mathcal{F}$ 素点縞の $\underline{v}$ 成分” を集めてできる新しい $\mathcal{F}$ 素点縞を

$$\log({}^{\dagger}\mathfrak{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\log({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{w}})\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}$$

と書くことにしましょう. ([9], Definition 1.1, (iii), を参照ください.) ここで,

(d) この新しい $\mathcal{F}$ 素点縞 $\log({}^{\dagger}\mathfrak{F})$ の下部 $\mathcal{D}$ 素点縞は, 元の $\mathcal{F}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{F}$ の下部 $\mathcal{D}$ 素点縞と “一致” する

ことに注意しましょう.

また, 考察下の対象の正則構造 (つまり, 環構造) から定義される p 進対数写像 ${}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times} \rightarrow \tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})_{+}$ による, $({}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times})^{{}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}} \subseteq {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}$ の像の (乗法的ではなく加法的な) $1/2p$ 倍を考えることで, [2], §8, の意味での対数殻が得られます:

$$\mathcal{I}_{\dagger\mathcal{F}_{\underline{v}}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2p} \text{Im}(({}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times})^{{}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}} \hookrightarrow {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times} \twoheadrightarrow \tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})_{+}) \subseteq \tilde{k}({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}})_{+}^{{}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}}.$$

上の (b) の “ $\log(-)$ ” の場合と同様に, ここで行った構成と類似的な構成によって, 無限素点に対しても対数殻 “ $\mathcal{I}_{\dagger\mathcal{F}_{\underline{v}}}$ ” という概念を定義することができます. ([9], Definition 1.1, (ii), を参照ください.) そこで,

(e) すべての $\underline{w} \in \mathbb{V}$ に対するこれら対数殻を集めてできる対象を

$$\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{I}_{\dagger \mathcal{F}_w}\}_{w \in \mathbb{V}}$$

と書くことにしましょう. ([9], Definition 1.1, (iii), を参照ください.)

次に, 対数リンクの説明のための記号を導入します. §1 で復習した $\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場を

$$\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

と書くことにします. また, (§1 の冒頭で固定した初期 Θ データに関する) 別の新たな $\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場

$$\dagger \dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

を用意して, そして, $\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$, $\dagger \dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ のそれぞれ下部構造である $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場を

$$\dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}, \quad \dagger \dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

と書くことにします. したがって, 各ラベル $\square \in T \cup J \cup \{>\} \cup \{>\}$ に対して, これら $\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場たちの部品である $\mathcal{F}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}_{\square}$, $\dagger \dagger \mathfrak{F}_{\square}$ や, その下部 $\mathcal{D}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{D}_{\square}$, $\dagger \dagger \mathfrak{D}_{\square}$ — 特に, $\dagger \mathfrak{D}_{\square}$, $\dagger \dagger \mathfrak{D}_{\square}$ は, それぞれ $\dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$, $\dagger \dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ の部品 — を考察することができます. 下部 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場の間の同型

$$\Xi: \dagger \dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

は, その定義から, 各 $\square \in T \cup J \cup \{>\} \cup \{>\}$ に対して, $\mathcal{D}$ 素点縞 $\dagger \dagger \mathfrak{D}_{\square}$, $\dagger \mathfrak{D}_{\square}$ の間の同型 $\dagger \dagger \mathfrak{D}_{\square} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{D}_{\square}$ を定めます. ここで, (d) から, この同型 $\dagger \dagger \mathfrak{D}_{\square} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{D}_{\square}$ が, (“ $\mathcal{F}$ 素点縞 $\dagger \dagger \mathfrak{F}_{\square}$, $\dagger \mathfrak{F}_{\square}$ の下部 $\mathcal{D}$ 素点縞の間の同型” だけでなく) “ $\mathcal{F}$ 素点縞 $\log(\dagger \dagger \mathfrak{F}_{\square})$, $\dagger \mathfrak{F}_{\square}$ の下部 $\mathcal{D}$ 素点縞の間の同型” と見做せることに注意しましょう. したがって, (例えば [2], §20, で $\dagger \phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ から $\dagger \psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ を構成する際に適用した)

(f) $\mathcal{F}$ 素点縞の間の同型のなす集合からその下部 $\mathcal{D}$ 素点縞の間の同型のなす集合への自然な射は全単射

という事実によって, この同型 $\dagger \dagger \mathfrak{D}_{\square} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{D}_{\square}$ は, $\mathcal{F}$ 素点縞の間の同型

$$\log(\dagger \dagger \mathfrak{F}_{\square}) \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{F}_{\square}$$

を一意的に定めます. この (Ξ から定まる) 様々な $\mathcal{F}$ 素点縞の間の同型たち $\{\log(\dagger \dagger \mathfrak{F}_{\square}) \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{F}_{\square}\}_{\square \in T \cup J \cup \{>\} \cup \{>\}}$ をその内容とするリンクを, “ Ξ によって定まる対数リンク” と呼びます. そして, $\{\Xi \text{ によって定まる対数リンク}\}_{\Xi}$ — ここで, Ξ はすべての同型 $\dagger \dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ を走る — を, $\dagger \dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ と $\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ の間の対数リンクと呼び, それを,

$$\dagger \dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

という記号で表現します. ([2], §26, の最後の議論を参照ください.)

§ 12. 対数殻

§11, (e), の直前の議論で, ある正則的設定における対数殻の構成を復習しました. この §12 では, その他の様々な種類の対数殻を導入します.

まず最初に, 単解的設定における対数殻を導入しましょう. ${}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}$ を $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞とします. すると, [2], §17, の最後の議論のとおり, ${}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}$ の $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ 成分 ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ は, 位相群作用付き加群 $G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times\mu}$ に $\times\mu$ -Kummer 構造 $\{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq G_{\underline{v}}}$ を付加して得られるデータの同型物 (${}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}, \{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq {}^{\dagger}G_{\underline{v}}}$) とだいたい等価なデータです. ここで, p 進対数写像が, 同型 “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times\mu} \xrightarrow{\sim} (\overline{F}_{\underline{v}})_+^{\times\mu}$ ” を誘導することを思い出しましょう. ([2], §6, の議論を参照ください.) この事実によって, ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ から,

$$\tilde{k}_+({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu}) \stackrel{\text{def}}{=} {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}$$

として, $\overline{F}_{\underline{v}}$ の下部加法加群 $(\overline{F}_{\underline{v}})_+^{\times\mu}$ の同型物を復元/構成することができます. その上, 剰余標数 “ p ” は, ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ というデータ (の一部である ${}^{\dagger}G_{\underline{v}}$) から復元可能であるため, その結果として, ${}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu}$ から,

$$\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2p} \text{Im}(\mathcal{I}_{G_{\underline{v}}}^{\kappa} \hookrightarrow {}^{\dagger}\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu} = \tilde{k}_+({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu})) \subseteq \tilde{k}_+({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\times\mu})$$

として, 対数殻の同型物を復元/構成することができます. ([9], Definition 1.1, (iv), を参照ください.) ここで行った構成と類似的な構成は, 無限素点の場合にも存在します. ([9], Definition 1.1, (v), を参照ください.) すべての $\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対するそれら対数殻を集めてできる対象を

$$\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathcal{F}_{\underline{w}}^{\times\mu}}\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}}$$

と書くことにします. ([9], Definition 1.1, (vi), を参照ください.) この対数殻 $\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}}$ は, $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}$ の Frobenius 的部分から構成されています. $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞は単解的な対象ですので, それから構成されるこの対数殻 $\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}}$ を, 本稿では, **単解 Frobenius 的対数殻** (mono-analytic Frobenius-like log-shell) と呼ぶことにしましょう.

次に, ${}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}$ を $\mathcal{D}^{\dagger}$ 素点縞としましょう. すると, 遠アーベル幾何学の研究によって, 単遠アーベル的に, $\mathcal{D}^{\dagger}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}$ から, $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞 $\mathfrak{F}^{\times\mu}({}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger})$ を復元/構成することができます. この $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞 $\mathfrak{F}^{\times\mu}({}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger})$ に対して, 直前の議論における手続きを適用することで, 対数殻の集まり

$$\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}_{\mathfrak{F}^{\times\mu}({}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger})}$$

が得られます. この対数殻 $\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}}$ は, $\mathcal{D}^{\dagger}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}$ から構成されています. $\mathcal{D}^{\dagger}$ 素点縞は, 単解的な, そして, エタールの対象ですので, それから構成されるこの対数殻 $\mathcal{I}_{{}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}}$ を, 本稿では, **単解エタールの対数殻** (mono-analytic étale-like log-shell) と呼ぶことにしましょう.

与えられた $\mathcal{D}^{\dagger}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{D}^{\dagger}$ が, ある $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}$ の下部 $\mathcal{D}^{\dagger}$ 素点縞であったとしましょう. このとき, ${}^{\dagger}\mathfrak{F}^{\times\mu}$ の各局所成分の $\times\mu$ -Kummer 構造から, 単解的対数殻

の間の Kummer 同型

$$\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}^+ \times \mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}^+}$$

を,

(Ind2) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ においては

$$\mathrm{Ism}_{\underline{v}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ G_{\underline{v}} \text{ の作用, 及び, } \times \mu\text{-Kummer 構造と両立的な } \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times \mu} \text{ の自己同型} \}$$

に対応する群の作用から, そして, 無限素点においては “ $\mathrm{Ism}_{\underline{v}}$ ” と類似的な群の作用から, ($\underline{\mathbb{V}}$ の各元において) それぞれ生じる不定性

のもと, 構成することができます. ([9], Proposition 1.2, (vi), (vii), を参照ください.)

次に, 正則的設定における対数殻を導入します. §9, (f), で導入された対象 $\Psi_{\mathrm{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\square}$ (ただし, $\square \in T \cup |T| \cup \{\Delta\}$) を思い出しましょう. この対象に対して, §11, (e), の直前の構成と同様の構成を適用することで, 対数殻の集まりを得ることができます. この対数殻の集まりを

$$\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}, w} \}_{w \in \underline{\mathbb{V}}}$$

と書くことにしましょう. また, §9, (d), で導入された対象 $\Psi_{\mathrm{cns}}(\dagger \mathfrak{D}_{\succ})_{\square}$ (ただし, $\square \in T \cup |T| \cup \{\Delta\}$) から, 同様の方法で, 対数殻の集まりを得ることができます. この対数殻の集まりを

$$\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square, w} \}_{w \in \underline{\mathbb{V}}}$$

と書くことにしましょう. 前者の対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}}$ は, $\mathcal{F}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}_{\succ}$ の Frobenius 的部分から構成されています. (§9, (f), の直前の議論を参照ください.) $\mathcal{F}$ 素点縞は正則的な対象ですので, それから構成されるこの対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}}$ を, 本稿では, **正則 Frobenius 的対数殻** (holomorphic Frobenius-like log-shell) と呼ぶことにしましょう. また, 後者の対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square}$ は, $\mathcal{D}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{D}_{\succ}$ から構成されています. $\mathcal{D}$ 素点縞は, 正則的な, そして, エタールの対象ですので, それから構成されるこの対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square}$ を, 本稿では, **正則エタールの対数殻** (holomorphic étale-like log-shell) と呼ぶことにしましょう.

§9, (k), の Kummer 同型は, 正則的対数殻の間の Kummer 同型

$$\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square}$$

を誘導します. また, ここで, $\Psi_{\mathrm{cns}}(\dagger \mathfrak{F}_{\succ})_{\square}$ に付随する $\mathcal{F}^+ \times \mu$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}$ (§9, (g), を参照), $\mathcal{D}^+$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{D}_{\square}^+$ (§9, (h), を参照) は, それぞれ $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}}, \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square}$ の構成の出発点であるデータの “単解化” であると見做することができることに注意しましょう. この事実により, 対数殻の定義から, 単解化同型

$$\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}^{+ \times \mu}}, \quad \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\succ}, \square} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\square}^+}$$

が得られます.

この §12 の最後に、対数体積という概念の説明を行います。対象が持つ正則構造から、正則 Frobenius 的対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}, \underline{v}}$ の“有理化” $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}, \underline{v}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 、及び、正則エタールの対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\sim, \square}, \underline{v}}$ の“有理化” $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\sim, \square}, \underline{v}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ のコンパクトな開部分集合に対して、**対数体積** (log-volume — cf. [6], Proposition 5.7, (i), (a)) という概念を定義することができます。すなわち、“ $K_{\underline{v}}$ ” の体構造から、“ $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ” ($\cong$ “ $(K_{\underline{v}})_+$ ”) のコンパクトな開部分集合 A に対して、以下の 3 条件を満たす対数体積 $\mu_{\underline{v}}^{\log}(A) \in \mathbb{R}$ を一意的に定義することが可能です:

- $A \cap B = \emptyset$ ならば $\exp(\mu_{\underline{v}}^{\log}(A \cup B)) = \exp(\mu_{\underline{v}}^{\log}(A)) + \exp(\mu_{\underline{v}}^{\log}(B))$.
- “ $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ” $\cong$ “ $(K_{\underline{v}})_+$ ” の元 x に対して $\mu_{\underline{v}}^{\log}(A + x) = \mu_{\underline{v}}^{\log}(A)$.
- “ $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ” $\cong$ “ $(K_{\underline{v}})_+$ ” の整数環部分 $\mathcal{O}_+$ に対して、 $\mu_{\underline{v}}^{\log}(\mathcal{O}_+) = 0$.

そして、同様の“体積”に関する概念を、無限素点の場合にも定義することができます。([6], Proposition 5.7, (ii), (a), を参照ください.)

一方、単解的対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathcal{F}_{\underline{v}}^+ \times \mu}$, $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}^+, \underline{v}}$ は、正則構造と直接的に結び付かないため、正則的対数殻の場合と違い、正則構造を用いて対数体積を定義することはできません。しかしながら、[2], §8, でも述べたとおり、遠アーベル幾何学の研究によって、単解的設定においても、正則的な場合と同様の対数体積という概念を定義することができるという事実が知られています。([6], Proposition 5.8, (iii), を参照ください.) つまり、単解 Frobenius 的対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathcal{F}_{\underline{v}}^+ \times \mu}$ の“有理化” $\mathcal{I}_{\dagger \mathcal{F}_{\underline{v}}^+ \times \mu} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 、及び、単解エタールの対数殻 $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}^+, \underline{v}}$ の“有理化” $\mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}^+, \underline{v}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ のコンパクトな開部分集合に対しても、正則的な場合と同様の 3 つの条件を満たす対数体積という概念を定義することが可能です。また、無限素点の場合にもやはり同様に、“体積”に関する概念を定義することができます。([6], Proposition 5.8, (vi), を参照ください.) そして、4 種類の対数殻の間の Kummer/単解化同型による可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{F}_{\square}^+ \times \mu} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\sim, \square}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}_{\dagger \mathfrak{D}_{\square}^+} \end{array}$$

において、それぞれの対数殻の上で定義されている対数体積は、両立的となります。[2], §8, での説明のとおり、この

単解的設定における対数殻に対しても、対数体積を定義することが可能である

という事実は、我々が目標としている Diophantus 幾何学的不等式の証明に対して、非常に重要です。

§ 13. テンソルパケット

この §13 では, **テンソルパケット** (tensor packet) という概念を導入します. §6 で導入した列 (= 行進を定義するためのラベル集合の列)

$$\mathbb{S}_1^\pm \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbb{S}_j^\pm \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbb{S}_{l^\pm}^\pm \quad (= |T|)$$

を思い出しましょう.

まず最初に, **局所正則テンソルパケット** (local holomorphic tensor packet — cf. [9], Proposition 3.1) という概念を導入します. 各 $|t| \in |T|$ で添字付けられた §9, (f), の対象から, 上の列によって “添字付け” られた行進を構成しましょう. (§6 を参照ください.) 行進の部品の $(|t|, \underline{v})$ 成分に, §11, (a), に関する構成を適用することで,

$${}^\dagger \Pi_{|t|, \underline{v}} \curvearrowright \tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})$$

という位相群作用付き体を復元/構成することができます. ここで,

$$\tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}}) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{H \subseteq {}^\dagger \Pi_{|t|, \underline{v}}} \tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})^H$$

— ただし, H は ${}^\dagger \Pi_{|t|, \underline{v}}$ のすべての開部分群を走る — という自然な同型を通じて, $\tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})$ を “位相体の順極限”, 特に, (下部加法加群を考えることによって) “位相加群の順極限” と見做すことができることに注意しましょう.

$|t| \in |T|$, $\underline{v} \mid v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})$, $1 \leq j \leq l^\pm$ に対して,

$$\tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_{\mathbb{Q}}}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\underline{v} \ni \underline{w} \mid v_{\mathbb{Q}}} \tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{w}}),$$

$$\tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{|t| \in \mathbb{S}_j^\pm} \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_{\mathbb{Q}}}),$$

$$\tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j-1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \otimes \tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|j-1|, \underline{v}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

— ただし, “ $\otimes$ ” は “位相加群の順極限のテンソル積” (上の “位相加群の順極限” に関する議論を参照) を意味する — と書くことにします. ここで, 各 “ $\tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{w}})$ ” の環構造から,

$$\tilde{k}({}^\dagger \mathcal{F}_{|j-1|, \underline{v}}) \xrightarrow{1 \otimes (-)} \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}})$$

という自然な単射が定まることに注意しましょう. ここで導入された 3 種類の加群 $\tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_{\mathbb{Q}}})$, $\tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$, $\tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}})$ の定義において, “ $\tilde{k}$ ” を “ $\mathcal{I}$ ” に置き換えることで,

$$\mathcal{I}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_{\mathbb{Q}}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_{\mathbb{Q}}}), \quad \mathcal{I}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}}),$$

$$\mathcal{I}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes({}^\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}})$$

というコンパクトな部分加群が得られます. また, これらコンパクトな加群が生成する (有限次元) $\mathbb{Q}_p$ 線型部分空間を

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}), \quad (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}),$$

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}})$$

と書くことにします.

上述の構成の出発点となる対象, つまり,

- $|T|$ の各元 $|t| \in |T|$ で添字付けられた §9, (f), の対象から構成される, 冒頭の列によって “添字付け” られた行進

を,

- $|T|$ の各元 $|t| \in |T|$ で添字付けられた §9, (d), の対象から構成される, 冒頭の列によって “添字付け” られた行進

に取り替えることによって, 上述の局所正則テンソルパケットの “エタール版” が得られます. これを, 上で導入された記号の “ $\mathcal{F}$ ” を “ $\mathcal{D}_\succ$ ” に取り替えることによって得られる記号

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\succ, |t|, v_Q}) \subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{D}_{\succ, |t|, v_Q}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\succ, |t|, v_Q}),$$

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, v_Q}) \subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, v_Q}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, v_Q}),$$

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}) \subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}})$$

で表現することにしましょう.

次に, **局所単解テンソルパケット** (local mono-analytic tensor packet — cf. [9], Proposition 3.2) という概念を導入します. 各 $|t| \in |T|$ で添字付けられた §9, (g), の $\mathcal{F}^{+ \times \mu}$ 素点縞から, 冒頭の列によって “添字付け” られた行進を構成しましょう. (§6 を参照ください.) 行進の部品の $(|t|, \underline{v})$ 成分に, §12 の前半の議論で説明された構成を適用することで,

$$\dagger G_{|t|, \underline{v}} \curvearrowright \tilde{k}_+(\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}}^{+ \times \mu})$$

という位相群作用付き加群を復元/構成することができます. 上で行った “ $\tilde{k}(\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})$ ” に対する議論と類似的な議論によって, 同様に, $\tilde{k}_+(\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}}^{+ \times \mu})$ を “位相加群の順極限” と見做すことができます.

$|t| \in |T|$, $\underline{v} \mid v_Q \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})$, $1 \leq j \leq l^\pm$ に対して,

$$\tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\mathbb{V} \ni \underline{w} \mid v_Q} \tilde{k}_+(\dagger \mathcal{F}_{|t|, \underline{w}}^{+ \times \mu}),$$

$$\tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{|t| \in \mathbb{S}_j^\pm} \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu}),$$

$$\tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^{+ \times \mu}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j-1}^\pm, v_Q}^{+ \times \mu}) \otimes \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|j-1|, \underline{v}}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu})$$

— ただし, “ $\otimes$ ” は “位相加群の順極限のテンソル積” (上の “位相加群の順極限” に関する議論を参照) を意味する — と書くことにします. ここで導入された 3 種類の加群 $\tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu})$, $\tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu})$, $\tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^{+ \times \mu})$ の定義において, “ $\tilde{k}_+$ ” を “ $\mathcal{I}$ ” に置き換えることで,

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu}), \quad \mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu}),$$

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^{+ \times \mu})$$

というコンパクトな部分加群が得られます. また, これらコンパクトな加群が生成する (有限次元) $\mathbb{Q}_p$ 線型部分空間を

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{|t|, v_Q}^{+ \times \mu}), \quad (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^{+ \times \mu}),$$

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^{+ \times \mu}) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^{+ \times \mu})$$

と書くことにします.

上述の構成の出発点となる対象, つまり,

- $|T|$ の各元 $|t| \in |T|$ で添字付けられた §9, (g), の対象から構成される, 冒頭の列によって “添字付け” られた行進

を,

- $|T|$ の各元 $|t| \in |T|$ で添字付けられた §9, (i), の対象から構成される, 冒頭の列によって “添字付け” られた行進

に取り替えることによって, 上述の局所単解テンソルパケットの “エタール版” が得られます. これを, 上で導入された記号の “ $\mathcal{F}^{+ \times \mu}$ ” を “ $\mathcal{D}^+$ ” に取り替えることによって得られる記号

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{|t|, v_Q}^+) \subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{D}_{|t|, v_Q}^+) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{|t|, v_Q}^+),$$

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^+) \subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^+) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_Q}^+),$$

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^+) \subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^+) \subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^+)$$

で表現することにしましょう.

以上の定義から簡単に確認できるとおり, 局所テンソルパケットという概念に移行することによって, 少なくとも “ v_Q ” という記号が登場する対象は, §6 で議論された行進のラベル集合に生じる不定性に影響を受けません. 一方, “ $\underline{v}$ ” という記号が登場する対象には, 行進のラベル集合に生じる不定性と両立的な不定性が生じます. また, 再びこれまでの定義から確認できるとおり, この局所テンソルパケットへの移行によって, 異なる元でラベル付けされた対象への “整数倍作用” を同一視することが可能になります.

§12 の後半で考察を行った正則的/単解的設定における対数殻に関する対数体積を用いて、局所正則テンソルパッケージによって定義される対数殻が定める $\mathbb{Q}_p$ 線型空間

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{F}_{|t|,v_\mathbb{Q}}) &\subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger\mathcal{F}_{|t|,v_\mathbb{Q}}), & (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}) &\subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}), \\ (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v}) &\subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v}), \\ (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{D}_{\succ,|t|,v_\mathbb{Q}}) &\subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger\mathcal{D}_{\succ,|t|,v_\mathbb{Q}}), & (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}) &\subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}), \\ (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_j^\pm,v}) &\subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_j^\pm,v}) \end{aligned}$$

や局所単解テンソルパッケージによって定義される対数殻が定める $\mathbb{Q}_p$ 線型空間

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{F}_{|t|,v_\mathbb{Q}}^{+\times\mu}) &\subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger\mathcal{F}_{|t|,v_\mathbb{Q}}^{+\times\mu}), & (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}^{+\times\mu}) &\subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}^{+\times\mu}), \\ (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v}^{+\times\mu}) &\subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm,v}^{+\times\mu}), \\ (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{D}_{|t|,v_\mathbb{Q}}^+) &\subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger\mathcal{D}_{|t|,v_\mathbb{Q}}^+), & (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}^+) &\subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger\mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm,v_\mathbb{Q}}^+), \\ (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger\mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm,v}^+) &\subseteq \tilde{k}_+^\otimes(\dagger\mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm,v}^+) \end{aligned}$$

のコンパクトな開部分集合に対して、**行進正規化対数体積** (procession-normalized log-volume — cf. [9], Proposition 3.9, (i), (ii); [9], Remark 3.9.3) という値を定めることができます。

また、ここでは詳しく説明しませんが、これまでに導入した局所正則テンソルパッケージ、局所単解テンソルパッケージ、行進正規化対数体積といった概念には、その無限素点版も存在します。([9], Proposition 3.1; [9], Proposition 3.2; [9], Proposition 3.9, を参照ください。)

最後に、**大域テンソルパッケージ** (global tensor packet — cf. [9], Proposition 3.3) という概念を導入します。§10, (e), で定義された体 ${}^\dagger F_{\text{mod}}$ を思い出しましょう。 $1 \leq j \leq l^\pm$ に対して、

$$({}^\dagger F_{\text{mod}})_{\mathbb{S}_j^\pm}^\otimes \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{|t| \in \mathbb{S}_j^\pm} ({}^\dagger F_{\text{mod}})_{|t|}$$

— ただし、 $({}^\dagger F_{\text{mod}})_{|t|}$ は、 $|t| \neq 0$ の場合には $|t| \in T^* \cong J$ でラベル付けされた ${}^\dagger F_{\text{mod}}$ のコピー、 $|t| = 0$ の場合には $\langle J \rangle$ でラベル付けされた ${}^\dagger F_{\text{mod}}$ のコピー ([9], Remark 3.3.2, (i), また、§10, (g), やその下の議論を参照) — と書くことにします。各 “ $({}^\dagger F_{\text{mod}})_{|t|}$ ” の体構造から、

$$({}^\dagger F_{\text{mod}})_{|j-1|} \xrightarrow{1 \otimes (-)} ({}^\dagger F_{\text{mod}})_{\mathbb{S}_j^\pm}^\otimes$$

という自然な単射が定まることに注意しましょう。

§ 14. 対数列

[2], §9, での議論のとおり, 宇宙際 Teichmüller 理論の主定理に到達するためには, 単一の Hodge 劇場 “ $\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ ” や単一の対数リンク “ $\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ ” では不十分であり, 対数リンクによる Hodge 劇場の (左右に無限に伸びる) 無限列

$$\dots \xrightarrow{\log} \dagger_{-1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_0 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_1 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots$$

を考察する必要があります. この “対数リンクによる Hodge 劇場の無限列” を, 本稿では, **対数列** (log-line) と呼ぶことにしましょう. (つまり, 対数列とは, **対数データ格子** (log-theta-lattice — cf. [9], Definition 1.4; [9], Definition 3.8, (iii)) と呼ばれる格子の, ある 1 つの垂直の列に相当する概念となります.) この §14 では, 対数列

$$\dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (\dots \xrightarrow{\log} \dagger_{-1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_0 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_1 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots)$$

を固定して, 議論を行います.

$n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq l^*$ としましょう. このとき, §10, (c), の図式の上側の水平の局所化写像 “ $(\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_j \rightarrow \dagger \mathfrak{F}_j$ ” と対数リンクによる同型によって, (“ $0 = \langle T^* \rangle = \langle J \rangle$ ” という関係のもと — §9, (c); §10, (g), を参照) 局所化単射

$$(\dagger^n F_{\text{mod}})_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}}^{\otimes} \hookrightarrow \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} \tilde{k}^{\otimes} (\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}})$$

が, したがって, 単射

$$(\dagger^n F_{\text{mod}})_{|j|} \hookrightarrow ((\dagger^n F_{\text{mod}})_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}}^{\otimes} \hookrightarrow) \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} \tilde{k}^{\otimes} (\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}})$$

が得られます.

(a) 後者の単射の像を

$$(\dagger^n F_{\text{MOD}})_{|j|} = (\dagger^n F_{\text{mod}})_{|j|}$$

と書くことにします. そして,

(b) (a) の像 — つまり, $(\dagger^n F_{\text{MOD}})_{|j|}$ — によって定まる “ $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ ” (つまり, “乗法的解釈” による数論的直線束のなすフロベニオイド — [2], §22, を参照) の同型物を

$$(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes})_{|j|}$$

と書くことに, その上,

(c) (a) の像 — つまり, $(\dagger^n F_{\text{mod}})_{|j|}$ — と, 各 $\underline{v} \ni v|v_{\mathbb{Q}}$ での整構造

$$\mathcal{O}_{\tilde{k}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{|j|, \underline{v}})} \hookrightarrow \tilde{k}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{|j|, \underline{v}}) \hookrightarrow \tilde{k}^{\otimes}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}) \hookrightarrow \tilde{k}^{\otimes}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}})$$

によって定まる “ $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ ” (つまり, “加群的解釈” による数論的直線束のなすフロベニオイド — [2], §22, を参照) の同型物を

$$(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|}$$

と書くことにします. ([9], Proposition 3.7, (i), (ii), を参照ください.) その定義から,

(d) 自然な圏同値

$$(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|} \xrightarrow{\sim} (\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes})_{|j|} \xrightarrow{\sim} (\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|}$$

が存在する

ことに注意しましょう. また, [2], §8, での説明の観点から,

(e) (c) で説明された整構造によって, $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|}$ の対象として生じる数論的直線束に対して, その次数を, §12 や §13 で説明された対数体積を用いて計算することができる

という事実は重要です.

次に, 対数列のエタールの側面について議論しましょう. 固定された対数列

$$\dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (\dots \xrightarrow{\log} \dagger^{-1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger^0 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger^1 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots)$$

は, その定義から, (充満多重) 同型による下部 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場の無限列

$$\dots \xrightarrow{\sim} \dagger^{-1} \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\sim} \dagger^0 \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\sim} \dagger^1 \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\sim} \dots$$

を定めます. ([9], Theorem 1.5, (i), を参照ください.)

(f) これら同型射によって同一視を行うことで得られる (同型を除いて定まる) $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場を

$$\dagger \circ \mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

と書くことにしましょう. つまり, これは, “対数列 $\dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ の下部 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場” と考えられる対象です. この “対数列の下部 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場” の存在は,

対数列における各 Hodge 劇場が, 少なくともエタールのには, 正則的に結び付いている

ということを意味しています. この $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場 ${}^{\dagger}\circ\mathcal{HT}^{\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ 内の ${}^{\dagger}\circ\mathcal{D}^{\odot}$ に対して, [2], §24, (c), に関する手続きを適用することで,

(g) F_{mod} の同型物

$$F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}^{\odot})$$

が得られます. この体 $F_{\text{mod}}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}^{\odot})$ とエタールの局所正則テンソルパッケージから出発して, 上で行った “ $({}^{\dagger n}F_{\text{MOD}})_{|j|}$ ”, “ $({}^{\dagger n}F_{\text{mod}})_{|j|}$ ”, “ $({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\odot})_{|j|}$ ”, “ $({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\odot})_{|j|}$ ” といった対象に関する議論における構成と同様の構成を適用することによって,

(h) F_{mod} の同型物

$$({}^{\dagger}\circ F_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}})_{|j|}, \quad ({}^{\dagger}\circ F_{\mathcal{D}_{\text{mod}}})_{|j|}$$

と $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\odot} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\odot} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\odot}$ の同型物

$$\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\odot}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}^{\odot})_{|j|} \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}}^{\odot})_{|j|} \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}}^{\odot})_{|j|}$$

が得られます. ([9], Proposition 3.10, (i), を参照ください.) また, Frobenius 的な場合と同様に,

(i) (c) で説明された整構造のエタール版によって, $({}^{\dagger}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}}^{\odot})_{|j|}$ の対象として生じる数論的直線束に対して, その次数を, §12 や §13 で説明された対数体積を用いて計算することが可能

です.

§ 15. 大域的対数 Kummer 対応

次に, 対数列の Frobenius 的側面とエタールの側面とを結び付ける Kummer 同型, 特に, 対数 Kummer 対応 ([2], §10, を参照) について考察しましょう.

§14 の設定のもと, 各 $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq l^{\pm}$ に対して, §12 で議論した対数殻に対する Kummer/単解化同型は, Kummer/単解化同型

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{+ \times \mu}) & \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, \underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, \underline{v}}^{+ \times \mu}) \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr & \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{+}) & \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^{\pm}, \underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\circ\mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, \underline{v}}^{+}) \end{array}$$

を —

(Ind2) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に付随する様々な部品においては $\text{Ism}_{\underline{v}}$ (§12 を参照) に対応する群の作用から, 無限素点に付随する様々な部品においては “ $\text{Ism}_{\underline{v}}$ ” と類似的な群の作用から, それぞれ生じる不定性

のもと — 定めます. また, 各 $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq l^*$ に対して, §9, (k), の Kummer 同型と §10, (b), (f), の Kummer 同型は, Kummer 同型

$$\begin{aligned} (\dagger^n F_{\text{MOD}})_{|j|} &\xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ F_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}})_{|j|}, & (\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^\otimes)_{|j|} &\xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}}^\otimes)_{|j|}, \\ (\dagger^n F_{\text{mod}})_{|j|} &\xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ F_{\mathcal{D}_{\text{mod}}})_{|j|}, & (\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^\otimes)_{|j|} &\xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}}^\otimes)_{|j|} \end{aligned}$$

を定めます. ([9], Proposition 3.10, (i), を参照ください.)

定義から簡単に確認できるとおり, 各 $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq l^*$, そして, (簡単のため) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して,

- §9, (f), で議論された対象 $\Psi_{\text{cns}}(\dagger^n \mathfrak{F}_{\succ})_{|j|}$ の $\underline{v}$ 成分 $\Psi_{\text{cns}}(\dagger^n \mathfrak{F}_{\succ})_{|j|, \underline{v}}$ の “単数部分” — つまり, 単数的加群 “ $\mathcal{O}_{F_{\tilde{v}}}^\times$ ” に相当する部分 — の Galois 不変部分 — つまり, 単数的加群 “ $\mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^\times$ ” に相当する部分 —

は, Frobenius 的局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \subseteq \tilde{k}^\otimes(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

— ただし, $\underline{v}|v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})$ — に, したがって, Kummer 同型

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

を通じて, エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

に自然に作用します. また, §14, (a), の直前の議論から, 各 $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq l^*$ に対して,

- $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^\otimes)_{|j|}$ の構成に用いられた体の乗法群として生じる Frobenius 的乗法群 $(\dagger^n F_{\text{MOD}})_{|j|}^\times$

は, Frobenius 的局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$\prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \subseteq \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} \tilde{k}^\otimes(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

に, したがって, Kummer 同型

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

を通じて, エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$\prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_{\mathbb{Q}}})$$

に自然に作用します. 一方, これら単数的加群, 大域的乗法群の“単一の Kummer 同型による作用”では, [2], §9, で論じられている“対数リンク不変”という重要な性質を満足しません. そのため, [2], §9, で説明した“対数殻の無限列全体の使用”を考察しなければなりません.

まず最初に, 大域的乗法群の作用の際における“対数殻の無限列全体の使用”を考察しましょう. この場合, 上で議論した

$$({}^{\dagger n}F_{\text{MOD}})_{|j|}^{\times} \curvearrowright \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in V(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}})$$

という作用だけを考えるのではなく, 任意の非負整数 m に対する対数写像の m 回反復合成

$$\begin{aligned} ({}^{\dagger n}F_{\text{MOD}})_{|j|}^{\times} \curvearrowright \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in V(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) &\xrightarrow{\text{対数}} \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in V(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) \\ &\xrightarrow{\text{対数}} \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in V(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n+1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\text{対数}} \cdots \xrightarrow{\text{対数}} \prod_{v_{\mathbb{Q}} \in V(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1+m}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) \end{aligned}$$

— ただし, “ $\xrightarrow{\text{対数}}$ ” は各局所成分での単数部分上で定義される対数写像 ([2], §9, の議論を参照) — を行った後に Kummer 同型

$$\mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n-1+m}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}})$$

を適用することで得られる, エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻への作用を考える必要があります. 具体的には, $1 \leq j \leq l^*$ に対して,

- (1) Frobenius 的大域的乗法群の集まり $\{({}^{\dagger n}F_{\text{MOD}})_{|j|}^{\times}\}_{n \in \mathbb{Z}}$,
- (2) エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻 $\prod_{v_{\mathbb{Q}}} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}})$,
- (3) 各々 $n \in \mathbb{Z}$ でラベル付けされた (1) の大域的乗法群の, 対数写像の m 回反復合成 (ただし, m はすべての非負整数を走る) による, (2) への作用たち

という 3 つ組は — 対数リンクは実質的には “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\vec{v}}}^{\times}$ ” 全体ではなく, その単数部分 “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\vec{v}}}^{\times}$ ” のみから構成されるため ([9], Remark 1.1.1, を参照) — “対数リンク不変” な対象となります. 一方, [2], §9, の最後の注意のとおり, (3) の使用を望むならば, (対数写像の反復合成によって生じてしまうかもしれない) 無関係な局所的な元による作用と $({}^{\dagger n}F_{\text{MOD}})_{|j|}^{\times}$ による作用との“干渉”について議論しなければなりません. すなわち, (3) の対数写像の反復合成によって, (1) の各成分の“従来の作用”とは異なる“別の作用”が, (2) に生じないことを確認しなければなりません. その所望の“干渉性”は, 再び [2], §9, の最後の注意のとおり,

数体の乗法群の元であって、各局所化において単数 (つまり、絶対値が 1) となる元は、1 の巾根のみ

という代数的整数論における初等的な事実から従います. 対数写像 “ $\overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow}$ ” の定義域は、各局所成分での単数部分です. したがって、上の事実から、 $(\dagger^n F_{\text{MOD}})_{|j|}^\times$ の元であって、対数写像 “ $\overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow}$ ” の定義域に属するものは、1 の巾根しかありません. 一方、1 の巾根を掛けるという操作は、対数写像を介して、0 を足すという操作に姿を変えるため、その結果として、(対数写像の反復合成による) 無関係な局所的な元による作用と $(\dagger^n F_{\text{MOD}})_{|j|}^\times$ による作用との “干渉” は生じないことがわかります. ([9], Proposition 3.10, (ii), を参照ください.) このように、大域的乗法群の対数殻への作用に関する “明確” な (= 不都合な干渉が生じない) 対数 Kummer 対応が得られました. 大域的乗法群に対する対数 Kummer 対応のこの “明確さ” の帰結として、

この §15 の前半で述べた Kummer 同型

$$(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^\otimes)_{|j|} \xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}}^\otimes)_{|j|}$$

は、対数列において (つまり、“ n の変更” に関して) 同時に両立的である

という事実が従います. ([9], Proposition 3.10, (iii), を参照ください.) (ここで議論されている “干渉性” についてのより詳しい解説は、[9], Remark 3.11.4; [9], Fig. 3.5, を参照ください.)

次に、単数的加群、つまり、 $\Psi_{\text{cns}}(\dagger^n \mathfrak{F}_{\succ})_{|j|, \underline{v}}$ の “単数部分” に対する同時両立性の可能性について検討しましょう. 考察下の単数的加群は、その定義から、対数写像の反復合成

$$\begin{aligned} & (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm) \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^n \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm) \\ & \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n+1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm) \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} \dots \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1+m} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm) \end{aligned}$$

の影響を強く受けてしまう対象です. したがって、これら単数的加群に対して、大域的乗法群に対する同時両立性と同様の同時両立性を期待することは、適切ではありません.

大域的乗法群に関する議論で観察したとおり、(簡単のため) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して、エタールの局所正則テンソルパッケージ

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm)$$

は — したがって、(単解化同型を通じて) エタールの局所単解テンソルパッケージ

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm)$$

は — Frobenius 的局所正則テンソルパッケージに対する対数写像の m 回反復合成

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm) \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^n \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, v_\mathbb{Q}}^\pm)$$

$$\overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n+1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}) \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} \dots \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1+m}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}})$$

— ただし, $n \in \mathbb{Z}$, m は任意の非負整数 — と Kummer 同型

$$(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^{n-1+m}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}) \quad (\xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}^\perp))$$

の合成による像の, “ n や m に依存しない入れ物”, “様々な n や m に対して共通に採用可能な値域・受け皿” であると理解することができます. この観察のもと, ここで, 考察下の Frobenius 的対数殻たちに対して,

(Ind3) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, Frobenius 的対数殻のテンソルパケットの集まり

$$\{(\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^n \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}) \quad (\subseteq (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^n \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}))\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

を, その “共通の入れ物”

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}) \quad (\xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}^\pm, v_\mathbb{Q}}^\perp))$$

に関する (“完全な両立性” ではなく) “上半両立性” の対象であると考え (また, 無限素点においても同様の “上半両立性” の対象であると考え)

という “不定性” を導入しましょう. このように, “完全な両立性” を諦めて, “上半両立性” の対象であると考えするという “不定性” を導入することで, (大域的乗法群の場合と比較すれば非常に複雑ですが) 単数的加群に関する対数 Kummer 対応が得られます. ([9], Proposition 3.5, (ii), を参照ください.)

次に, 対数写像に対する対数体積両立性を論じましょう. [2], §9, の最後の注意のとおり, 対数写像の反復合成の使用を望むならば (上の (3) や (Ind3) を参照), 対数写像の反復合成に対する対数体積両立性を確認しない限り, “対数体積によって数論的直線束の次数が計算可能” という重要な事実 (§14, (e), (i), を参照) を有効に活用することはできません. 一方, この両立性は, 再び [2], §9, の最後の注意のとおり,

有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ と与えられたコンパクトな開部分集合 $A \subseteq \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^\times$ に対して, 対数写像 $\log_{\underline{v}}: \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^\times \rightarrow (K_{\underline{v}})_+$ が全単射 $A \xrightarrow{\sim} \log_{\underline{v}}(A)$ を定めるならば, A の対数体積と $\log_{\underline{v}}(A)$ の対数体積は等しい (また, 無限素点においても同様の主張が成立)

というよく知られた事実から従います. ([6], Proposition 5.7, (i), (c); [6], Proposition 5.7, (ii), (c) を参照ください.)

上で議論したとおり, “MOD” に関する Kummer 同型 $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^\otimes)_{|j|} \xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}}^\otimes)_{|j|}$ は, “明確” な対数 Kummer 対応の対象です. 一方, 単数的加群の場合と同様に, “mod” に関する Kummer 同型

$$(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^\otimes)_{|j|} \xrightarrow{\sim} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}}^\otimes)_{|j|}$$

に対する “明確” な対数 Kummer 対応を得ることはできないという事実にも注意しましょう. 実際, その定義から, $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^\otimes)_{|j|}$ の構成には, 整構造 “ $\mathcal{O}_{\tilde{k}(\dagger^{n-1}\mathcal{F}_{|j|, \underline{v}})}$ ” が深く関わる

ことがわかります. (§14, (c), を参照ください.) そして, 簡単に確認できるとおり, この整構造は, 対数写像の反復合成の影響を強く受けてしまう対象です. したがって, “MOD” に対する同時両立性と同様の同時両立性を, “mod” に対して期待することは, 適切ではありません. ([9], Remark 3.10.1, (i), を参照ください.) この “mod” に関する Kummer 同型 $({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|} \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger \circ}\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}}^{\otimes})_{|j|}$ も, やはり, 上述の (Ind3) という “不定性” に関する (“MOD” の場合と比較して非常に複雑で “明確” とは程遠い) 対数 Kummer 対応の対象となります.

これまでの議論によって, 宇宙際 Teichmüller 理論の主定理における主要な対象である対数殻や数体 (から構成されるフロベニオイド) (§3 を参照) に対する多輻的 Kummer 離脱の記述に関わる, 大掛りな舞台 (= 対数 Kummer 対応) が設営されました. §16 以降では, 宇宙際 Teichmüller 理論においてもっとも重要な対象であるテータ関数やその特殊値の — その “大掛りな舞台” が記述する対数殻や数体に対する Kummer 理論と両立的な — 多輻的 Kummer 離脱についての議論を行きましょう.

§ 16. 単テータ系

[2] の §14 から §16 までの間での説明のとおり, テータ関数の多輻的 Kummer 離脱を実現するために, 宇宙際 Teichmüller 理論では, 単テータ環境という概念が用いられます. この §16 では, 単テータ環境, そして, その逆系について, 簡単に復習しましょう.

この §16 から §20 までの間, $\mathbb{V}^{\text{bad}}$ の元 $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ を固定

して, 議論を行います.

§7 で復習したとおり, 我々の局所的な幾何学的設定において, 連結緩和被覆の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} \ddot{Y}_{\underline{v}} & \longrightarrow & \underline{Y}_{\underline{v}} & \longrightarrow & \underline{X}_{\underline{v}} & \longrightarrow & \underline{X}_{\underline{v}} & \longrightarrow & X_{\underline{v}} \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & C_{\underline{v}} & \longrightarrow & C_{\underline{v}} \end{array}$$

が存在して, その一部

$$\ddot{Y}_{\underline{v}} \longrightarrow \underline{Y}_{\underline{v}} \longrightarrow \underline{X}_{\underline{v}} \longrightarrow \underline{X}_{\underline{v}} \longrightarrow C_{\underline{v}} \quad (\longrightarrow \text{Spec}(K_{\underline{v}}))$$

に登場する対象の緩和基本群やそれらに対応する開部分群 (その上, $\text{Spec}(K_{\underline{v}})$ のエタール基本群) を考えることで, 位相群とその間の連続開準同型射の列

$$\Pi_{\underline{v}}^{\infty} \longrightarrow \Pi_{\underline{v}}^{\infty} \longrightarrow \Pi_{\underline{v}} \longrightarrow \Pi_{\underline{v}}^{\pm} \longrightarrow \Pi_{\underline{v}}^{\text{cor}} \quad (\longrightarrow G_{\underline{v}})$$

が得られます. そして, 正整数 N が与えられると,

$$\Pi_{\underline{v}}^{\infty} \twoheadrightarrow G_{\underline{v}} \curvearrowright \mu_N$$

という図式を通じて, μ_N を $\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ 加群と見做すことができます. **法 N モデル単テータ環境** とは,

- 半直積 $\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty$ として得られる **位相群**,
- Galois 群 $l \cdot \mathbb{Z} = \text{Gal}(\underline{Y}_v/\underline{X}_v) = (\mu_N \rtimes \Pi_v)/(\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty)$ の像と, $\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty$ の半直積としての構造 (と Kummer 理論) から定まる部分群 $K_v^\times/(K_v^\times)^N \subseteq \text{Out}(\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty)$ が生成する **部分群** $\mathcal{D}_{\underline{Y}} \subseteq \text{Out}(\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty)$,
- 全射 $\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty \twoheadrightarrow \Pi_v^\infty$ の同義反復的な切断と, $\mathcal{O}_{K_v}^\times \cdot \underline{\theta}_v$ の元の Kummer 類との差を考えることで得られる単射準同型 $s_{\underline{Y}}^\Theta: \Pi_v^\infty \hookrightarrow \mu_N \rtimes \Pi_v^\infty$ の像の, μ_N ($\subseteq \mu_N \rtimes \Pi_v^\infty$) の元による **共役たち** $\{\gamma \cdot \text{Im}(s_{\underline{Y}}^\Theta) \cdot \gamma^{-1} \subseteq \mu_N \rtimes \Pi_v^\infty\}_{\gamma \in \mu_N}$

からなる 3 つ組

$$(\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty, \mathcal{D}_{\underline{Y}} \subseteq \text{Out}(\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty), \{\gamma \cdot \text{Im}(s_{\underline{Y}}^\Theta) \cdot \gamma^{-1} \subseteq \mu_N \rtimes \Pi_v^\infty\}_{\gamma \in \mu_N})$$

のことです. つまり, 大雑把には, 法 N モデル単テータ環境とは,

- テータ関数の Kummer 類を考えるための “**入れ物**” (法 N Kummer 類は “ $H^1(\Pi_v^\infty, \mu_N)$ ” の元であり, それは, 分裂完全系列

$$1 \longrightarrow \mu_N \longrightarrow \mu_N \rtimes \Pi_v^\infty \longrightarrow \Pi_v^\infty \longrightarrow 1$$

のある 2 つの切断の差として捉えられることに注意),

- ($\underline{X}_v$ の観点から見た) テータ関数に対する **不定性** (§7 の $\underline{\theta}_v$ の定義を参照),
- テータ関数の **Kummer 類の一部**

という 3 つの要素から構成されるものであると考えられます. そして, 法 N 単テータ環境 $\mathbb{M}_N^\Theta = (\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}, \mathcal{D}_{\mathbb{M}_N^\Theta}, s_N^\Theta)$ とは, 位相群 $\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}$, $\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}$ の外部自己同型群の部分群 $\mathcal{D}_{\mathbb{M}_N^\Theta} \subseteq \text{Out}(\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta})$, $\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}$ の部分群族 s_N^Θ からなる, 法 N モデル単テータ環境の同型物のことです. その上, “単テータ環境の間の射” という概念を適切に定義することで, 単テータ環境に対して, その逆系

$$\mathbb{M}_*^\Theta = \{\cdots \rightarrow \mathbb{M}_{M'}^\Theta \rightarrow \mathbb{M}_M^\Theta \rightarrow \cdots\}$$

を定義することができます. ([2] の §14 や §15 を参照ください.) 本稿では, 簡単のために, この “単テータ環境の逆系” を **単テータ系** (mono-theta system) と呼ぶことにしましょう.

単テータ環境の円分剛性性質によって, 法 N 単テータ環境 $\mathbb{M}_N^\Theta = (\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}, \mathcal{D}_{\mathbb{M}_N^\Theta}, s_N^\Theta)$ が与えられると, それから純群論的に,

- **外部円分物** $\Pi_\mu(\mathbb{M}_N^\Theta)$ — すなわち, $\mu_N \subseteq \mu_N \rtimes \Pi_v^\infty$ に対応する $\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}$ の部分群として生じる円分物 —

- **内部円分物** $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_N^\Theta)$ — すなわち, 自然な商 $\mu_N \rtimes \Pi_v^\infty \twoheadrightarrow \Pi_v^\infty$ の部分商 $l \cdot \Delta_\Theta$ に対応する $\Pi_{\mathbb{M}_N^\Theta}$ の部分商として生じる円分物 —

- **円分剛性同型** $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_N^\Theta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_N^\Theta)$

を復元/構成することができます. ([2], §15, を参照ください.) この重要な事実により, 単テータ系 $\mathbb{M}_*^\Theta = \{\mathbb{M}_N^\Theta\}_{N \geq 1}$ から,

- **外部円分物**

$$\Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{N \geq 1} \Pi_\mu(\mathbb{M}_N^\Theta),$$

- **内部円分物**

$$(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{N \geq 1} (l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_N^\Theta),$$

- **円分剛性同型**

$$(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$$

が得られます.

§ 17. テータモノイド

テータモノイド (theta monoid — cf. [8], Introduction) とは, 大雑把には,

$$\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times \cdot \underline{\Theta}_v^{\mathbb{N}} \quad \text{あるいは} \quad \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times \cdot \underline{\Theta}_v^{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$$

というモノイドの同型物であるモノイドのことです. (実際には, これらモノイドは, 適切な Galois 群や数論的基本群の作用付きモノイドとするべきなのですが, 簡単のため, 以下の議論では, そういった群の記述を省略します.) この §17 と §18 では, [2] の §14 から §16 までの内容の一部を, “テータモノイドの多輻的 Kummer 離脱” という観点から復習しましょう.

まず最初に, フロベニオイド的観点からのテータモノイドについて, 簡単に説明します. §1 で復習した Hodge 劇場内の Θ Hodge 劇場

$${}^{\dagger}\mathcal{HT}^\Theta = (\{{}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_w\}_{w \in \mathbb{V}}, {}^{\dagger}\mathfrak{F}^+)$$

から, フロベニオイド

$${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v$$

を持ってきましょう. すると, [2], §14, での “エタールテータ関数のフロベニオイド的アプローチ” の説明のとおり, フロベニオイド ${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v$ から, $\text{Gal}(\ddot{Y}_v/X_v)$ という対称性によるテータ関数の軌道のなす集合 $\underline{\theta}_v$ (§7 を参照) に対応する集合

$$\underline{\theta}_v({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)$$

を, ([2], §14, で与えた “フロベニオイド $\underline{\mathcal{F}}$ の無理のある表示” を踏襲するならば, “ $\underline{\mathcal{F}} = (\Pi_X^{\text{tp}} \curvearrowright \mathcal{M})$ ” の “ $\mathcal{M}$ ” の部分集合として) 復元/構成することができます. その上, 再びフロベニオイド ${}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v$ から出発して, 定数関数のなすモノイド $\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times \subseteq \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\triangleright (\curvearrowright G_v)$ に対応する (“ $\mathcal{M}$ ” の部分) モノイド

$$\overline{\mathcal{O}}_v^\times({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) (\curvearrowright G_v({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v))$$

を復元/構成することが可能です. これら集合 $\underline{\theta}_v({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$ や加群 $\overline{\mathcal{O}}_v^\times({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$ を用いることで, (“ $\mathcal{M}$ ” の部分モノイドとして) (この §17 の冒頭の意味での) テータモノイド

$$\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \cdot \eta^\mathbb{N} \subseteq {}_\infty \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \cdot \eta^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \quad (\eta \in \underline{\theta}_v({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v))$$

が得られます. これらを集めてできる (“ $\mathcal{M}$ ” の部分) モノイド族

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \cdot \eta^\mathbb{N} \right\}_{\eta \in \underline{\theta}_v({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)}, \\ {}_\infty \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ {}_\infty \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \cdot \eta^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \right\}_{\eta \in \underline{\theta}_v({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)} \end{aligned}$$

を **フロベニオイド論的テータモノイド** (Frobenioid-theoretic theta monoid — cf. [8], Proposition 3.3, (i)) と呼びます. このフロベニオイド論的テータモノイドが, テータモノイドの Frobenius 的表示になります:

$\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v), {}_\infty \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$: テータモノイドの **Frobenius 的表示**.

次に, テータモノイドのエタールの表示を与えましょう. エタールの観点からのテータモノイドを論じるために, §1 の Hodge 劇場内の $\mathcal{D}$ 素点縞 ${}^\dagger \mathcal{D}_\curvearrowright = \{{}^\dagger \mathcal{D}_{\curvearrowright, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}$ から, その $\underline{v}$ 成分 ${}^\dagger \mathcal{D}_{\curvearrowright, \underline{v}}$ を持ってきましょう. §4 で復習したとおり, これは, Π_v の同型物 ${}^\dagger \Pi_v$ とだいたい等価なデータです. ${}^\dagger \Pi_v$ から復元/構成される位相群 ${}^\dagger \Pi_v^\infty$ (§8, (a), を参照) の定点反転自己同型 (ι, D) (§8, (g), を参照) を用意して, §8, (f), の対象に対して — [2], §16, (g), のように — “ ι 不変部分”

$$\underline{\theta}^\iota({}^\dagger \Pi_v) \subseteq {}_\infty \underline{\theta}^\iota({}^\dagger \Pi_v) \subseteq {}_\infty H^1({}^\dagger \Pi_v^\infty, (\iota \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_v))$$

— ただし, $(\iota \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_v)$ については, §8, (b), を参照 — を考えることで, 適当な “ $\underline{\theta}_v$ ” の (Kummer 類の) $\mu_{2\ell}, \mu_\infty$ 軌道を復元/構成することができます. したがって, §8, (e), の $\mathcal{O}_{\bar{k}({}^\dagger \Pi_v)}^\times$ を用いて,

$$\mathcal{O}_{\bar{k}({}^\dagger \Pi_v)}^\times \cdot \underline{\theta}^\iota({}^\dagger \Pi_v)^\mathbb{N} \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}({}^\dagger \Pi_v)}^\times \cdot \underline{\theta}^\iota({}^\dagger \Pi_v)^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \subseteq {}_\infty H^1({}^\dagger \Pi_v^\infty, (\iota \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_v))$$

という部分モノイドを考えることによって, (この §17 の冒頭の意味での) テータモノイドが得られます. ${}^\dagger \Pi_v^\infty$ のすべての定点反転自己同型を考えることで得られる ${}_\infty H^1({}^\dagger \Pi_v^\infty, (\iota \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_v))$ の部分モノイド族

$$\Psi_\Theta({}^\dagger \Pi_v) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi_\Theta({}^\dagger \Pi_v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^\dagger \Pi_v)}^\times \cdot \underline{\theta}^\iota({}^\dagger \Pi_v)^\mathbb{N} \right\}_{(\iota, D): \text{定点反転自己同型}},$$

$$\infty\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \infty\Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_v)}^{\times} \cdot \theta^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_v)^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \right\}_{(\iota, D): \text{定点反転自己同型}}$$

を, 本稿では, **エタールのテータモノイド** (étale-like theta monoid) と呼ぶことにします. ([8], Proposition 3.1, (i); [8], Proposition 3.4, (i), を参照ください.) このエタールのテータモノイドが, テータモノイドのエタールの表示になります:

$\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v), \infty\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v)$: テータモノイドの **エタールの表示**.

ここで, D への制限 (つまり, $0 \in \text{LabCusp}_v^{\pm}$ でラベル付けされた Galois 代入 — “ D の選択” は, 幾何学的には “ μ の選択” (§7, (a), を参照) に対応することに注意) を考えることで, [2], §16, (h), と同様に, 分解

$$\left(\mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_v)}^{\times} \cdot \infty\theta^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_v) \right) / \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_v)}^{\mu} = \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_v)}^{\times\mu} \times \left(\infty\theta^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_v) / \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_v)}^{\mu} \right)$$

が得られることに注意しましょう.

§ 18. テータモノイドの多輻的 Kummer 離脱

次に, テータモノイドの Frobenius 的表示とエタールの表示とを結び付ける Kummer 同型を構成しましょう. ここで, [2], §14, の後半での,

単テータ環境, 及び, 単テータ系は, テータ関数の **フロベニオイド的** アプローチと **エタールの** アプローチとの共有対象 — つまり, テータ関数の Frobenius 的側面とエタールの側面の間の **架け橋** である —

という観察を思い出しましょう. この観察により, テータモノイドの Frobenius 的表示とエタールの表示とを結び付ける Kummer 同型を, 単テータ系を用いて構成しようと考えすることは自然です. 以下, それを実行しましょう.

$\mathbb{M}_{*}^{\Theta} = \{\mathbb{M}_N^{\Theta}\}_{N \geq 1}$ を単テータ系としましょう. このとき, この単テータ系 $\mathbb{M}_{*}^{\Theta}$ に, [2], §16, (e), に関するアルゴリズムを適用することによって,

$$\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \subseteq \infty\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \subseteq \infty H^1(\Pi_v^{\infty}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}), \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}))$$

という,

$$(\underline{\theta}_v \text{ の元たちの Kummer 類}) \subseteq (\underline{\theta}_v \text{ の元たちの中根たちの Kummer 類})$$

に対応する対象を復元/構成することができます. そして, $\Pi_v^{\infty}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta})$ の定点反転自己同型 (ι, D) が与えられると — [2], §16, (g), のように — これらの “ ι 不変部分”

$$\underline{\theta}_{\text{env}}^{\iota}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \subseteq \infty\underline{\theta}_{\text{env}}^{\iota}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \subseteq \infty H^1(\Pi_v^{\infty}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}), \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}))$$

を考えることで, 適当な “ $\underline{\Theta}_v$ ” の (Kummer 類の) μ_{2l}, μ_∞ 軌道を復元/構成することができます. また, $\mathbb{M}_*^\Theta$ から復元/構成された Π_v の同型物 $\Pi_v(\mathbb{M}_*^\Theta)$ に, [2], §16, (f), に関するアルゴリズムを適用することによって, $\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times$ の同型物

$$\overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_v(\mathbb{M}_*^\Theta))) \subseteq {}_\infty H^1(\Pi_v^\infty(\mathbb{M}_*^\Theta), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta))$$

が得られます. これらを用いた

$$\overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) \cdot \underline{\theta}_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta)^\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) \cdot \underline{\theta}_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta)^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \subseteq {}_\infty H^1(\Pi_v^\infty(\mathbb{M}_*^\Theta), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta))$$

という部分モノイドを考えることによって, (§17 の冒頭の意味での) テータモノイドが得られます. 位相群 $\Pi_v^\infty(\mathbb{M}_*^\Theta)$ のすべての定点反転自己同型を考えることで得られる ${}_\infty H^1(\Pi_v^\infty(\mathbb{M}_*^\Theta), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta))$ の部分モノイド族

$$\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) \cdot \underline{\theta}_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta)^\mathbb{N} \right\}_{(\iota, D): \text{定点反転自己同型}},$$

$${}_\infty \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ {}_\infty \Psi_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) \cdot \underline{\theta}_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta)^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \right\}_{(\iota, D): \text{定点反転自己同型}}$$

を **単テータ論的テータモノイド** (mono-theta-theoretic theta monoid — cf. [8], Proposition 3.1, (i)) と呼びます. ここで, D への制限 (つまり, $0 \in \text{LabCusp}_v^\pm$ でラベル付けされた Galois 代入 — “ D の選択” は, 幾何学的には “ μ の選択” (§7, (a), を参照) に対応することに注意) を考えることで, [2], §16, (h), のように, “定数倍剛性性質による重要な分解”

$$\left(\overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) \cdot {}_\infty \underline{\theta}_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta) \right) / \overline{\mathcal{O}}_v^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta) = \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}(\mathbb{M}_*^\Theta) \times \left({}_\infty \underline{\theta}_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta) / \overline{\mathcal{O}}_v^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta) \right)$$

— ただし, $\overline{\mathcal{O}}_v^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)_{\text{tor}}$, $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta) / \overline{\mathcal{O}}_v^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$ — が得られることを思い出しましょう.

[2], §14, の後半の議論で述べたとおり, テータ関数のエタールのアプローチによって, 位相群 ${}^\dagger \Pi_v$ から, (エタールの) 単テータ系

$$\mathbb{M}_*^\Theta({}^\dagger \Pi_v)$$

を復元/構成することができます. そして, 構成から簡単に確認できるとおり, 単テータ環境の円分剛性性質によって得られる円分剛性同型

$$(l \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_v) = (l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta({}^\dagger \Pi_v)) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta({}^\dagger \Pi_v))$$

は, テータモノイドの間の同型

$$\Psi_\Theta({}^\dagger \Pi_v) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta({}^\dagger \Pi_v)), \quad {}_\infty \Psi_\Theta({}^\dagger \Pi_v) \xrightarrow{\sim} {}_\infty \Psi_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta({}^\dagger \Pi_v))$$

を誘導します. ここで, “ ι ” を走らせることで得られるこれら全体を

$$\Psi_{\Theta}(\dagger\Pi_v) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\Pi_v)), \quad \infty\Psi_{\Theta}(\dagger\Pi_v) \xrightarrow{\sim} \infty\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\Pi_v))$$

と書くことにしましょう. 一方, 再び [2], §14, の後半の議論で述べたとおり, テータ関数のフロベニオイド的アプローチによって, フロベニオイド $\dagger\underline{\mathcal{F}}_v$ から, (フロベニオイド的) 単テータ系

$$\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v)$$

を復元/構成することができます. そして, $\dagger\underline{\mathcal{F}}_v$ によるテータ関数に対する Kummer 理論 ([4], §5, の冒頭の議論を参照ください) を適用することで — 適切な対応 “ $\eta \mapsto \iota$ ” のもと — テータモノイドの間の同型

$$\Psi_{\mathcal{F}_{\eta}^{\Theta}}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{env}}^{\iota}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v)), \quad \infty\Psi_{\mathcal{F}_{\eta}^{\Theta}}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \infty\Psi_{\text{env}}^{\iota}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v))$$

が得られます. ここで, “ η ” や “ ι ” を走らせることで得られるこれら全体を

$$\Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v)), \quad \infty\Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \infty\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v))$$

と書くことにしましょう. これにより, 単テータ系の同型

$$\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\Pi_v)$$

が与えられる毎に, テータモノイドに対する Kummer 同型

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) &\xrightarrow{\sim} \left(\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v)) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\Pi_v)) \xleftarrow{\sim} \right) \Psi_{\Theta}(\dagger\Pi_v), \\ \infty\Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v) &\xrightarrow{\sim} \left(\infty\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\underline{\mathcal{F}}_v)) \xrightarrow{\sim} \infty\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\Pi_v)) \xleftarrow{\sim} \right) \infty\Psi_{\Theta}(\dagger\Pi_v) \end{aligned}$$

が得られます. これがテータモノイドに対する Kummer 同型です. ([8], Proposition 3.4, (i), を参照ください.)

これまでに行った様々な構成によって得られた “テータモノイドの多輻的 Kummer 離脱” を, 以下のようにまとめましょう:

テータモノイドの多輻的 Kummer 離脱: 以下のデータを考える:

- コアのデータ: 位相群作用付き加群 $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^{\times\mu}$ に $\times\mu$ -Kummer 構造 $\{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq G_v}$ という整構造を付加して得られるデータの同型物 $(G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}, \{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq G})$.
- コアのデータの間射: $\times\mu$ -Kummer 構造 “ $\{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq G}$ ” と両立する, 位相群作用付き加群 “ $G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ ” の間の同型射.
- 輻的データ: 以下の (a) から (j) までの対象の組:
 - (a_{ét}) Π_v の同型物 $\dagger\Pi_v$.

(b_{ét}) (a_{ét}) から復元/構成されるエタールの円分物 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})$.

(c_{ét}) (a_{ét}) から復元/構成されるエタールの単数的加群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} (\twoheadrightarrow {}^{\dagger}G_{\underline{v}}) \curvearrowright (\mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times\mu})$.

(d_{ét}) (a_{ét}) から復元/構成されるエタールのテータモノイド $\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}), {}_{\infty}\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})$.

(e_{ét}) (d_{ét}) の各元の (“ ι 不変部分” の “ D への制限” による) 分解

$$\left\{ \left(\mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times} \cdot {}_{\infty}\theta^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \right) / \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\mu} = \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times\mu} \times \left({}_{\infty}\theta^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) / \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\mu} \right) \right\}_{(\iota, D)}.$$

(a_{env}) (a_{ét}) から復元/構成される単テータ系 $\mathbb{M}_{*}^{\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}_{*}^{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})$.

(b_{env}) (a_{env}) の外部円分物 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta})$.

(c_{env}) (a_{env}) から復元/構成される単数的加群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}} (\twoheadrightarrow {}^{\dagger}G_{\underline{v}}) \curvearrowright (\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}))$.

(d_{env}) (a_{env}) から復元/構成される単テータ論的テータモノイド $\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}), {}_{\infty}\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta})$.

(e_{env}) (d_{env}) の各元の (“ ι 不変部分” の “ D への制限” による) 分解

$$\left\{ \left(\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \cdot {}_{\infty}\theta^{\iota}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \right) / \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) = \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \times \left({}_{\infty}\theta^{\iota}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) / \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \right) \right\}_{(\iota, D)}.$$

(f) (a_{env}) の円分剛性性質による (b_{ét}) と (b_{env}) の間の円分剛性同型.

(g) (f) による (c_{ét}) と (c_{env}), (d_{ét}) と (d_{env}), (e_{ét}) と (e_{env}) の間の同型.

(h) 位相群作用付き加群 $G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\bar{F}_{\underline{v}}}^{\times\mu}$ に $\times\mu$ -Kummer 構造 $\{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq G_{\underline{v}}}$ という整構造を付加して得られるデータの同型物 $(G \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}, \{\mathcal{I}_H^{\kappa}\}_{H \subseteq G})$.

(i) (c_{ét}) の ${}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times\mu}$ と (h) の間の $\times\mu$ -Kummer 構造と両立的な同型.

(j) 図式

$$\Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \xrightarrow{(g)} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\mu} \xrightarrow{0 \text{ 写像}} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times\mu} \xrightarrow{(i)} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times\mu}$$

— ただし, 最初の同型については [8], Remark 1.5.2, を参照, 2 番目の同型は (g) 中の “(c)” に関する同型.

• 輻的データの間の射: (h) の対象の間の同型, 及び, $(a_{\text{ét}})$ の対象の間の同型, そして, それが誘導する “(a)”, “(b)”, “(c)”, “(d)”, “(e)” の対象の間の同型のなす組. (簡単に確認できるとおり, これら同型は, (f), (g), (i), (j) の対象といつでも両立的.)

このとき, “(h) の対象を考える” という操作で与えられる “輻的データからコア的データへの移行” は多輻的, つまり, (関手として) 充満. 特に, テータモノイドの Kummer 同型

$$\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \Psi_\Theta(\dagger \Pi_v), \quad \infty \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_\Theta(\dagger \Pi_v)$$

において, “ $(a_{\text{ét}}) \mapsto (d_{\text{ét}})$ ” は, Frobenius 的位相群作用付きモノイド $G_v(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$ の $(\times \mu\text{-Kummer 構造と両立的な})$ 任意の自己同型と両立的.

上述の主張において, コア的データとそれに対応する輻的データの一部 (つまり, (h)) との間の結び付きは, (i), (j) という形で記述されています. (i) の全体は $\text{Aut}(G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^{\times \mu}, \{\mathcal{I}_H^\kappa\}_{H \subseteq G_v})$ 上のトーサーを成して, そして, $\text{Aut}(G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^{\times \mu}, \{\mathcal{I}_H^\kappa\}_{H \subseteq G_v})$ は, $\text{Aut}(G_v)$ と Ism_v (§12 を参照) で生成されます. したがって, 上述の主張は, 大雑把には,

“ $(G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^{\times \mu}, \{\mathcal{I}_H^\kappa\}_{H \subseteq G_v})$ ” という対象の観点からの —

(Ind1) $\text{Aut}(G_v)$ の作用から生じる不定性

(Ind2) Ism_v の作用から生じる不定性

という 2 つの不定性のもとでの — テータモノイドの表示/記述の成立

を意味しています.

本稿では上のような正確な形では述べませんが, [2], §24, で説明が与えられた “ κ コア的関数” に対しても, 同様の多輻的 Kummer 離脱が得られます. つまり, ([2], §24, での議論から想像可能だと思われる)

(a $_\kappa$) 適切なエタールの入力,

(b $_\kappa$) κ コア的関数に関連する円分物 (つまり, $\infty \kappa$ コア的関数 — [2], §24, を参照 — のなすモノイドの捻れ元全体のなす部分群),

(c $_\kappa$) κ コア的関数に関連する (コア的对象と結び付く) 単数的加群 (つまり, $\infty \kappa \times$ コア的関数 — [2], §24, を参照 — のなすモノイドのある部分群),

(d $_\kappa$) $\infty \kappa \times$ コア的関数のなすモノイド,

(e $_\kappa$) (E の非自明な 2 等分点から定まる点に付随する分解群による Galois 代入から生じる) コア的部分と輻的部分との分離を記述する分解,

(f_κ) (初等的な事実 “ $\mathbb{Q}_{>0} \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \{1\}$ ” から得られる) 円分剛性同型

などからなる適切な輻的データを設定することで, 上の主張と同様の主張が得られます. そして, その結果として, コアのデータである $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞の観点からの — 適当な不定性のもとでの — κ コアの関数の表示/記述の成立が結論付けられます.

§ 19. テータ関数の Galois 理論的代入

[2], §11, での説明のとおり, §18 で議論したテータ関数の多輻的な表示は, テータ関数の特殊値の適切な表示のための準備です. この §19 では, テータ関数からその特殊値への移行, 特に, §8 の後半で議論した共役同期化の観点からの, テータ関数の Galois 理論的代入の説明を行きましょう.

§8, (a), や §8, (h), で復習したとおり, 位相群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ から単遠アーベル的に, 位相群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ と (部分グラフから定まる) 閉部分群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\bullet t} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ — ただし, $t \in \text{LabCusp}^{\pm}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$ — を復元/構成することができます. ここで, ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ の定点反転自己同型 (ι, D) (§8, (g), を参照) であって, $D \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\bullet 0}$ なるものを固定しましょう. (“ D の選択” は, 幾何学的には “ μ の選択” — §7, (a), を参照 — に対応することに注意しましょう.) これにより, §17 で復習したとおり, 位相群 ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ から単遠アーベル的に, μ_{2l}, μ_{∞} 上のトーサー

$$\underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \subseteq {}_{\infty}\underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \subseteq {}_{\infty}H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}))$$

やエタールのテータモノイド

$$\begin{aligned} \Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times} \cdot \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})^{\mathbb{N}} \\ &\subseteq {}_{\infty}\Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})}^{\times} \cdot \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \subseteq {}_{\infty}H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}})) \end{aligned}$$

を復元/構成することができます.

§8 の後半の説明のとおり, まず最初に, このトーサーやエタールのテータモノイドを, ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright} \subseteq {}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ に制限しましょう. この制限により,

$$\begin{aligned} (\underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \xrightarrow{\sim}) \quad \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) &\subseteq (\infty \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \xrightarrow{\sim}) \quad \infty \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \\ &\subseteq {}_{\infty}H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})), \\ (\Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \xrightarrow{\sim}) \quad \Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})}^{\times} \cdot \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})^{\mathbb{N}} \\ &\subseteq (\infty \Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}) \xrightarrow{\sim}) \quad \infty \Psi_{\Theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})}^{\times} \cdot \underline{\theta}^{\iota}({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \\ &\subseteq {}_{\infty}H^1({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}, (l \cdot \Delta_{\Theta})({}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})) \end{aligned}$$

という部分モノイドが得られます. 次に, 再び §8 の後半の説明のとおり, これらトーサーやモノイドを, §8, (j), で得られる様々な分解群に制限しましょう. 特に, 得られたトーサー $\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \subseteq \infty\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})$ の, 元 $t \in T$ でラベル付けされた分解群 $D_{t,\mu} \subseteq \dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}$ への制限 — つまり, $t \in T$ でラベル付けされた代入点での Galois 代入 — を考えることで,

$$\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \subseteq \infty\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \subseteq \infty H^1(G_{\underline{v}}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}), (l \cdot \Delta_{\Theta})(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}))$$

という,

$$(\mu_{2l} \cdot \underline{q}_v^{t^2} \text{ の元たちの Kummer 類}) \subseteq (\mu_{\infty} \cdot \underline{q}_v^{t^2} \text{ の元たちの中根たちの Kummer 類})$$

に対応する対象が得られます. (§7, (b), を参照ください.) “ $t^2 = (-t)^2$ ” ですので, 当然, $\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) = \underline{\underline{\theta}}^{-t}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})$, $\infty\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) = \infty\underline{\underline{\theta}}^{-t}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})$ となります. 各 $t \in T$ に対して,

$$\underline{\underline{\theta}}^{|t|}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \quad (= \underline{\underline{\theta}}^{-t}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})),$$

$$\infty\underline{\underline{\theta}}^{|t|}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \stackrel{\text{def}}{=} \infty\underline{\underline{\theta}}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \quad (= \infty\underline{\underline{\theta}}^{-t}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}))$$

と書くことにしましょう. ([8], Corollary 2.5, を参照ください.) そして, すべての $|t| \in T^*$ ($\subseteq |T|$) に関する直積を考えることで得られる集合を

$$\underline{\underline{\theta}}^{T^*}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{|t| \in T^*} \underline{\underline{\theta}}^{|t|}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}) \subseteq \prod_{|t| \in T^*} (\mathcal{O}_{\bar{k}(\dagger\Pi_{\underline{v}})}^{\triangleright})_{|t|}$$

— ただし, $(\mathcal{O}_{\bar{k}(\dagger\Pi_{\underline{v}})}^{\triangleright})_{|t|}$ は, $|t| \in T^*$ でラベル付けされた $\mathcal{O}_{\bar{k}(\dagger\Pi_{\underline{v}})}^{\triangleright}$ のコピー (§9, (a), を参照) — と書いて, この集合の元を **値プロフィール** (value-profile — cf. [8], Corollary 3.5, (ii)) と呼びます. つまり, 値プロフィールとは,

$$(\zeta_{2l}^{i_1} \cdot \underline{q}_v^{1^2}, \zeta_{2l}^{i_2} \cdot \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \zeta_{2l}^{i_{l^*}} \cdot \underline{q}_v^{(l^*)^2})$$

— ただし, ζ_{2l} は μ_{2l} の生成元 — という形をした元に対応する元です.

§ 20. Gauss モノイドと代入同型

Gauss モノイド (Gaussian monoid — cf. [8], Introduction) とは, 大雑把には, 値プロフィール, つまり, $\text{LabCusp}_{\underline{v}}^{\pm}$ の各非零元でラベル付けされた代入点でのテータ関数の特殊値を並べてできる元

$$\xi = (\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2})$$

— ただし, 簡単のため, “ ζ_{2l} ” に関する部分は省略 — によって定まるモノイド

$$\mathcal{O}_{\bar{F}_{\bar{v}}}^{\times} \cdot \xi^{\mathbb{N}} \quad \text{あるいは} \quad \mathcal{O}_{\bar{F}_{\bar{v}}}^{\times} \cdot \xi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$$

の同型物であるモノイドのことです. (実際には, これらモノイドは, 適切な Galois 群や数論的基本群の作用付きモノイドとするべきなのですが, 簡単のため, 以下の議論では, そういった群の記述を省略します.) そして, **代入同型** (evaluation isomorphism — cf. [8], Theorem A, (ii); [8], Corollary 4.5, (iv); [8], Corollary 4.6, (iv)) とは, 大雑把には, “代入”

$$\underline{\Theta}_v \mapsto (\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2})$$

という操作が誘導する, テータモノイドと Gauss モノイドの間の自然な同型

$$\mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \underline{\Theta}_v^\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \xi^\mathbb{N} \quad \text{あるいは} \quad \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \underline{\Theta}_v^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \xi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$$

のことです. ここで, [2], §23, の冒頭で導入した $\mathcal{F}^+$ 素点縞という概念を思い出しましょう. この $\mathcal{F}^+$ 素点縞の v 成分は, 非常に大雑把には,

$$\mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \underline{q}_v^\mathbb{N}$$

というモノイドの同型物であるモノイドのことでした. したがって, テータモノイド, Gauss モノイド, $\mathcal{F}^+$ 素点縞の v 成分は — それぞれの “本来の解釈/意味” はまったく異なりますが — 抽象的なモノイドとしては **同型** になります. これにより, モノイドの同型射による列

$$\begin{array}{ccccc} \text{Gauss モノイド} & & \text{テータモノイド} & & \mathcal{F}^+ \text{素点縞の } v \text{ 成分} \\ \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot (\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2})^\mathbb{N} & \xleftarrow{\text{代入同型}} & \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \underline{\Theta}_v^\mathbb{N} & \xrightarrow[\sim]{\underline{\Theta} \mapsto \underline{q}} & \mathcal{O}_{\overline{F}_v}^\times \cdot \underline{q}_v^\mathbb{N} \end{array}$$

を考察することが可能です. この合成

$$“(\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2}) \mapsto \underline{q}_v”$$

が, “ Θ リンク” の主要な一部分 (例えば, [2], §12, の “宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把版” の (iii) の 2 つ目の “•” を参照) の原型となります. [2], §11, で説明したとおり, テータ関数の特殊値を直接 q パラメータと結び付けるリンクを考えるのではなく, このように, (多幅的な表示を持ち得る) テータ関数を中継物として, テータ値と q パラメータを結び付けるリンクを考えることが, 我々の議論では非常に重要となります.

まず最初に, エタールの観点からの Gauss モノイドと代入同型を導入しましょう. §19 の設定のもと, 値プロフィール

$$\xi \in \underline{\theta}^{T^*}(\dagger\Pi_{v\blacktriangleright}) \subseteq \prod_{|t| \in T^*} (\mathcal{O}_{\overline{k}(\dagger\Pi_v)}^\triangleright)_{|t|}$$

に対して, 対角的に埋め込まれた $\mathcal{O}_{\overline{k}(\dagger\Pi_v)}^\times$ を用いて定義される

$$(\mathcal{O}_{\overline{k}(\dagger\Pi_v)}^\times)_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^\mathbb{N} \subseteq (\mathcal{O}_{\overline{k}(\dagger\Pi_v)}^\times)_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \subseteq \prod_{|t| \in T^*} (\mathcal{O}_{\overline{k}(\dagger\Pi_v)}^\triangleright)_{|t|}$$

— ただし, “ $\langle T^* \rangle$ ” については, §9, (b), を参照 — という部分モノイドを考えることによって, (この §20 の冒頭の意味での) Gauss モノイドが得られます. すべての値プロフィールを考えることで得られるこれら部分モノイド族

$$\Psi_{\text{gau}}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi_{\xi}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_{\bar{k}(\dagger\Pi_{\underline{v}})}^{\times})_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{N}} \right\}_{\xi: \text{値プロフィール}},$$

$${}_{\infty}\Psi_{\text{gau}}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ {}_{\infty}\Psi_{\xi}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_{\bar{k}(\dagger\Pi_{\underline{v}})}^{\times})_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \right\}_{\xi: \text{値プロフィール}}$$

を, 本稿では, **エタールの Gauss モノイド** (étale-like Gaussian monoid) と呼ぶことにします. このエタールの Gauss モノイドが, Gauss モノイドのエタールの表示になります:

$$\Psi_{\text{gau}}(\dagger\Pi_{\underline{v}}), {}_{\infty}\Psi_{\text{gau}}(\dagger\Pi_{\underline{v}}): \text{Gauss モノイドのエタールの表示.}$$

また, §19 で説明した Galois 理論的代入により, 以下の同義反復的な図式が得られます:

$$\begin{array}{ccc} \dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright} & \xleftarrow{--} & \{G_{\underline{v}}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})_{|t|}\}_{|t|\in T^*} \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ {}_{\infty}\Psi_{\Theta}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & {}_{\infty}\Psi_{\xi}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \\ \cup & & \cup \\ \Psi_{\Theta}^t(\dagger\Pi_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\xi}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \end{array}$$

— ここで, “ $\xleftarrow{--}$ ” は, 以下の “両立性” を意味する: 各 $|t| \in T^*$ に対して, $t \in T$ でラベル付けされた代入点を考えることで得られる単射 $G_{\underline{v}}(\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright})_{|t|} \hookrightarrow \dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright}$ は, 図式の 2 行目の 2 つの作用 “ $\curvearrowright$ ” と両立的. ([8], Corollary 3.5, (ii), を参照ください.)

上の図式の 3 行目や 5 行目に登場する同型は, (この §20 の冒頭の意味での) 代入同型です. これら同型たちの全体を

$$\Psi_{\Theta}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{gau}}(\dagger\Pi_{\underline{v}}), \quad {}_{\infty}\Psi_{\Theta}(\dagger\Pi_{\underline{v}}) \xrightarrow{\sim} {}_{\infty}\Psi_{\text{gau}}(\dagger\Pi_{\underline{v}})$$

と書いて, 本稿では, これを, **エタールの代入同型** (étale-like evaluation isomorphism) と呼ぶことにします. このエタールの代入同型が, 代入同型のエタールの表示になります. ([8], Corollary 3.5, (ii), を参照ください.)

次は, Frobenius 的表示とエタールの表示を結び付ける, 単テータ論的観点からの Gauss モノイドと代入同型を導入しましょう. §19 の設定のもと, $\mathbb{M}_{*}^{\Theta} = \{\mathbb{M}_N^{\Theta}\}_{N \geq 1}$ を, 単テータ系であって, それから復元/構成される $\Pi_{\underline{v}}$ の同型物が, これまでの議論における同型物 $\dagger\Pi_{\underline{v}}$ と一致するものとしましょう. $\mathbb{M}_N^{\Theta}$ というデータの一部である副有限群 $\Pi_{\mathbb{M}_N^{\Theta}}$ (つまり, “ $\mu_N \rtimes \Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ ”) の (逆系 $\mathbb{M}_{*}^{\Theta}$ による) 逆極限を考えることで, 位相群の完全系列

$$1 \longrightarrow \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}) \longrightarrow \Pi_{\mathbb{M}_{*}^{\Theta}} \longrightarrow \dagger\Pi_{\underline{v}}^{\infty} \longrightarrow 1$$

が得られます. 単射 $\dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright} \hookrightarrow \dagger\Pi_{\underline{v}}^{\infty}$ によってこの完全系列を引き戻すことで得られる位相群の完全系列を

$$1 \longrightarrow \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}\blacktriangleright) \longrightarrow \Pi_{\mathbb{M}_{*}^{\Theta}\blacktriangleright} \longrightarrow \dagger\Pi_{\underline{v}\blacktriangleright} \longrightarrow 1$$

と書き, その上, “ G_v ” に対応する $\Pi_{\mathbb{M}_*^\Theta}$ の商を $G_v(\mathbb{M}_*^\Theta)$ と書くことにします. ([8], Definition 2.7, (ii), を参照ください.) すると, 単テータ系の円分剛性性質によって得られる円分剛性同型 “ $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$ ” は, $G_v(\mathbb{M}_*^\Theta)$ 同変な円分剛性同型

$$(l \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_{v\blacktriangleright}) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$$

を定めます. 値プロファイルの集合

$$\underline{\theta}^{T^*}({}^\dagger \Pi_{v\blacktriangleright}) = \prod_{|t| \in T^*} \underline{\theta}^{|t|}({}^\dagger \Pi_{v\blacktriangleright}) \subseteq \prod_{|t| \in T^*} {}_\infty H^1(G_v({}^\dagger \Pi_{v\blacktriangleright}), (l \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_{v\blacktriangleright}))$$

に対して, 上述の円分剛性同型 $(l \cdot \Delta_\Theta)({}^\dagger \Pi_{v\blacktriangleright}) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$ を適用することで得られる集合を

$$\underline{\theta}_{\text{env}}^{T^*}(\mathbb{M}_*^\Theta) = \prod_{|t| \in T^*} \underline{\theta}_{\text{env}}^{|t|}(\mathbb{M}_*^\Theta) \subseteq \prod_{|t| \in T^*} {}_\infty H^1(G_v(\mathbb{M}_*^\Theta), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta))$$

と書くことにしましょう. つまり, これは, “単テータ論的値プロファイル” のなす集合です. エタールの Gauss モノイドの場合と同様に, 値プロファイル $\xi \in \underline{\theta}_{\text{env}}^{T^*}(\mathbb{M}_*^\Theta)$ に対して, 対角的に埋め込まれた (§18 の前半の議論で復習した) 加群 $\overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)$ を用いて定義される

$$\overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \subseteq \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)_{|t|}$$

という部分モノイドを考えることによって, (この §20 の冒頭の意味での) Gauss モノイドが得られます. すべての値プロファイルを考えることで得られるこれら部分モノイド族

$$\Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi_\xi(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{N}} \right\}_{\xi: \text{値プロファイル}},$$

$${}_\infty \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ {}_\infty \Psi_\xi(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times(\mathbb{M}_*^\Theta)_{\langle T^* \rangle} \cdot \xi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \right\}_{\xi: \text{値プロファイル}}$$

を **単テータ論的 Gauss モノイド** (mono-theta theoretic Gaussian monoid — cf. [8], Corollary 3.5, (ii)) と呼びます. また, エタールの場合と同様に, §19 で行った Galois 理論的代入によって, 以下の同義反復的な図式が得られます:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{v\blacktriangleright}(\mathbb{M}_*^\Theta) & \leftarrow\!\!\! \dashrightarrow & \{G_v(\mathbb{M}_*^\Theta)_{|t|}\}_{|t| \in T^*} \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ {}_\infty \Psi_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta) & \xrightarrow{\sim} & {}_\infty \Psi_\xi(\mathbb{M}_*^\Theta) \\ \cup & & \cup \\ \Psi_{\text{env}}^\iota(\mathbb{M}_*^\Theta) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_\xi(\mathbb{M}_*^\Theta) \end{array}$$

— ここで, “ $\leftarrow\!\!\! \dashrightarrow$ ” は, エタールの場合と同様の “両立性” を意味する. ([8], Corollary 3.5, (ii), を参照ください.) この図式の 3 行目や 5 行目に登場する同型は, (この §20 の冒頭の意味での) 代入同型です. これら同型たちの全体を

$$\Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta), \quad {}_\infty \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \xrightarrow{\sim} {}_\infty \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta)$$

と書いて、本稿では、これを、**単テータ論的代入同型** (mono-theta theoretic evaluation isomorphism) と呼ぶことにします. 構成から簡単に確認できるとおり, 位相群 ${}^{\dagger}\Pi_v$ から復元/構成された (エタールの) 単テータ系 $\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v)$ の円分剛性性質を適用することで, エタールの Gauss モノイドや代入同型と, 単テータ論的 Gauss モノイドや代入同型との間の同型が得られます:

$$\begin{array}{ccccccc} \Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}({}^{\dagger}\Pi_v) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}({}^{\dagger}\Pi_v) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\Pi_v)). \end{array}$$

最後に, フロベニオイド的観点からの Gauss モノイドと代入同型を導入しましょう. §17 の前半の議論と同様に, フロベニオイド ${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v$ を考えます. §17 の前半の議論で述べたとおり, このフロベニオイド ${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v$ から, 位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{F}}_v}^{\triangleright}$ の同型物 $G_v({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)$ が復元/構成されます. 一方, このフロベニオイドからアルゴリズム的に復元/構成された (フロベニオイド的) 単テータ系 $\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)$ から, 位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{F}}_v}^{\triangleright}$ の同型物 $G_v({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) = G_v(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v))$ が復元/構成されます. そして, [2], §3, の議論から, これら 2 つの同型物の間には, Kummer 同型

$$\left(G_v(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) = G_v({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \right) \xrightarrow{\sim} \left(G_v(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) \right)$$

が存在することがわかります. ([8], Proposition 3.3, (ii), を参照ください.) その上, この同型と $G_v(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v))$ に対する加法的対称化同型 (§9 を参照) によって, 位相群作用付きモノイド $G_v(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)$ に対する (上の同型と両立的な) 加法的対称化同型が得られます.

各 $|t| \in T^*$ でラベル付けされた上述の Kummer 同型 (の直積)

$$\prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)_{|t|} \xrightarrow{\sim} \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v))_{|t|}$$

を用いて, 各 “単テータ論的値プロファイル” $\xi \in \underline{\theta}_{\text{env}}^{T^*}(\mathbb{M}_{*\blacktriangleright}^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v))$ に関する単テータ論的 Gauss モノイド

$$\Psi_{\xi}(\mathbb{M}_{*\blacktriangleright}^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) \subseteq \infty \Psi_{\xi}(\mathbb{M}_{*\blacktriangleright}^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)) \subseteq \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}(\mathbb{M}_*^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v))_{|t|}$$

を引き戻すことで得られる部分モノイド

$$\Psi_{\mathcal{F}_{\xi}}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \subseteq \infty \Psi_{\mathcal{F}_{\xi}}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \subseteq \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v)_{|t|}$$

は, (この §20 の冒頭の意味での) Gauss モノイドとなります. すべての $\xi \in \underline{\theta}_{\text{env}}^{T^*}(\mathbb{M}_{*\blacktriangleright}^{\Theta}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v))$ を考えることで得られるこれら部分モノイド族

$$\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \Psi_{\mathcal{F}_{\xi}}({}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}_v) \right\}_{\xi: \text{値プロファイル}},$$

$$\infty \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \infty \Psi_{\mathcal{F}_\xi}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \right\}_{\xi: \text{値プロフィール}}$$

を **フロベニオイド論的 Gauss モノイド** (Frobenioid-theoretic Gaussian monoid — cf. [8], Corollary 3.6, (ii)) と呼ぶことにします. このフロベニオイド論的 Gauss モノイドが, Gauss モノイドの Frobenius 的表示になります:

$$\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v), \infty \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v): \text{Gauss モノイドの Frobenius 的表示.}$$

これまでに考察を行った様々な Kummer 同型と単テータ論的代入同型によって, 以下の図式が得られます:

$$\begin{array}{ccccccc} \Pi_{v \blacktriangleright}(\mathbb{M}_{* \blacktriangleright}^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) & = & \Pi_{v \blacktriangleright}(\mathbb{M}_{* \blacktriangleright}^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) & \leftarrow \{G_v(\mathbb{M}_{* \blacktriangleright}^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v))_{|t|}\}_{T^*} & \xrightarrow{\sim} & \{G_v(\underline{\mathcal{F}}_v)_{|t|}\}_{T^*} \\ \uparrow \curvearrowright & & \uparrow \curvearrowright & & \uparrow \curvearrowright & & \uparrow \curvearrowright \\ \infty \Psi_{\mathcal{F}_\eta}^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) & \xrightarrow{\sim} & \infty \Psi_{\text{env}}^\Theta(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) & \xrightarrow{\sim} & \infty \Psi_\xi(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) & \xrightarrow{\sim} & \infty \Psi_{\mathcal{F}_\xi}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \Psi_{\mathcal{F}_\eta}^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{env}}^\Theta(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_\xi(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\mathcal{F}_\xi}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \end{array}$$

— ここで, それぞれの行の最初の射については §18 のテータモノイドの多輻的 Kummer 離脱のまとめの直前の議論を参照, それぞれの行の 2 番目の射については単テータ論的代入同型の議論を参照, それぞれの行の 3 番目の射については直前の議論を参照, そして, “ $\leftarrow$ ” は エタール的な場合と同様の “両立性” を意味する. ([8], Corollary 3.6, (ii), を参照ください.) この図式の 3 行目や 5 行目の合成として得られる同型は, (この §20 の冒頭の意味での) 代入同型です. この図式の 3 行目や 5 行目の右側に登場する同型たちの全体を

$$\Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v), \quad \infty \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$$

と書くことにしましょう. この記号により, 上の図式から,

$$\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v^\Theta) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v^\Theta)) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v),$$

$$\infty \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v^\Theta) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v^\Theta)) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$$

という図式が得られます. これらの合成を, 本稿では, **フロベニオイド論的代入同型** (Frobenioid-theoretic evaluation isomorphism) と呼ぶことにします. 簡単に確認できるとおり, テータモノイドの場合と同様に, 単テータ系の同型

$$\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \Pi_v)$$

が与えられる毎に, 同型による可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}}) \\
 \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\
 \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}}^\Theta)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}}^\Theta)) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})) \\
 \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\
 \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \Pi_{\underline{v}})) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \Pi_{\underline{v}})) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \Pi_{\underline{v}})) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\dagger \Pi_{\underline{v}})) \\
 \wr \uparrow & & \wr \uparrow & & \wr \uparrow & & \wr \uparrow \\
 \Psi_\Theta(\dagger \Pi_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\dagger \Pi_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_\Theta(\dagger \Pi_{\underline{v}}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\text{gau}}(\dagger \Pi_{\underline{v}})
 \end{array}$$

が得られます. ([8], Proposition 3.4, (i); [8], Corollary 3.7, (i), を参照ください.) この図式の垂直の射の合成はテータモノイドや Gauss モノイドに対する Kummer 同型, 水平の射は代入同型です. そして, この図式たちを, 代入同型に対する Kummer 同型と見做すことができます.

§ 21. 大域的 Gauss フロベニオイド

§17 から §20 までの間では, $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ の元に関する局所的設定のテータモノイドや Gauss モノイド, そして代入同型の構成を行いました. 一方, $\underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ の元に関する局所的設定に対しても, “形式的” にテータモノイドや Gauss モノイド, そして代入同型を構成することが可能です. 実際, 理論の大域的な側面との関係から, そういった “ $\underline{\mathbb{V}}$ の任意の元に関する局所的設定に対するテータモノイドや Gauss モノイド, そして代入同型” の考察が不可欠です. この §21 では, まず最初に, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が $\underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ の元であり, かつ, 有限素点の場合のテータモノイドや Gauss モノイド, そして代入同型の構成を説明します. その後に, **大域の実化テータフロベニオイド** (global realified theta Frobenioid — cf. [8], Corollary 4.5, (v); [8], Corollary 4.6, (v)) と **大域の実化 Gauss フロベニオイド** (global realified Gaussian Frobenioid — cf. [8], Corollary 4.5, (v); [8], Corollary 4.6, (v)) についての説明を行おうと思います. この §21 では, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ を有限素点, p を $\underline{v}$ の剰余標数とします.

まず最初に, エタールのなテータモノイドや Gauss モノイド, そして代入同型です. §1 の Hodge 劇場内の $\mathcal{D}$ 素点縞 $\dagger \mathcal{D}_{\succ} = \{\dagger \mathcal{D}_{\succ, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}}$ を持ってきて, そして, $\dagger \mathcal{D}_{\succ}$ から単遠アーベル的に復元/構成される $\mathcal{D}^\dagger$ 素点縞を,

$$\dagger \mathcal{D}_{\succ}^\dagger = \{\dagger \mathcal{D}_{\succ, \underline{w}}^\dagger\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}}$$

と書くことにしましょう. したがって, $\dagger \mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}$ は $\Pi_{\underline{v}}$ の同型物 $\dagger \Pi_{\underline{v}}$ とだいたい等価なデータであり, $\dagger \mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^\dagger$ は ($\dagger \Pi_{\underline{v}}$ の “数論的商” として生じる) $G_{\underline{v}}$ の同型物 ($\dagger \Pi_{\underline{v}} \twoheadrightarrow \dagger G_{\underline{v}}$) とだいたい等価なデータとなります. ([2], §17, の最後の議論を参照ください.)

この位相群 ${}^{\dagger}G_{\underline{v}}$ に, [2], §2, の冒頭の議論に登場する単遠アーベル的アルゴリズムを適用することで, $G_{\underline{v}}$ 作用付きモノイド $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ の同型物である ${}^{\dagger}G_{\underline{v}}$ 作用付きモノイド $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}) \subseteq \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$ が得られます. 商 $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})/\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$ の“実化” ($\cong \mathbb{R}_{\geq 0}$) ([2], §22, の後半の議論を参照) を $\mathbb{R}_{\geq 0}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$ と書くことに, そして,

$$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\text{ss}}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$$

と書くことにしましょう. また, 遠アーベル幾何学の研究によって, 位相群 ${}^{\dagger}G_{\underline{v}}$ から, 単遠アーベル的に, “ $p \in \mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ が定める $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}/\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times}$ の実化の元” に対応する元

$$\log(p)({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$$

を復元/構成することができます. ([8], Proposition 4.1, (ii), を参照ください.)

次に, §9 の議論と同様に, 上に登場した対象 ${}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$ の (加法的) 対称化同型を考えましょう. 各 $t \in T$ に対して, $({}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}))_t$ を, $t \in T$ でラベル付けされた ${}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})$ のコピーとします. すると, §9 の場合と同様に, ${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ の群論的構造から考察可能な (局所的) $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ 対称性によって, 様々な $t \in T$ に対する “ $({}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}))_t$ ” の間の対称化同型を得ることができます. したがって, 特に, $\langle T^* \rangle$ でラベル付け (§9, (b), を参照) されたコピー

$$({}^{\dagger}G_{\underline{v}})_{\langle T^* \rangle} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})_{\langle T^* \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} ({}^{\dagger}G_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}))_{\langle T^* \rangle}$$

が得られます. ([8], Proposition 4.1, (iii), を参照ください.)

形式的な記号

$$\underline{\Theta}_{\underline{v}}^{\text{fml}}$$

を用いて定義される (${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ の作用付き) モノイド

$$\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) = {}_{\infty}\Psi_{\Theta}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \log(p)({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}) \cdot \underline{\Theta}_{\underline{v}}^{\text{fml}})$$

が, $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ におけるエタールのテータモノイドです. (したがって, $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ における“テータモノイド”は, §17 の冒頭の意味での“テータモノイド”ではなく, その表示の $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に取り替えることで得られるモノイドに対応するモノイドとなります.) そして, $\prod_{|t| \in T^*} (\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\text{ss}})_{|t|}$ の部分モノイドである (${}^{\dagger}\Pi_{\underline{v}}$ の作用付き) モノイド

$$\Psi_{\text{gau}}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}) = {}_{\infty}\Psi_{\text{gau}}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}})$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})_{\langle T^* \rangle} \times \left(\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (1^2 \cdot \log(p)({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger}), \dots, (l^*)^2 \cdot \log(p)({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\succ, \underline{v}}^{\dagger})) \right)$$

が, $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ におけるエタールの Gauss モノイドです. (したがって, $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ における“Gauss モノイド”は, §20 の冒頭の意味での“Gauss モノイド”ではなく, その表示の $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に取り替えることで得られるモノイドに対応するモノイドとなります.) 対応

$$“\underline{\Theta}_{\underline{v}}^{\text{fml}} \mapsto (1^2, \dots, j^2, \dots, (l^*)^2)”$$

が定める同型

$$\Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,v})$$

をエタールの代入同型と呼びます. ([8], Proposition 4.1, (iv), を参照ください.)

次に, Frobenius 的なテータモノイドや Gauss モノイド, そして代入同型です. §1 の Hodge 劇場内の $\mathcal{F}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}_{>} = \{\dagger \mathcal{F}_{>,w}\}_{w \in \mathbb{V}}$ を持ってきて, そして, $\dagger \mathfrak{F}_{>}$ から単遠アーベル的に復元/構成されるそれぞれ $\mathcal{D}$ 素点縞, $\mathcal{D}^+$ 素点縞を, $\dagger \mathcal{D}_{>}$, $\dagger \mathcal{D}_{>}^+$ と書くことにしましょう. したがって,

- $\dagger \mathfrak{F}_{>}$ の v 成分 $\dagger \mathcal{F}_{>,v}$ は, Θ Hodge 劇場 $\dagger \mathcal{HT} = (\{\dagger \underline{\mathcal{F}}_w\}_{w \in \mathbb{V}}, \dagger \mathfrak{F}^{\perp})$ の一部である $\dagger \underline{\mathcal{F}}_v$ と同一であり, その上,
- $\dagger \mathcal{F}_{>,v} = \dagger \underline{\mathcal{F}}_v$ から単遠アーベル的に復元/構成される $\dagger \mathcal{F}_v^+$ という対象は, $\mathcal{F}^{\perp}$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}^{\perp} = (\dagger \mathcal{C}^{\perp}, \text{Prime}(\dagger \mathcal{C}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger \mathfrak{F}^+ = \{\dagger \mathcal{F}_w^+\}_{w \in \mathbb{V}}, \{\dagger \rho_v\}_{v \in \mathbb{V}})$ の一部

です. また,

- $\dagger \mathcal{F}_{>,v} = \dagger \underline{\mathcal{F}}_v$ は, 位相群作用付きモノイド $\Pi_v \curvearrowright \mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright}$ の同型物 $\dagger \Pi_v \curvearrowright \dagger \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ とだいたい等価なデータであり,
- $\dagger \mathcal{D}_{>,v}$ は, その一部である $\dagger \Pi_v$ とだいたい等価なデータであり,
- $\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+$ は, $\dagger \Pi_v$ の数論的商 $\dagger G_v$ (特に, G_v の同型物) とだいたい等価なデータとなり,
- $\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+$ は, 位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright (\mathcal{O}_{F_v}^{\times} \times p^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times p^{\mathbb{N}})$ の同型物とだいたい等価なデータ

となります. ([2], §17, の最後の議論や, [2], §23, を参照ください.) $\dagger \mathcal{F}_{>,v} = \dagger \underline{\mathcal{F}}_v$ に対応する位相群作用付きモノイド $\dagger \Pi_v \curvearrowright \dagger \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ から復元/構成される位相群作用付きモノイド $\dagger G_v \curvearrowright \dagger \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ に対して, §9 で議論した対称化同型を適用することで, $\langle T^* \rangle$ でラベル付け (§9, (b), を参照) された $\dagger G_v$ のコピー $(\dagger G_v)_{\langle T^* \rangle}$, それから単遠アーベル的に復元/構成される位相群作用付きモノイド $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ の同型物 $(\dagger G_v)_{\langle T^* \rangle} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+)_{\langle T^* \rangle}$, $\langle T^* \rangle$ でラベル付けされた $\dagger \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ のコピー $(\dagger \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright})_{\langle T^* \rangle}$ が得られます. その上, [2], §3, で議論されている “ $\mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}$ ” に対する Kummer 同型に対して対称化同型を適用することで, $(\dagger G_v)_{\langle T^* \rangle}$ 同変な Kummer 同型

$$(\dagger \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright})_{\langle T^* \rangle} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+)_{\langle T^* \rangle}$$

も得られます.

[2], §23, の冒頭の議論を $\mathcal{F}_{>,v}^+$ に適用することによって得られるモノイド $\Phi_{\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+}^{\text{rlf}}$ を思い出しましょう. これは, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ というモノイドの同型物です. $\mathcal{F}_{>,v}^+$ とだいたい等価なデータである “ $G_v \curvearrowright (\mathcal{O}_{F_v}^{\times} \times p^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times p^{\mathbb{N}})$ ” の “ $\mathcal{O}_{F_v}^{\times}$ ” に対応するモノイドと $\Phi_{\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+}^{\text{rlf}}$ の直積として,

$$\overline{\mathcal{O}}_v^{\text{ss}}(\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+)$$

を定義します. また, $\Phi_{\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+}^{\text{rlf}}$ の構成から, (モノイド $\{1\} \times p^{\mathbb{N}}$ の唯一の生成元を考えることによって) “ p に対応する $\Phi_{\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+}^{\text{rlf}}$ の元” を定義することができます. この元と, 上で導入した元 $\log(p)(\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+)$ を用いることで, Kummer 同型

$$\Phi_{\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+}^{\text{rlf}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{\geq 0}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+)$$

を定義することができます. そして, この同型に加えて, “[2], §3, の最後の部分で議論した, Frobenius 部分が $\mathcal{O}_k^{\times}$ の場合の Kummer 同型” を適用することで, “ $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ の作用” という不定性が付加された $\dagger G_v$ 同変な Kummer 同型

$$\overline{\mathcal{O}}_v^{\text{ss}}(\dagger \mathcal{F}_{>,v}^+) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{O}}_v^{\text{ss}}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}^+)$$

が得られます.

それぞれ “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ ”, “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\text{ss}}$ ” に対する上述の Kummer 同型 (に加えて, Hodge 劇場の貼り合わせ同型の一部である “ $\dagger \mathcal{D}_{>} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathcal{D}_{>,v}$ ”) を通じて, それぞれ $\Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) = \infty \Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,v})$ と $\Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) = \infty \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,v})$ に対応するモノイドを考えることによって, Frobenius 的テータモノイド, Frobenius 的 Gauss モノイド

$$\Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) = \infty \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v), \quad \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) = \infty \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v)$$

が得られます. また, エタールの代入同型によって, Kummer/代入同型

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) &\xrightarrow{\sim} \Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v), \\ \infty \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) &\xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,v}) \xrightarrow{\sim} \infty \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_v) \end{aligned}$$

が定まります. ([8], Proposition 4.2, (iv), を参照ください.)

これまでに行った様々な構成と類似的な構成は, 無限素点の場合にも存在します. ([8], Proposition 4.3; [8], Proposition 4.4, を参照ください.) $\mathbb{V}$ のすべての元に対するエタールのテータモノイド, エタールの Gauss モノイド, Frobenius 的テータモノイド, Frobenius 的 Gauss モノイドを集めることで得られる対象を

$$\begin{aligned} \Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,w})\}_{w \in \mathbb{V}}, \quad \infty \Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty \Psi_{\Theta}(\dagger \mathcal{D}_{>,w})\}_{w \in \mathbb{V}}, \\ \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,w})\}_{w \in \mathbb{V}}, \quad \infty \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty \Psi_{\text{gau}}(\dagger \mathcal{D}_{>,w})\}_{w \in \mathbb{V}}, \\ \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \mathcal{HT}^{\Theta}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_w)\}_{w \in \mathbb{V}}, \quad \infty \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \mathcal{HT}^{\Theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty \Psi_{\mathcal{F}^{\Theta}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_w)\}_{w \in \mathbb{V}}, \\ \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \mathcal{HT}^{\Theta}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_w)\}_{w \in \mathbb{V}}, \quad \infty \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \mathcal{HT}^{\Theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty \Psi_{\mathcal{F}^{\text{gau}}}(\dagger \underline{\mathcal{F}}_w)\}_{w \in \mathbb{V}} \end{aligned}$$

— ただし, $w \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ の場合の対応する対象については, §17 や §20 を参照 — と書くことにしましょう. そして,

(a) これらモノイドの集まりの各成分の間に存在する局所的な Kummer/代入同型の全体を

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta) &\xrightarrow{\sim} \Psi_\Theta({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{gau}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta), \\ {}_\infty\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta) &\xrightarrow{\sim} {}_\infty\Psi_\Theta({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} {}_\infty\Psi_{\text{gau}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} {}_\infty\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta) \end{aligned}$$

と書くことにします. ([8], Corollary 4.5, (iv); [8], Corollary 4.6, (iv), を参照ください.)

次に, 実化された大域的テータフロベニオイド, 及び, 実化された大域的 Gauss フロベニオイドを構成しましょう. §9, (n), の直前の議論を $\mathcal{D}^\perp$ 素点縞 ${}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp$ に適用することによって, $(\mathcal{C}_{\text{mod}}^\perp, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^\perp) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}}, \{\rho_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}})$ という 3 つ組の同型物

$$(\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp), \text{Prime}(\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}}, \{\rho_{\mathcal{D}^\perp, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}})$$

が得られます. 各 $\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, $\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)$ の部品である $\Phi_{\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp), \underline{w}}$ ([2], §22, の最後の議論を参照) を, 形式的な記号 $\underline{\Theta}_{\underline{w}}^{\text{fml}}$ を用いて定義されるモノイド

$$\Phi_{\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp), \underline{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp), \underline{w}} \cdot \underline{\Theta}_{\underline{w}}^{\text{fml}}$$

に取り替えることによって得られる大域的実化フロベニオイドを

$$\mathcal{D}_\Theta^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)$$

と書き, 本稿では, これを, **エタールの大域的実化テータフロベニオイド** (étale-like global realified theta Frobenioid) と呼ぶことにします. その定義から, 同義反復的に, 抽象的なフロベニオイドとして, $\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)$ は, $\mathcal{D}_\Theta^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)$ と同型です. ([8], Corollary 4.5, (v), を参照ください.)

次に, 各 $j \in J$ に対して,

$$\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)_j$$

を, $j \in J$ でラベル付けされた $\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)$ のコピーとしましょう. すると, 対応

$$“a \mapsto (1^2 \cdot a, \dots, j^2 \cdot a, \dots, (l^*)^2 \cdot a)”$$

によって, “埋め込み”

$$\mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp) \hookrightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)_j$$

が定まります. この “埋め込みの像” を

$$\mathcal{D}_{\text{gau}}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp) \subseteq \prod_{j \in J} \mathcal{D}^\perp({}^\dagger\mathfrak{D}_\succ^\perp)_j$$

と書き, 本稿では, これを, **エタールの大域的実化 Gauss フロベニオイド** (étale-like global realified Gaussian Frobenioid) と呼ぶことにします. その定義から, 同義反復的に, 抽象的なフロベニオイドとして, $\mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ は $\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ と同型です. また, 対応

$$\underline{\underline{\Theta}}_w^{\text{fml}} \mapsto (1^2, \dots, j^2, \dots, (l^*)^2)$$

によって, 同型

$$\mathcal{D}_{\Theta}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}}),$$

— つまり, 代入同型 — が得られます. ([8], Corollary 4.5, (v), を参照ください.)

また, §9, (o), の Kummer 同型の構成と同様の構成によって, (Hodge 劇場の貼り合わせ同型の一部である “ $\dagger \mathfrak{D}_{\prec} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{D}_{\succ}$ ” を通じて) Kummer 同型

$$\dagger \mathcal{C}^{\text{lt}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$$

が得られます. この同型を用いて, それぞれ $\mathcal{D}_{\Theta}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ と $\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ に対応するフロベニオイドを考えることで, 大域的実化フロベニオイド

$$\dagger \mathcal{C}_{\Theta}^{\text{lt}}, \quad \dagger \mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}}$$

が得られます. 本稿では, これらを, それぞれ **Frobenius 的大域的実化テータフロベニオイド** (Frobenius-like global realified theta Frobenioid), **Frobenius 的大域的実化 Gauss フロベニオイド** (Frobenius-like global realified Gaussian Frobenioid) と呼ぶことにしましょう. その上, 上述の代入同型 $\mathcal{D}_{\Theta}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ によって,

(b) Kummer/代入同型

$$\dagger \mathcal{C}_{\Theta}^{\text{lt}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\Theta}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}}) \xrightarrow{\sim} \dagger \mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}}$$

が定まります. ([8], Corollary 4.6, (v), を参照ください.)

大域的実化 Gauss フロベニオイド $\dagger \mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}}, \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ の定義から, §10, (d), の水平の同型 (の逆) は,

$$\begin{array}{ccc} \dagger \mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} (\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}}) & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})_j \end{array}$$

— ただし, 垂直の矢は Kummer 同型 — という可換図式を誘導します. これにより, 大域的実化 Gauss フロベニオイド $\dagger \mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}}, \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger \mathfrak{D}_{\prec}^{\text{t}})$ と, 非実化的な大域的フロベニオイド “ $\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ ”, “ $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}(\dagger \mathcal{D}^{\odot})$ ” との間の関連が得られます.

§ 22. $\Theta^{\times \mu}$ リンクと $\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ リンク

$\mathcal{F}^+$ 素点縞の定義から, §21 で定義された局所的な Frobenius 的テータモノイドの集まり $\Psi_{\mathcal{F}^{\odot}}(\dagger \mathcal{HT}^{\odot})$ が, $\mathcal{F}^+$ 素点縞 $\dagger \mathfrak{F}_{\Theta}^+$ を定めることがわかります. (§20 の冒頭の議論を

参照ください. また, [8], Remark 4.10.1, も参照ください.) この $\mathcal{F}^+$ 素点縞 ${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^+$ と, §21 で定義された Frobenius 的大域的実化テータフロベニオイド ${}^\dagger\mathcal{C}_\Theta^{\text{lf}}$ によって, $\mathcal{F}^+$ 素点縞

$${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{\text{lf}} \stackrel{\text{def}}{=} ({}^\dagger\mathcal{C}_\Theta^{\text{lf}}, \text{Prime}({}^\dagger\mathcal{C}_\Theta^{\text{lf}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, {}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^+, \{\rho_{\Theta, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}})$$

が得られます. ([8], Corollary 4.10, (ii), を参照ください.) また, この ${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{\text{lf}}$ の構成と類似的な構成を, 組 “ $(\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta), {}^\dagger\mathcal{C}_\Theta^{\text{lf}})$ ” を組 $(\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta), {}^\dagger\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lf}})$, $(\Psi_\Theta({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ))$, $(\Psi_{\text{gau}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ))$ に取り替えて適用することによって, $\mathcal{F}^+$ 素点縞

$${}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf}} \stackrel{\text{def}}{=} ({}^\dagger\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lf}}, \text{Prime}({}^\dagger\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lf}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, {}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^+, \{\rho_{\text{gau}, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}}),$$

$$\mathfrak{F}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \text{Prime}(\mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}_\Theta^+({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \{\rho_{\mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}}),$$

$$\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \text{Prime}(\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}_{\text{gau}}^+({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \{\rho_{\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}})$$

が得られます. ([8], Corollary 4.10, (ii); [9], Proposition 2.1, (ii); [9], Proposition 3.10, (i), を参照ください.) したがって, これら $\mathcal{F}^+$ 素点縞の各局所成分の “単数部分” — つまり, $\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta)$, $\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta)$, $\Psi_\Theta({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$, $\Psi_{\text{gau}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$ の各局所成分の “単数的加群 $\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times$ に相当する部分” — の捻れ部分による商を考えることによって, $\mathcal{F}^{+ \times \mu}$ 素点縞 (§9, (m), の直前の議論を参照)

$${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} ({}^\dagger\mathcal{C}_\Theta^{\text{lf}}, \text{Prime}({}^\dagger\mathcal{C}_\Theta^{\text{lf}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, {}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}, \{\rho_{\Theta, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}}),$$

$${}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} ({}^\dagger\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lf}}, \text{Prime}({}^\dagger\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lf}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, {}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}, \{\rho_{\text{gau}, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}}),$$

$$\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \text{Prime}(\mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \{\rho_{\mathcal{D}_\Theta^{\text{lf}}, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}}),$$

$$\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \text{Prime}(\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \{\rho_{\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lf}}, \underline{v}}\}_{\underline{v} \in \mathbb{V}})$$

が得られます. そして, §21, (a), (b), の Kummer/代入同型によって,

(a) Kummer/代入同型

$${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{\text{lf}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Theta^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} {}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf}},$$

$${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} {}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}$$

が定まります. ([8], Corollary 4.10, (ii); [9], Proposition 2.1, (ii); [9], Proposition 3.10, (i), を参照ください.)

それぞれ ${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}$, ${}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}$, $\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$, $\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$ というデータの局所成分の “単数部分” — つまり, 単数的加群 “ $\mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times$ ” に相当する部分 — の集まりとして得られる $\mathcal{F}^{+ \times \mu}$ 素点縞を

$${}^\dagger\mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}, \quad {}^\dagger\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}, \quad \mathfrak{F}_\Theta^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ), \quad \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{+ \times \mu}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$$

と書くことにします. すると, テータモノイド $\Psi_{\mathcal{F}^\Theta}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta)$ や $\Psi_\Theta({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$, Gauss モノイド $\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^\dagger\mathcal{HT}^\Theta)$ や $\Psi_{\text{gau}}({}^\dagger\mathcal{D}_\succ)$ の構成 (特に, §20 や §21 の議論を参照) から,

(b) (a) の Kummer/代入同型, 及び, §9, (k), の Kummer 同型と両立的な同型による図式

$$\begin{array}{ccccc} \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\times \mu} & \xrightarrow{\sim} & \dagger \mathfrak{F}_{\Theta}^{\times \mu} & \xrightarrow{\sim} & \dagger \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\times \mu} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathfrak{F}_{\Delta}^{\times \mu}(\dagger \mathcal{D}_{\Delta}^{\times}) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{F}_{\Theta}^{\times \mu}(\dagger \mathcal{D}_{\times}) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\times \mu}(\dagger \mathcal{D}_{\times}) \end{array}$$

が存在することがわかります. ([8], Corollary 4.10, (iv); [9], Proposition 2.1, (vi), を参照ください.)

§11 の後半の議論と同様, §1 で復習した $\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場を

$$\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

と書くことにします. そして, (§1 の冒頭で固定した初期 Θ データに関する) 別の新たな $\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}$ Hodge 劇場

$$\ddagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

を用意しましょう. したがって, §9, (m), を得るために適用した手続きと同様の手続きによって, この Hodge 劇場から, $\mathcal{F}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$ 素点縞 $\ddagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$ が得られます. $\mathcal{F}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$ 素点縞の間の充満多重同型

$$\dagger \mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$$

をその内容とする 2 つの Hodge 劇場 $\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ と $\ddagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ との間のリンクを $\Theta^{\times \mu}$ **リンク** ($\Theta^{\times \mu}$ -link — cf. [8], Corollary 4.10, (iii)) と呼び, それを,

$$\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\Theta^{\times \mu}} \ddagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

という記号で表現することになります. そして, $\Theta^{\times \mu}$ リンクと (a) の代入同型 $\dagger \mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$ (の逆) の合成によって定まる $\mathcal{F}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$ 素点縞の間の充満多重同型

$$\dagger \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$$

をその内容とする 2 つの Hodge 劇場 $\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ と $\ddagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ との間のリンクを $\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ **リンク** ($\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ -link — cf. [8], Corollary 4.10, (iii)) と呼び, それを,

$$\dagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}} \ddagger \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

という記号で表現することになります.

$\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ リンクによる値群部分や単数的加群の対応の様子を具体的に見てみましょう. 値群部分の対応の様子は, $\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ リンク

$$\ddagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xleftarrow{\Theta^{\times \mu}} \dagger \mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xleftarrow{\text{代入同型}} \dagger \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$$

において,

- $v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ の場合,

$\underline{q}_v \mapsto$ 多輻的に表示されたテータ関数 $\underline{\Theta}_v \xrightarrow{\text{Galois 代入}} \text{テータ値 } (\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2}),$

- $v \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ が有限素点の場合,

v の剰余標数 $p \mapsto$ 形式的なテータ関数 $\underline{\Theta}_v^{\text{fml}} \xrightarrow{\text{形式的な代入}} (p^{1^2}, p^{2^2}, \dots, p^{(l^*)^2})$

という形で, 具体的に理解することが可能です. (§20 の冒頭の議論を参照ください.) 次に, 単数的加群に関して, その定義から, $\Theta^{\times\mu}$ リンク, $\Theta_{\text{gau}}^{\times\mu}$ リンクが, 充満多重同型

$$\dagger \mathfrak{F}_{\Theta}^{\dagger \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\dagger \times \mu}, \quad \dagger \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\dagger \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\dagger \times \mu}$$

を誘導するという事実を確認することができます. したがって, 特に, (b) の図式の上側の同型から, 充満多重同型

$$\dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\dagger \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\dagger \times \mu}$$

が得られます. ([8], Corollary 4.10, (iv), を参照ください.) つまり,

リンクの両側においてそれぞれ定義される単数的加群 “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_v}^{\times\mu}$ ” の加法的対称性による対称化対象 $\dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\dagger \times \mu}, \dagger \mathfrak{F}_{\Delta}^{\dagger \times \mu}$ は, $\Theta^{\times\mu}$ リンクや $\Theta_{\text{gau}}^{\times\mu}$ リンクによって (同型を除いて) “不変”

ということです. これらの観察から, $\Theta_{\text{gau}}^{\times\mu}$ リンクは, [2], §8, の後半の議論から導かれる要請である

多輻的に表示されたテータ関数を経由する非自明な変形 “ $\underline{q}_v \mapsto (\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2})$ ”, 及び, 単数部分 “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_v}^{\times\mu}$ ” のその変形からの隔離の同時実行

を実現していると考えられます.

一方, 我々がこれまでの議論で構成した “テータ値” — つまり, 多輻的に表示されたテータ関数の特殊値 — は, 乗法的な設定による対象であり, このままでは加法的な対象とは結び付きません. その結果 ([2], §8, の次数計算可能性の議論を参照), 例えば, $\Theta_{\text{gau}}^{\times\mu}$ リンクによって結び付けられる q パラメータ (の $2l$ 乗根) $\{\underline{q}_v\}_{v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}}$ とテータ値 $\{(\underline{q}_v^{1^2}, \underline{q}_v^{2^2}, \dots, \underline{q}_v^{(l^*)^2})\}_{v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}}$ に関して, それらからそれぞれ生じる 2 つの数論的直線束の次数について, 非自明な関係を主張することはできません. テータ値を加法的な対象と結び付けるために, Gauss モノイドを対数リンクと関連付けましょう. その結果として得られるモノイドが, 所望の多輻的アルゴリズム ([2], §12, を参照) の出力のもっとも重要な構成員となります.

§ 23. 対数 Gauss 行進モノイド

§14 で導入した対数列

$$\dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (\dots \xrightarrow{\log} {}^{\dagger-1}\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} {}^{\dagger 0}\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} {}^{\dagger 1}\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots)$$

を固定します. この列から生じる対数殻の無限列 (§15 の議論を参照) に, これまでの議論によって構成された Gauss モノイドを関連付けましょう. その結果として得られる重要なモノイド (の集まり) が, **局所対数 Gauss 行進モノイド** (local logarithmic Gaussian procession monoid — cf. [9], Proposition 3.4, (ii); [9], Proposition 3.5, (i)) です.

簡単のため, $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ の場合を説明しましょう. $\underline{v} \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対する, $\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta})$, ${}_{\infty}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta})$ の $\underline{v}$ 成分である, (§20 で構成を行った) Frobenius 的 Gauss モノイド $\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta})_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})$, ${}_{\infty}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta})_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} {}_{\infty}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})$ を思い出しましょう. その構成からわかるとおり, この Frobenius 的 Gauss モノイドは, 直積

$$\prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger n}\underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})_{|t|}$$

の部分モノイドとなります:

$$\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta})_{\underline{v}} \subseteq {}_{\infty}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}({}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta})_{\underline{v}} \subseteq \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger n}\underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})_{|t|}.$$

これら 2 つの部分モノイドを,

$$\begin{aligned} \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger n}\underline{\mathcal{F}}_{\underline{v}})_{|t|} &\xrightarrow{\sim} \prod_{|t| \in T^*} \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{|t|, \underline{v}}) \xleftarrow{\sim} \prod_{|t| \in T^*} \mathcal{O}_{\tilde{k}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})}^{\triangleright} \\ &\subseteq \prod_{|t| \in T^*} \tilde{k}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{|t|, \underline{v}}) \hookrightarrow \prod_{j \in J} \tilde{k}^{\otimes}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, \underline{v}}^{\pm}) \end{aligned}$$

— ただし, $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\triangleright}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})$ は $|t| \in T^*$ で添字付けられた §9, (f), の対象の Frobenius 的部分 (したがって, $\mathcal{O}_{\tilde{F}_{\underline{v}}}^{\triangleright}$ の同型物), “ $\xrightarrow{\sim}$ ” は Hodge 劇場の定義 (の一部) から生じる同型, “ $\xleftarrow{\sim}$ ” は対数リンク ${}^{\dagger n-1}\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} {}^{\dagger n}\mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ から生じる同型, “ $\hookrightarrow$ ” については §6 の冒頭の $T^* \xrightarrow{\sim} J$ という全単射と §13 の議論を参照 — という単射の列によって, $\prod_{j \in J} \tilde{k}^{\otimes}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}, \underline{v}}^{\pm})$ の部分モノイドと見做すことで得られるモノイドを

$${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{v}}, \quad {}_{\infty}{}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{v}}$$

と書きます. そして, $\mathbb{V}^{\text{good}}$ の元においても類似的な構成を行い, そうして得られるモノイドの集まりを

$${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{{}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}, \quad {}_{\infty}{}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{{}_{\infty}{}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}$$

と書き, 本稿では, これを, **Frobenius 的局所対数 Gauss 行進モノイド** (Frobenius-like local logarithmic Gaussian procession monoid) と呼ぶことにします. ([9], Proposition 3.4, (ii), を参照ください.)

次に, **大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイド** (global realified logarithmic Gaussian procession Frobenioid — cf. [9], Proposition 3.7, (iii), (iv), (v)) という大域的な対象を定義します. そのために, §21 の後半の議論で構成された Frobenius 的大域的実化 Gauss フロベニオイド

$${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}} \hookrightarrow \prod_{j \in J} {}^{\dagger}n\mathcal{C}_j^{\text{lt}} \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in J} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$$

を思い出しましょう. この部分圏 ${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}}$ が, 大域的フロベニオイドの実化の間の同型

$$({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$$

— §14, (d), を参照 — を通じて定める部分圏を

$${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} \hookrightarrow \prod_{j \in J} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$$

と書き, そして, その上, 大域的フロベニオイドの実化の間の同型

$$({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$$

— §14, (d), を参照 — を通じて定める部分圏を

$${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}} \hookrightarrow \prod_{j \in J} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$$

と書きます. ([9], Proposition 3.7, (iii), (iv), (v), を参照ください.) これら

$${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \quad {}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}$$

を, 本稿では, **Frobenius 的大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイド** (Frobenius-like global realified logarithmic Gaussian procession Frobenioid) と呼びます. その定義から, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} {}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ {}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ {}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} ({}^{\dagger}n\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \end{array}$$

が存在することに注意しましょう. ([9], Proposition 3.7, (v), を参照ください.)

また, §22 の冒頭での “ ${}^{\dagger}\mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lt}}$ ” や “ ${}^{\dagger}\mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lt} \times \mu}$ ” の構成と同様に, 局所的な Frobenius 的対数 Gauss 行進モノイドの集まり ${}^{\dagger}n\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}}$ による $\mathcal{F}^{\text{lt}}$ 素点縞 ${}^{\dagger}n\mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}$ と, Frobenius 的大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイド ${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}$, ${}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}$ によって, $\mathcal{F}^{\text{lt}}$ 素点縞

$${}^{\dagger}n\mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} \stackrel{\text{def}}{=} ({}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \text{Prime}({}^{\dagger}n\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, {}^{\dagger}n\mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \{{}^{\dagger}n\rho_{\text{LGP}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}),$$

$$\dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt}} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^n \mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^n \mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{t}}, \{\dagger^n \rho_{\text{lgp}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

— ただし, $\dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{t}} \stackrel{\text{def}}{=} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{t}}$ — か, したがって, $\mathcal{F}^{\text{lt}} \times \mu$ 素点縞

$$\dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt} \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^n \mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^n \mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{t} \times \mu}, \{\dagger^n \rho_{\text{LGP}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}),$$

$$\dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt} \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^n \mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^n \mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{t} \times \mu}, \{\dagger^n \rho_{\text{lgp}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

が得られます. ([9], Proposition 3.7, (iii), (iv); [9], Definition 3.8, (ii), を参照ください.)
これらの対象の定義から, 充満多重同型

$$\begin{aligned} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lt}} &\xrightarrow{\sim} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} \xrightarrow{\sim} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \\ \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lt} \times \mu} &\xrightarrow{\sim} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt} \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt} \times \mu} \end{aligned}$$

が存在することに注意しましょう.

次に, エタールの対数 Gauss 行進的对象を構成しましょう. Frobenius 的局所対数 Gauss 行進モノイド $\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}}, \dagger^n \Psi_{\infty \mathcal{F}_{\text{LGP}}}$ の構成と類似的な構成を,

- Frobenius 的 Gauss モノイド $\Psi_{\mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger^n \mathcal{HT}^\ominus)$ や $\Psi_{\infty \mathcal{F}_{\text{gau}}}(\dagger^n \mathcal{HT}^\ominus)$ を, エタールの Gauss モノイド $\Psi_{\text{gau}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ)$ や $\Psi_{\infty \text{gau}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ)$ に,
- $|t| \in T^*$ で添字付けられた §9, (f), の対象の Frobenius 的部分 $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^\triangleright(\dagger^n \mathcal{F}_{|t|, \underline{v}})$ を, $|t| \in T^*$ で添字付けられた §9, (d), の対象の “ $\mathcal{O}_{\tilde{k}(\dagger \Pi_{\underline{v}})}^\triangleright$ ” に対応する部分に,
- “ $\tilde{k}(\dagger^{n-1} \mathcal{F})$ ” に関連する記号を, “ $\tilde{k}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ)$ ” に関連する記号に

取り替えて適用することで得られるモノイドの集まりを

$$\dagger^\circ \Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger^\circ \Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}, \underline{w}}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}, \quad \dagger^\circ \Psi_{\infty \mathcal{D}_{\text{LGP}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger^\circ \Psi_{\infty \mathcal{D}_{\text{LGP}, \underline{w}}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}$$

と書き, 本稿では, これを, **エタールの局所対数 Gauss 行進モノイド** (étale-like local logarithmic Gaussian procession monoid) と呼びます. ([9], Proposition 3.5, (i), を参照ください.) そして, §21 の後半の議論で構成されたエタール的大域的実化 Gauss フロベニオイドに関する図式

$$\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ) \hookrightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{D}^{\text{lt}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ)_j \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in J} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\oplus \mathbb{R}}(\dagger^\circ \mathcal{D}^\ominus)_j$$

から出発して, Frobenius 的大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイド $\dagger^n \mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}$ (あるいは, $\dagger^n \mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}$) の構成と類似的な構成を,

- $\dagger^n \mathcal{C}_{\text{gau}}^{\text{lt}}$ を $\mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ)$ に,
- $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\oplus \mathbb{R}})_j$ を $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\oplus \mathbb{R}}(\dagger^\circ \mathcal{D}^\ominus)_j$ に,

- $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$ (あるいは, $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$), 及び, それらに関連する同型 (§14, (d), を参照) を, $(\dagger^\circ \mathcal{F}_{\text{DMOD}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$ (あるいは, $(\dagger^\circ \mathcal{F}_{\text{dmod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j$), 及び, それらに関連する同型 (§14, (h), を参照) に

取り替えて適用することで得られるフロベニオイドを

$$\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} \quad (\text{あるいは, } \dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}})$$

と書き, 本稿では, これを, **エタールの大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイド** (étale-like global realified logarithmic Gaussian procession Frobenioid) と呼びます. これらの対象の定義から, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{>}}^{\text{lt}}) & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes \mathbb{R}}(\dagger^\circ \mathcal{D}^{\otimes})_j \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\text{DMOD}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j \in J} (\dagger^\circ \mathcal{F}_{\text{dmod}}^{\otimes \mathbb{R}})_j \end{array}$$

が存在することに注意しましょう. (Frobenius 的大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイドの定義の直後の同様の図式を参照ください.)

さきほどの “ $\dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt} \times \mu}$ ” や “ $\dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt} \times \mu}$ ” の構成と同様に, 局所的なエタールの対数 Gauss 行進モノイドの集まり $\dagger^\circ \Psi_{\text{D}_{\text{LGP}}}$ による $\mathcal{F}^+$ 素点縞 $\dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt}}$ と, エタールの大域的実化対数 Gauss 行進フロベニオイド $\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}$ によって, $\mathcal{F}^{\text{lt} \times \mu}$ 素点縞

$$\dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt}} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt}}, \{\dagger^\circ \rho_{\text{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}),$$

$$\dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt}} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt}}, \{\dagger^\circ \rho_{\text{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

— ただし, $\dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt}} \stackrel{\text{def}}{=} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt}}$ — が, したがって, $\mathcal{F}^{\text{lt} \times \mu}$ 素点縞

$$\dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt} \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt} \times \mu}, \{\dagger^\circ \rho_{\text{D}_{\text{LGP}}^{\text{lt}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}}),$$

$$\dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt} \times \mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \text{Prime}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt} \times \mu}, \{\dagger^\circ \rho_{\text{D}_{\text{lgp}}^{\text{lt}}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \mathbb{V}})$$

が得られます. これらの対象の定義から, 充満多重同型

$$\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lt}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{>}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt}} \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt}},$$

$$\mathfrak{F}_{\text{gau}}^{\text{lt} \times \mu}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\text{>}}^{\text{lt}}) \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt} \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\text{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt} \times \mu}$$

が存在することに注意しましょう. ([9], Proposition 3.10, (i), を参照ください.)

§ 24. テータ値の対数 Kummer 対応と $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク

次に, 対数 Gauss 行進的対象の Frobenius 的側面とエタールの側面とを結び付ける Kummer 同型, 特に, 対数 Kummer 対応 ([2], §10, を参照) について考察しましょう. §23 と同様に, 対数列

$$\begin{aligned} & \dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\dots \xrightarrow{\log} \dagger^{-1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger^0 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger^1 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots \right) \end{aligned}$$

を固定します.

これまでに行った様々な構成から明らかなように, 対数 Gauss 行進モノイドの構成は, §9, (k), の Kummer 同型と両立的です. この事実により, 特に, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 対数 Gauss 行進モノイドに対する Kummer 同型

$$\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}} \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}}, \quad \dagger_\infty^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}} \xrightarrow{\sim} \dagger_\infty^\circ \Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}}$$

が得られます. ([9], Proposition 3.5, (i), を参照ください.) そして, この Kummer 同型と, §15 の前半の議論で述べた “ $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes})_{|j|}$ ” や “ $(\dagger^n \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|}$ ” に対する Kummer 同型によって, $\mathcal{F}^{\text{lt}}$ 素点縞や $\mathcal{F}^{\text{lt}} \times \mu$ 素点縞に対する Kummer 同型

$$\begin{aligned} \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt}} & \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt}}, \quad \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt}} \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\mathcal{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt}}, \\ \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lt} \times \mu} & \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}}^{\text{lt} \times \mu}, \quad \dagger^n \mathfrak{F}_{\text{lgp}}^{\text{lt} \times \mu} \xrightarrow{\sim} \dagger^\circ \mathfrak{F}_{\mathcal{D}_{\text{lgp}}}^{\text{lt} \times \mu} \end{aligned}$$

が得られます. ([9], Proposition 3.10, (i), を参照ください.)

定義から簡単に確認できるとおり, 各 (簡単のため, 有限素点) $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して,

- 局所対数 Gauss 行進モノイド $\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}}$ の $\underline{v}$ 成分 $\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{v}}$ の “単数部分”
— つまり, 単数的加群 “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^{\times}$ ” に相当する部分 — の Galois 不変部分 —
つまり, 単数的加群 “ $\mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^{\times}$ ” に相当する部分 —

は, Frobenius 的局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}) \subseteq \prod_{j \in J} \tilde{k}^{\otimes}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}})$$

に, したがって, Kummer 同型

$$(\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}(\dagger^{n-1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}})$$

を通じて, エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}})$$

に自然に作用します. また, 同様に, 定義から簡単に確認できるとおり, 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に対して,

- 局所対数 Gauss 行進モノイド ${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}$ の “分裂モノイド” ([8], Definition 4.9, (ii); [9], Definition 2.4, (i), を参照)

$${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}^{\perp} \subseteq {}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}$$

— つまり, 値プロフィールから生じる部分モノイドと μ_{2l} から生じる部分モノイドとが生成する部分モノイド (§20 での Gauss モノイドの構成を参照) —

は, Frobenius 的局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \subseteq \prod_{j \in J} \tilde{k}^{\otimes}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm})$$

に, したがって, Kummer 同型

$$(\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm})$$

を通じて, エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻

$$\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm})$$

に自然に作用します. このように, 局所対数 Gauss 行進モノイドの単数的部分と値群的部分の, (エタールの) 対数殻への作用を考えることができます. 一方, 上で与えたこれら単数的対象と値群的部分の “単一の Kummer 同型による作用” では, [2], §9, で論じられている “対数リンク不変” という重要な性質を満足しません. したがって, §15 での議論と同様に, [2], §9, で説明した “対数殻の無限列全体の使用” を考察しなければなりません.

まず最初に, 値群的部分, つまり, 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ での “分裂モノイド” ${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}^{\perp} \subseteq {}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}$ の作用の際における “対数殻の無限列全体の使用” を考えましょう. この場合, “対数リンク不変” な対象を得るためには, 上で議論した

$${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}^{\perp} \curvearrowright \prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm})$$

という作用だけを考えるのではなく, 任意の非負整数 m に対する対数写像の m 回反復合成

$$\begin{aligned} {}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}},\underline{v}}^{\perp} &\curvearrowright \prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \xrightarrow{\text{対数}} \prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \\ &\xrightarrow{\text{対数}} \prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n+1}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \xrightarrow{\text{対数}} \dots \xrightarrow{\text{対数}} \prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1+m}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \end{aligned}$$

— ただし, “ $\xrightarrow{\text{対数}}$ ” は単数部分上で定義される対数写像 (§15 の同様の図式や [2], §9, の議論を参照) — を行った後に Kummer 同型

$$(\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n-1+m}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\succ,\mathbb{S}_{j+1},\underline{v}}^{\pm})$$

を適用することで得られる, エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻への作用を考える必要があります. 具体的には, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に対して,

- (1) Frobenius 的局所対数 Gauss 行進モノイドの $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ 成分の“分裂モノイド”の集まり $\{\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}, \underline{v}}}^\perp\}_{n \in \mathbb{Z}}$,
- (2) エタールの局所正則テンソルパッケージによる対数殻 $\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^\otimes)^\mathbb{Q}(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_{j+1}^\pm, \underline{v}})$,
- (3) 各々 $n \in \mathbb{Z}$ でラベル付けされた (1) の“分裂モノイド”の、対数写像の m 回反復合成 (ただし, m はすべての非負整数を走る) による, (2) への作用たち

という 3 つ組は — 対数リンクは実質的には “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^\times$ ” 全体ではなく, その単数部分 “ $\mathcal{O}_{\overline{F}_{\underline{v}}}^\times$ ” のみから構成されるため ([9], Remark 1.1.1, を参照) — “対数リンク不変” な対象となります. 一方, [2], §9, の最後の注意のとおり, (3) の使用を望むならば, (対数写像の反復合成によって生じてしまうかもしれない) 無関係な局所的な元による作用と $\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}, \underline{v}}}^\perp$ による作用との“干渉”について検討しなければなりません. すなわち, (3) の対数写像の反復合成によって, (1) の各成分の“従来のな作用”とは異なる“別の作用”が, (2) に生じないことを確認しなければなりません. その所望の“不干渉性”は, 再び [2], §9, の最後の注意のとおり, 単データ系の定数倍剛性性質の帰結の 1 つである事実

$\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}, \underline{v}}}^\perp$ の元であって, 単数となる元は, μ_{2l} の元 (特に, 1 の巾根) のみ

から従います. 対数写像 “ $\overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow}$ ” の定義域は, 対数殻の単数部分です. したがって, 上の事実から, $\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}, \underline{v}}}^\perp$ の元であって, 対数写像 “ $\overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow}$ ” の定義域に属するものは, 1 の巾根しかありません. 一方, 1 の巾根を掛けるという操作は, 対数写像を介して, 0 を足すという操作に姿を変えるため, その結果, (対数写像の反復合成による) 無関係な局所的な元による作用と $\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}, \underline{v}}}^\perp$ による作用との“干渉”は生じないことがわかります. ([9], Proposition 3.5, (ii), (c), を参照ください.) このように, 値群的对象の対数殻への作用に関する“明確”な (= 不都合な干渉が生じない) 対数 Kummer 対応が得られました. 対数 Kummer 対応のこの“明確さ”の帰結として, 局所対数 Gauss 行進モノイドの“分裂モノイド”に対しても, §15 で説明した “ $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\otimes$ ” に関する Kummer 同型の同時両立性”と同様の同時両立性が得られます. ([9], Proposition 3.10, (iii), を参照ください.) (ここで議論されている“不干渉性”についてのより詳しい解説は, [9], Remark 3.11.4; [9], Fig. 3.4, を参照ください.)

一方, §15 の“単数的加群”に関する議論と同様の議論からわかるとおり, 直前に観察した“分裂モノイド”の場合と同様の“明確な対数 Kummer 対応”を, 単数的加群に対して得ることはできません. 単数的加群に関する対数 Kummer 対応は, 議論の対象となっている対数殻たちへの更なる“不定性” (Ind3) (§15 を参照) を必要とする (値群的对象の場合と比較すれば非常に複雑で“明確”とは程遠い) 対数 Kummer 対応となります.

上述の対数 Kummer 対応に関する議論の主要な対象であった対数 Gauss 行進モノイドの各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ での“分裂モノイド”たち

$$\{\dagger^n \Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}, \underline{v}}}^\perp\}_{\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}}$$

は, $\{\dagger^n \rho_{\text{LGP}, \underline{w}}\}_{\underline{w} \in \underline{\mathbb{V}}}$ というデータを通じて, 大域の実化対数 Gauss 行進フロベニオイド $\dagger^n \mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lf}}$ や $\dagger^n \mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lf}}$ の対象を定めます. こうして得られる大域の実化対数 Gauss 行進フ

ロベニオイド ${}^{\dagger n}\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lf}}$ や ${}^{\dagger n}\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lf}}$ の対象を, **Θ 標対象** ([2], §12, の後半の議論を参照) と呼ぶことにします. §9, (p), で導入された q 標対象同様, [2], §12, で説明された “宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把版” のとおり, この Θ 標対象が, 値群の変形を実現するリンク (つまり, 以下で説明される $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク) の “変形の目印 = 道標” となります. また, この “ Θ 標対象” という用語を用いれば, 上述の値群的对象に関する対数 Kummer 対応の議論の結論を,

対数 Kummer 対応における Θ 標対象に対する **不干涉性性質**

と表現することができます. ここで, この Θ 標対象の場合と同様に,

対数 Kummer 対応における q 標対象に対する **不干涉性性質**

を考察/実現できることに注意しましょう. ([9], Remark 3.12.2, (iv), を参照ください.)

固定された対数列 ${}^{\dagger \log} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ とは独立に, (§1 の冒頭で固定した初期 Θ データに関する) 別の新たな対数列

$$\begin{aligned} & {}^{\dagger \log} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\dots \xrightarrow{\log} {}^{\dagger -1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} {}^{\dagger 0} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} {}^{\dagger 1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots \right) \end{aligned}$$

を用意しましょう. $0 \in \mathbb{Z}$ での $\Theta^{\times\mu}$ リンク

$${}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$$

(§22 を参照) と充満多重同型 (= 代入同型)

$${}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\Theta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$$

(の逆) の合成によって定まる充満多重同型

$${}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\text{LGP}}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$$

をその内容とする ${}^{\dagger \log} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ と ${}^{\dagger \log} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$ との間のリンクを **$\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク** ($\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ -link — cf. [9], Definition 3.8, (ii)) と呼び, それを,

$${}^{\dagger \log} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}} \xrightarrow{\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}} {}^{\dagger \log} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm \text{ell}} \text{NF}}$$

という記号で表現することにします. §22 の後半の議論から, この $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンクは,

- (a) Θ 標対象を q 標対象に移す同型 ${}^{\dagger 0} \mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{lf}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0} \mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lf}}$ を定めて, その上,
- (b) 充満多重同型 ${}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0} \mathfrak{F}_{\Delta}^{\text{lf} \blacktriangleright \times \mu}$ を誘導,
- (c) 特に, 充満多重同型 ${}^{\dagger 0} \mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lf}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0} \mathfrak{D}_{\Delta}^{\text{lf}}$ を誘導

することがわかります。

§ 25. $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンクと両立的な多輻的表示とその帰結

§23 や §24 と同様に, (§1 の冒頭で固定した初期 Θ データに関する) 対数列

$$\begin{aligned} & \dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\dots \xrightarrow{\log} \dagger_{-1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_0 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_1 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots \right) \end{aligned}$$

を固定しましょう。また, それとは独立に, (§1 の冒頭で固定した初期 Θ データに関する) 別の新たな対数列

$$\begin{aligned} & \ddagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\dots \xrightarrow{\log} \ddagger_{-1} \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \ddagger_0 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \ddagger_1 \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots \right) \end{aligned}$$

を用意して, それらを $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク

$$\dagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}} \ddagger \log \mathcal{HT}^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$$

で結び付けましょう。

§3 での議論の主要な対象であった

- (a) 局所的な対数殻の集まり,
- (b) テータ関数の特殊値 (とその (a) への作用),
- (c) 数体 (とその (a) への作用)

から成る 3 つ組 “ $\mathfrak{T}$ ” を思い出しましょう。これまでに行った様々な構成から得られた, この 3 つ組に対する多輻的 Kummer 離脱に関する主張を, 以下のように簡単にまとめます。主張は, “多輻的表示”, “対数 Kummer 対応”, “ $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンク両立性” という 3 つの部分によって構成されます。そして, これが, 宇宙際 Teichmüller 理論の主定理 ([9], Theorem 3.11, を参照) です:

多輻的表示 ([9], Theorem 3.11, (i), を参照): 以下の $(a_{\text{ét}})$, $(b_{\text{ét}})$, $(c_{\text{ét}})$ から成る 3 つ組を $\dagger^\circ \mathfrak{R}_{\text{ét}}$ と書く:

($a_{\text{ét}}$) 各 $\mathbb{V} \ni \underline{v} | v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})$, $1 \leq j \leq l^\pm$ に対する **単解エタールの対数殻**

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}}^+), \quad \mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, \underline{v}}^+)$$

(§13 を参照) とその上の **行進正規化対数体積** (§13 を参照).

(b_{ét}) 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に対するエタールの局所対数 Gauss 行進モノイド ${}^{\dagger}\Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger}\Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}, \underline{v}}$ の “**分裂モノイド**” (§24 を参照)

$${}^{\dagger}\Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}, \underline{v}}^{\perp} \subseteq {}^{\dagger}\Psi_{\mathcal{D}_{\text{LGP}}, \underline{v}}$$

— つまり, 値プロファイルから生じる部分モノイドと μ_{2l} から生じる部分モノイドとが生成する部分モノイド — と, その — 単解化同型 $\mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\prec, \mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}^{\perp})$ を通じた — 直積 $\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}^{\perp})$ への **作用**.

(c_{ét}) 各 $1 \leq j \leq l^*$ に対する **エタールの数体**

$$({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}})_{|j|} = ({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}})_{|j|}$$

(§14, (h), を参照) と, その — 単解化同型 $\mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\prec, \mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{\perp})$ を通じた — 直積 $\prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{\perp})$ への **作用**, 及び, それらによる **エタールの大域的フロベニオイド**

$$({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{MOD}}}^{\otimes})_{|j|} \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{\text{mod}}}^{\otimes})_{|j|}$$

(§14, (h), を参照).

この 3 つ組 ${}^{\dagger}\mathfrak{R}_{\text{ét}}$ は,

(Ind1) 各 $|t| \in |T|$ で添字付けられた $\mathcal{D}^{\perp}$ 素点縞 ${}^{\dagger}\mathfrak{D}_{|t|}^{\perp}$ による行進 $\text{Pr}({}^{\dagger}\mathfrak{D}_{|T|}^{\perp})$ の自己同型の作用から生じる不定性

のもと, $0 \in T$ でラベル付けされた $\mathcal{D}^{\perp}$ 素点縞

$${}^{\dagger}\mathfrak{D}_0^{\perp}$$

をコア的データとする多輻的構造を持つ.

対数 Kummer 対応 ([9], Theorem 3.11, (ii), を参照): 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 以下の (a_{Frob}), (b_{Frob}), (c_{Frob}) から成る 3 つ組を ${}^{\dagger n}\mathfrak{R}_{\text{Frob}}$ と書く:

(a_{Frob}) 各 $\underline{v} \ni v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})$, $1 \leq j \leq l^{\pm}$ に対する **正則/単解 Frobenius 的対数殻**

$$\mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{\perp \times \mu}), \quad \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, \underline{v}}^{\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^{\pm}, \underline{v}}^{\perp \times \mu})$$

(§13 を参照) とその上の **行進正規化対数体積** (§13 を参照).

(b_{Frob}) 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に対する Frobenius 的局所対数 Gauss 行進モノイド ${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}}$ の $\underline{v}$ 成分 ${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{v}}$ の “分裂モノイド” (§24 を参照)

$${}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{v}}^{\perp} \subseteq {}^{\dagger n}\Psi_{\mathcal{F}_{\text{LGP}}, \underline{v}}$$

と, その — 単解化同型 $\mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}^{+ \times \mu})$ を通じた — 直積 $\prod_{j \in J} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, \underline{v}}^{+ \times \mu})$ への作用.

(c_{Frob}) 各 $1 \leq j \leq l^*$ に対する Frobenius 的数体

$$({}^{\dagger n}F_{\text{MOD}})_{|j|} = ({}^{\dagger n}F_{\text{mod}})_{|j|},$$

(§14, (a), を参照) と, その — 単解化同型 $\mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{\otimes}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{+ \times \mu})$ を通じた — 直積 $\prod_{v_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{V}(\mathbb{Q})} (\mathcal{I}^{\otimes})^{\mathbb{Q}}({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\mathbb{S}_{j+1}^{\pm}, v_{\mathbb{Q}}}^{+ \times \mu})$ への作用 (§15 を参照), 及び, Frobenius 的大域的フロベニオイド

$$({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes})_{|j|} \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger n}\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes})_{|j|}$$

(§14, (b), (c), を参照).

このとき, Kummer 同型

$$\Psi_{\text{cns}}({}^{\dagger n}\mathfrak{F}_{\succ})_{|t|} \xrightarrow{\sim} \Psi_{\text{cns}}({}^{\dagger \circ}\mathfrak{D}_{\succ})_{|t|}, \quad ({}^{\dagger n}F_{\text{mod}})_{|j|} \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}({}^{\dagger \circ}\mathcal{D}^{\otimes})_{|j|}$$

(§9, (k); §10, (f), を参照) は, ${}^{\dagger n}\mathfrak{R}_{\text{Frob}}$ とそのエタール版 ${}^{\dagger \circ}\mathfrak{R}_{\text{ét}}$ との間に,

(Ind2) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に付随する様々な部品においては $\text{Ism}_{\underline{v}}$ (§12 を参照) に対応する群の作用から, 無限素点に付随する様々な部品においては “ $\text{Ism}_{\underline{v}}$ ” と類似的な群の作用から, ($\underline{\mathbb{V}}$ の各元において) それぞれ生じる不定性

のもとでの Kummer 同型

$${}^{\dagger n}\mathfrak{R}_{\text{Frob}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger \circ}\mathfrak{R}_{\text{ét}}$$

を — したがって, 大域的実化フロベニオイドの間の Kummer 同型

$${}^{\dagger n}\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{ll}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\text{LGP}}^{\text{ll}}, \quad {}^{\dagger n}\mathcal{C}_{\text{lgp}}^{\text{ll}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger \circ}\mathcal{D}_{\text{lgp}}^{\text{ll}}$$

(§23 や §24 を参照) を — 誘導する. その上, それぞれの “(b)” の間の同型と, それぞれの “(c)” の数体の間の同型は — したがって, それぞれの “(c)” の “MOD” で添字付けられたフロベニオイドの間の同型は — 対数列において同時両立的 (すなわち, 干渉性性質 — §15 や §24 を参照 — が成立) となる. また, 以下の “不定性” を導入することで, それぞれの “(a)” の間の同型は, 対数列において (“同義反復的” に) 同時両立的となる:

(Ind3) 有限素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, Frobenius 的对数殻の集まり

$$\{\mathcal{I}^\otimes(\dagger^n \mathcal{F}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}})\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

を, その “共通の入れ物”

$$\mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\succ, \mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^\otimes(\dagger^\circ \mathcal{D}_{\mathbb{S}_j^\pm, v_{\mathbb{Q}}}^\dagger)$$

に関する (“完全な両立性” ではなく) “上半両立性” (§15 を参照) の対象である
と考える. 無限素点においても同様の “上半両立性” の対象であるとする.

$\Theta_{\text{LGP}}^{\times \mu}$ リンク両立性 ([9], Theorem 3.11, (iii), を参照): $\Theta_{\text{LGP}}^{\times \mu}$ リンクによる充満多重同型

$$\dagger^0 \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu} \xrightarrow{\sim} \ddagger^0 \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu}$$

— §24, (b), を参照 — は, コアのデータ (上の “多輻的表示” を参照) の間の同型から誘導される以下の同型と **両立的** となる:

(1) (Kummer 同型 “ $\dagger \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu}(\dagger \mathcal{D}_\Delta^\dagger)$ ” — §9, (l), を参照 — のもと) 充満多重同型

$$\mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\Delta^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu}(\ddagger^\circ \mathcal{D}_\Delta^\dagger).$$

(2) (Kummer 同型 “ $\dagger \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu}(\dagger \mathcal{D}_\Delta^\dagger)$ ” — §9, (l), を参照 — と充満多重同型 “ $\mathfrak{F}_\Delta^{\dagger \times \mu}(\dagger \mathcal{D}_\Delta^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Theta^{\dagger \times \mu}(\dagger \mathcal{D}_\succ)$ ” — §22, (b), を参照 — のもと) 充満多重同型

$$\mathfrak{F}_\Theta^{\dagger \times \mu}(\dagger^\circ \mathcal{D}_\succ) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\Theta^{\dagger \times \mu}(\ddagger^\circ \mathcal{D}_\succ).$$

(3) (関連する対象の Kummer 同型 — §18 を参照 — のもと) “**データモノイドの多輻的 Kummer 離脱**” (§18 の後半の議論を参照) における, (その多輻性から生じる) 輻的データの間の同型

$$\dagger^\circ \text{輻的データ} \xrightarrow{\sim} \ddagger^\circ \text{輻的データ}.$$

(4) (関連する対象の Kummer 同型 — [2], §24, を参照 — のもと) “ **κ コア的関数の多輻的 Kummer 離脱**” (§18 の最後の議論を参照) における, (その多輻性から生じる) 輻的データの間の同型

$$\dagger^\circ \text{輻的データ} \xrightarrow{\sim} \ddagger^\circ \text{輻的データ}.$$

また, (3), (4) に登場した輻的データの間の (多輻性から生じる) 同型やそれらに関する Kummer 同型は, (“ $\mathfrak{R}$ ” の “(b)”, “(c)” といった対象を生じさせる) Galois 代入と, 不定性 (Ind1), (Ind2), (Ind3) を認めれば, 両立的となる.

この §25 の最後に、上述の多輻的 Kummer 離脱を用いた q 標対象の次数の計算について、簡単に説明しましょう。(詳しくは、[9], Corollary 3.12, の証明を参照ください.) この §25 の冒頭の $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンクが定める同型 ${}^{\dagger 0}\mathcal{C}_{\text{LGP}}^{\text{pt}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0}\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{pt}}$ は、 ${}^{\dagger 0}\Theta$ 標対象を ${}^{\dagger 0}q$ 標対象に移します. (§24, (a), を参照ください.) したがって、§14, (e), (i), から、所望の次数 $\deg({}^{\dagger 0}q \text{ 標対象})$ を、 ${}^{\dagger 0}\Theta$ 標対象の — “ $\dagger$ の側” の正則構造の観点からではなく — “ $\ddagger$ の側” の正則構造の観点からの対数体積を用いて計算することが可能です. 一方、多輻的 Kummer 離脱によって、不定性 (Ind1), (Ind2), (Ind3) を認めれば、 $\Theta_{\text{LGP}}^{\times\mu}$ リンクが誘導する同型 ${}^{\dagger 0}\mathfrak{F}_{\Delta}^{\times\mu} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0}\mathfrak{F}_{\Delta}^{\times\mu}$ (§24, (b), を参照) と両立する同型 ${}^{\dagger 0}\mathfrak{R}_{\text{Frob}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0}\mathfrak{R}_{\text{Frob}}$ が得られます.

$$\text{vol}({}^{\dagger 0}\underline{\Theta}) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

を、不定性 (Ind1), (Ind2), (Ind3) の作用による ${}^{\dagger 0}\Theta$ 標対象の軌道の和集合の (“ $\ddagger$ の側” の正則構造による) 正則包 (holomorphic hull — cf. [9], Remark 3.9.5) ([2], §12, の後半の議論を参照) の行進正規化対数体積として定義しましょう. すると、両立的同型 ${}^{\dagger 0}\mathfrak{R}_{\text{Frob}} \xrightarrow{\sim} {}^{\dagger 0}\mathfrak{R}_{\text{Frob}}$ の存在から、 ${}^{\dagger 0}\Theta$ 標対象の対数体積は、 $\text{vol}({}^{\dagger 0}\underline{\Theta})$ 以下とならざるを得ません. したがって、結論として、不等式

$$\text{vol}({}^{\dagger 0}\underline{\Theta}) \geq \deg({}^{\dagger 0}q \text{ 標対象})$$

が得られます.

§ 26. Diophantus 幾何学的不等式

宇宙際 Teichmüller 理論の応用として得られる “Diophantus 幾何学的不等式” の内容は、以下のとおりです ([10], Theorem A, を参照):

L を数体, V を L 上の射影的代数曲線, $D \subseteq V$ を被約因子, d を正の整数, ϵ を正の実数とする. $\Omega_{V/L}^1(D)$ が豊富な直線束であると仮定する. このとき、集合

$$(V \setminus D)^{\leq d} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V \setminus D \mid x \text{ での剰余体の有理数体上の拡大次数が } d \text{ 以下}\}$$

上の関数

$$\text{ht}_{\Omega_{V/L}^1(D)} - (1 + \epsilon)(\log\text{-diff}_V + \log\text{-cond}_D)$$

— ただし、 $\text{ht}_{\Omega_{V/L}^1(D)}$, $\log\text{-diff}_V$, $\log\text{-cond}_D$ については、[5], Definition 1.2, (i); [5], Definition 1.5, (iii); [5], Definition 1.5, (iv), を参照 — は、上に有界である.

$P \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$, $D \subseteq P$ を “ $\{0, 1, \infty\} \subseteq P$ ” によって定まる P の (次数 3 の) 被約因子, $U_P \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus D$ とします. したがって、 U_P の閉点のなす集合と $\overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ の $G_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 軌道のなす集合 — ただし、 $\overline{\mathbb{Q}}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 — との間に、自然な全単射

が存在します. 各元 $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に対して, 方程式 “ $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ ” を考えることによって, $\mathbb{Q}(\lambda)$ 上の楕円曲線 $(E_\lambda)_{\mathbb{Q}(\lambda)}$ が得られます. また, 剰余体 $\mathbb{Q}(\lambda)$ の拡大体 F_λ を $F_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\lambda, \sqrt{-1}, (E_\lambda)_{\mathbb{Q}(\lambda)}[3 \cdot 5](\overline{\mathbb{Q}}))$ と定義すると, 良く知られているとおり, F_λ 上の楕円曲線 $E_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (E_\lambda)_{\mathbb{Q}(\lambda)} \times_{\mathbb{Q}(\lambda)} F_\lambda$ は, F_λ のすべての素点において高々分裂乗法的還元を持ちます. 特に, 各元 $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ において,

- 楕円曲線 E_λ の q パラメータが定める F_λ 上の数論的因子 q_λ の次数 $\deg(q_\lambda)$,
- 数論的因子 q_λ が定める F_λ 上の “被約” な数論的因子 f_λ の次数 $\deg(f_\lambda)$,
- 数体 F_λ の絶対共役差積が定める F_λ 上の数論的因子 $\mathfrak{d}_\lambda$ の次数 $\deg(\mathfrak{d}_\lambda)$,
- 剰余体 $\mathbb{Q}(\lambda)$ の有理数体上の拡大次数 $d_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbb{Q}(\lambda) : \mathbb{Q}]$

という 4 つの値を考えることができます. これら 4 つの値は, $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ をその $G_{\mathbb{Q}}$ 共役に取り替えても変わらないため, 特に, これら 4 つの値を “ U_P の閉点のなす集合の上の関数” と考えることができます. この設定のもと, Belyi 写像を用いた議論を適用することによって, この §26 の冒頭で述べた “Diophantus 幾何学的不等式” を証明するためには, 以下の主張を証明すれば充分であることがわかります ([5], Theorem 2.1; [10], Corollary 2.2, (i); [10], Corollary 2.3, の証明を参照):

(*): d を正の整数, ϵ を正の実数, $\mathcal{K} \subseteq P$ を **コンパクトの有界集合** (compactly bounded subset — cf. [5], Example 1.3, (ii)) であって, 台が 2 を含むものとする. このとき, 集合 $\mathcal{K}^{\leq d} \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathcal{K}, \lambda \notin \{0, 1\} \mid d_\lambda \leq d\}$ 上の関数

$$\lambda \mapsto \frac{1}{6} \deg(q_\lambda) - (1 + \epsilon)(\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(f_\lambda))$$

は, 上に有界である.

上述の主張 (*) を証明するために, “宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の帰結”, すなわち, §25 の最後の議論で得られた不等式を用いましょう. $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に付随する F_λ 上の楕円曲線 E_λ が, 以下の条件 (a) を満たす初期 Θ データを許容すると仮定します:

- (a) $\underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ に属して, かつ, 剰余標数が 2 でも l でもないすべての有限素点の上では, E_λ (の “ K ” への底変換) は, 良還元を持つ. (“ $\underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ ” や “ l ” や “ K ” という記号については, §1 で復習した初期 Θ データに関する記号を参照.)

このとき, この §26 で導入された記号を用いて §25 の最後の議論で得られた不等式を “翻訳” することによって,

- (b) 不等式

$$\frac{1}{6} \deg(q_\lambda^{\text{bad}}) \leq \left(1 + \frac{d_\lambda^*}{l}\right) (\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(f_\lambda^{\text{bad}})) + 20(d_\lambda^* \cdot l + \eta_{\text{prm}})$$

— ただし, $q_\lambda^{\text{bad}}, f_\lambda^{\text{bad}}$ は q_λ, f_λ を $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}$ 上の素点のなす集合に制限することで得られる数論的因子, $d_\lambda^* \stackrel{\text{def}}{=} 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot d_\lambda$, η_{prm} は以下を満たす正の実数: η_{prm} 以上の実数 η に対して,

$$\#\{\eta \text{ 以下の素数} \} \leq \frac{4\eta}{3 \log(\eta)}$$

が成立 (この “ η_{prm} ” の存在については, [10], Proposition 1.6, を参照) —

が得られます. ([10], Theorem 1.10, を参照ください.)

上述の主張 (*) の証明を簡単に説明しましょう. (詳しくは, [10], Corollary 2.2, (ii), (iii), の証明を参照ください.) (*) の設定のもと, 一点抜き楕円曲線の数論性 ([2], §13, を参照) の理論, 古典的な Northcott 型定理の帰結 (= 正の実数 C に対する集合 $\{\lambda \in \mathcal{K}^{\leq d} \mid \deg(q_\lambda) \leq C\}$ の有限性), 素数定理, Tate 曲線の等分点への Galois 作用に関する基本的な事実などを用いることで, 有限個の例外を除く $\lambda \in \mathcal{K}^{\leq d}$ に対して, F_λ 上の楕円曲線 E_λ が, 以下の条件を満たす初期 Θ データを許容するという事実を証明することができます: 考察下の初期 Θ データは, 条件 (a) を満たし, かつ, データの一部である素数 “ l ” として, 以下の条件 (c), (d) を満たす素数 l_λ を採用可能:

(c) l_λ の上にある F_λ の素点での E_λ の q パラメータの付値は, $\deg(q_\lambda)^{1/2}$ より真に小さい.

(d) 不等式

$$\deg(q_\lambda)^{1/2} \leq l_\lambda \leq 10d^* \cdot \deg(q_\lambda)^{1/2} \cdot \log(2d^* \cdot \deg(q_\lambda))$$

— ただし, $d^* \stackrel{\text{def}}{=} 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot d$ — が成立する.

定義から,

$$\deg(f_\lambda^{\text{bad}}) \leq \deg(f_\lambda)$$

となります. そして, 主張 (*) において $\mathcal{K}$ に仮定された条件, 及び, 条件 (a), (c) によって, $\mathcal{K}^{\leq d}$ 上の関数

$$\lambda \mapsto \frac{1}{6} \deg(q_\lambda) - \frac{1}{6} \deg(q_\lambda^{\text{bad}}) - \deg(q_\lambda)^{1/2} \cdot \log(2d^* \cdot \deg(q_\lambda))$$

は, 上に有界となります. また, (d) を用いることで, 宇宙際 Teichmüller 理論の主定理によって導かれる不等式 (b) から, 不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \deg(q_\lambda^{\text{bad}}) &\leq \left(1 + \frac{d^*}{l_\lambda}\right) (\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(f_\lambda^{\text{bad}})) + 20(d^* \cdot l_\lambda + \eta_{\text{prm}}) \\ &\leq \left(1 + \frac{d^*}{\deg(q_\lambda)^{1/2}}\right) (\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(f_\lambda^{\text{bad}})) + 200(d^*)^2 \cdot \deg(q_\lambda)^{1/2} \cdot \log(2d^* \cdot \deg(q_\lambda)) + 20\eta_{\text{prm}} \end{aligned}$$

が従います. これらの 3 つのディスプレイの評価により, $\mathcal{K}^{\leq d}$ 上の関数

$$\lambda \mapsto \frac{1}{6} \deg(\mathbf{q}_\lambda) - \left(1 + \frac{d^*}{\deg(\mathbf{q}_\lambda)^{1/2}}\right) (\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(\mathfrak{f}_\lambda)) - (15d^*)^2 \cdot \deg(\mathbf{q}_\lambda)^{1/2} \cdot \log(2d^* \cdot \deg(\mathbf{q}_\lambda))$$

は, したがって, “初等的な式変形” により, $\mathcal{K}^{\leq d}$ 上の関数

$$\lambda \mapsto \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{(60d^*)^2 \cdot \log(2d^* \cdot \deg(\mathbf{q}_\lambda))}{\deg(\mathbf{q}_\lambda)^{1/2}}\right) \frac{1}{6} \deg(\mathbf{q}_\lambda) - \left(1 + \frac{d^*}{\deg(\mathbf{q}_\lambda)^{1/2}}\right) (\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(\mathfrak{f}_\lambda))$$

は, 上に有界です. ここで, 再び上で述べた古典的な Northcott 型定理の帰結によって, 有限個の例外を除く $\lambda \in \mathcal{K}^{\leq d}$ に対して,

$$0 < \epsilon_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(60d^*)^2 \cdot \log(2d^* \cdot \deg(\mathbf{q}_\lambda))}{\deg(\mathbf{q}_\lambda)^{1/2}} \leq \min\{1, \epsilon\} \leq 1 \leq \deg(\mathbf{q}_\lambda)$$

— となり, しかも, その場合,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \epsilon_\lambda\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{d^*}{\deg(\mathbf{q}_\lambda)^{1/2}}\right) &\leq \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \epsilon_\lambda\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \epsilon_\lambda\right) \\ &\leq 1 + \epsilon_\lambda \leq 1 + \epsilon \end{aligned}$$

— となります. そのため, 結論として, $\mathcal{K}^{\leq d}$ 上の関数

$$\lambda \mapsto \frac{1}{6} \deg(\mathbf{q}_\lambda) - (1 + \epsilon)(\deg(\mathfrak{d}_\lambda) + \deg(\mathfrak{f}_\lambda))$$

が上に有界であることがわかります.

謝辞 [2] での謝辞と同様に, 望月新一先生, 山下剛先生, 玉川安騎男先生, 松本真先生に感謝申し上げます. 特に, 本稿執筆時に限らずこれまで宇宙際 Teichmüller 理論に関する無数の議論にお付き合いくださった望月新一先生に深く感謝申し上げます. また, 本稿のそれぞれ

$$\S 2 \text{ と } \S 3, \quad \S 7 \text{ と } \S 16 \text{ と } \S 17 \text{ と } \S 18, \quad \S 1 \text{ と } \S 4 \text{ と } \S 5$$

は, 2015 年 12 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会 “代数的整数論とその周辺 2015” での筆者による連続講演 “宇宙際 Teichmüller 理論入門” の

第 1 講演, 第 2 講演, 第 3 講演

の内容の一部をまとめて更に説明を付け加えたものです. この連続講演の機会を与えてくださったプログラム委員の高橋浩樹先生, 大野泰生先生, 津嶋貴弘先生にお礼申し上げます.

参考文献

- [1] 星 裕一郎, 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B19** (2010), 81-106.
- [2] 星 裕一郎, 宇宙際 Teichmüller 理論入門.
- [3] S. Mochizuki, Semi-graphs of anabelioids, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **42** (2006), no. **1**, 221-322.
- [4] S. Mochizuki, The étale theta function and its Frobenioid-theoretic manifestations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. **1**, 227-349.
- [5] S. Mochizuki, Arithmetic elliptic curves in general position, *Math. J. Okayama Univ.* **52** (2010), 1-28.
- [6] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry III: Global reconstruction algorithms, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **22** (2015), no. **4**, 939-1156.
- [7] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller theory I: Construction of Hodge theaters*, RIMS Preprint **1756** (August 2012).
- [8] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller theory II: Hodge-Arakelov-theoretic evaluation*, RIMS Preprint **1757** (August 2012).
- [9] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller theory III: Splittings of the log-theta-lattice*, RIMS Preprint **1758** (August 2012).
- [10] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller theory IV: Log-volume computations and set-theoretic foundations*, RIMS Preprint **1759** (August 2012).

[2] の最新版は,

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yuichiro/papers.html>

を参照ください. また, [7], [8], [9], [10] の最新版は,

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-japanese.html>

を参照ください.

索引

- Gauss モノイド (Gaussian monoid), 66
 エタールの — (étale-like —), 68
 単テータ論的 — (mono-theta theoretic —), 69
 フロベニオイド論的 — (Frobenioid-theoretic —), 71
- Kummer 離脱 (Kummer-detachment), 9
- $\mathcal{F}^{\text{tr}} \blacktriangleright \times \mu$ 素点縞 ($\mathcal{F}^{\text{tr}} \blacktriangleright \times \mu$ -prime-strip), 34
- $\Theta^{\times \mu}$ リンク ($\Theta^{\times \mu}$ -link), 79
 $\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ リンク ($\Theta_{\text{gau}}^{\times \mu}$ -link), 79
 $\Theta_{\text{LGP}}^{\times \mu}$ リンク ($\Theta_{\text{LGP}}^{\times \mu}$ -link), 88
- 値プロフィール (value-profile), 66
- 遠半グラフ (semi-graph of anabelioids), 28
- 共役同期化 (conjugate synchronization), 29
- 局所対数 Gauss 行進モノイド (local logarithmic Gaussian procession monoid), 81
 Frobenius 的 — (Frobenius-like —), 81
 エタールの — (étale-like —), 83
- 行進 (procession), 21
 コンパクトの有界集合 (compactly bounded subset), 94
- 大域の実化 Gauss フロベニオイド (global realified Gaussian Frobenioid), 72
 Frobenius 的 — (Frobenius-like —), 77
 エタールの — (étale-like —), 77
- 大域の実化対数 Gauss 行進フロベニオイド (global realified logarithmic Gaussian procession Frobenioid), 82
 Frobenius 的 — (Frobenius-like —), 82
 エタールの — (étale-like —), 84
- 大域の実化テータフロベニオイド (global realified theta Frobenioid), 72
 Frobenius 的 — (Frobenius-like —), 77
 エタールの — (étale-like —), 76
- 対称化同型 (symmetrizing isomorphism), 30
 $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ — ($\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ - —), 30
 $\mathbb{F}_l^*$ — ($\mathbb{F}_l^*$ - —), 36
- 対数殻 (log-shell)
 正則 Frobenius 的 — (holomorphic Frobenius-like —), 43
 正則エタールの — (holomorphic étale-like —), 43
 単解 Frobenius 的 — (mono-analytic Frobenius-like —), 42
 単解エタールの — (mono-analytic étale-like —), 42
- 対数体積 (log-volume), 44
 行進正規化 — (procession-normalized —), 48
- 対数テータ格子 (log-theta-lattice), 49
 対数列 (log-line), 49
- 代入同型 (evaluation isomorphism), 67
 エタールの — (étale-like —), 68
 単テータ論的 — (mono-theta theoretic —), 70
 フロベニオイド論的 — (Frobenioid-theoretic —), 71

単遠アーベル的輸送 (mono-anabelian transport), 9

単テータ系 (mono-theta system), 57

テータモノイド (theta monoid), 58

エタールの — (étale-like —), 60

単テータ論的 — (mono-theta-theoretic —), 61

フロベニオイド論的 — (Frobenioid-theoretic —), 59

テンソルパッケージ (tensor packet), 45

局所正則 — (local holomorphic —), 45

局所単解 — (local mono-analytic —), 46

大域 — (global —), 48